Peter Wittwer


# Analyse avancée II – Série 5B

**Échauffement.** (Fonctions définies par des séries)

Soit la fonction $f\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \big(x\ln(x)\big)^n$.

*i*) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ la série converge absolument, c'est-à-dire montrer que la fonction $f$ est bien définie.

*ii*) Monter que la fonction $f$ satisfait l'équation différentielle $y' + (1+\ln(x))\,y = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

*iii*) Montrer que $f(2) = \dfrac{1}{4}$ .

**Exercice 1.** (Fonctions définies par des séries)

Soit la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!}\, x^{3n}$.

*i*) Montrer que le rayon de convergence de la série est $+\infty$ et que la fonction $f$ est donc bien définie.

*ii*) Monter que la fonction $f$ satisfait l'équation différentielle $f'' + f' + f = \mathrm{e}^x$ sur $\mathbb{R}$.

*iii*) Calculer la valeur de la série numérique $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!}$ .

**Exercice 2.** (Équations indépendantes de $x$)
Trouver la solution générale de l'équation différentielle

$$y'' - \frac{y}{1+y^2}\,\big((y')^2 + 1\big) = 0\ .$$

**Exercice 3.** (Équations indépendantes de $y$)
Trouver la solution générale de l'équation différentielle

$$y'' - \frac{x}{1+x^2}\,\big((y')^2 + 1\big) = 0\ .$$

**Exercice 4.** (Équations indépendantes de $x$ et $y$)
Trouver par trois méthodes différentes la solution générale de l'équation différentielle

$$y'' - (y')^2 - 1 = 0\ .$$