Peter Wittwer
20 mars 2025

Analyse avancée II – Corrigé de la série 5A

Échauffement 1.

Les fonctions f et g sont de classe C^1 sur leur domaine de définition. La fonction h est continue sur son domaine de définition $[-1,1]$ et de classe C^1 sur l'intervalle ouvert $]-1,1[$. Soit $\omega(t) = t/2$. Alors $g(\omega(t)) = f(t)$ pour tout $t \in [0,\pi]$ et $\omega\colon [0,\pi] \to [0,\pi/2]$ est de classe C^1, strictement croissante et surjective et la fonction w' ne s'annule en aucun point. Les fonctions f et g sont donc des chemins C^1-équivalents et en conclusion des paramétrisations de la même courbe de classe C^1. Soit $\omega_0(t) = \cos(t)$. Alors $h(\omega_0(t)) = f(t)$ pour tout $t \in [0,\pi]$ et $\omega_0\colon [0,\pi] \to [-1,1]$ est continue, strictement décroissante et surjective. La fonction w_0 est en fait de classe C^1, mais la fonction dérivée w_0' s'annule en $t=0$ et en $t=\pi$. Le chemin h est donc équivalent au chemin f au sens des chemins continus, mais pas au sens des chemins de classe C^1. Les fonctions f, g et h sont donc des paramétrisations de la courbe continue $< f >$, mais seulement f et g sont des paramétrisations de la courbe $< f >$ vue comme courbe de classe C^1 . A noter que f est la paramétrisation canonique de cette courbe de classe C^1.

Exercice 1.

Supposons que $f = (f_1,\dots,f_m)^T : I_1 = [a,b] \to \mathbb{R}^m$ et $g = (g_1,\dots,g_m)^T : I_2 = [c,d] \to \mathbb{R}^m$ soient des paramétrisations de classe C^1 d'une courbe de classe C^1. Alors, par définition, il existe une fonction de classe C^1 $\omega\colon I_1 \to I_2$, telle que pour tout $t \in I_1$, $g(\omega(t)) = f(t)$. Par conséquence $f_i(t) = g_i(\omega(t))$ pour $i = 1,\dots,m$ et par la dérivée en chaîne pour des fonctions d'une variable (voir Analyse I) on obtient que $f_i'(t) = g_i'(\omega(t))\omega'(t)$ pour $i = 1,\dots,m$. Par la linéarité on obtient du coup que pour tout $t \in I_1$,

$$f'(t) = \omega'(t)\ g'(\omega(t)).$$

Par la définition de la longueur du chemin f et par la propriété de la homogénéité d'une norme on a

$$|f| = \int_a^b \|f'(t)\| dt = \int_a^b \|\omega'(t)\ g'(\omega(t))\| dt = \int_a^b |\omega'(t)|\ \|g'(\omega(t))\|\ dt.$$

La fonction ω est par définition strictement monotone et on a donc ou bien que pour tout $t \in I_1$, $\omega'(t) > 0$ ou bien que pour tout $t \in I_1$, $\omega'(t) < 0$. Dans le premier car on obtient que

$$|f| = \int_a^b \omega'(t)\ \|g'(\omega(t))\|\ dt,$$

et en posant le changement de variables $t = \varphi(s) = \omega^{-1}(s)$ on obtient, en utilisant que $\varphi'(s) = \dfrac{1}{\omega'(\omega^{-1}(s))}$, que

$$|f| = \int_c^d \omega'(w^{-1}(s))\ \|g'(\omega(\omega^{-1}(s)))\|\ \frac{1}{\omega'(\omega^{-1}(s))}\ ds = \int_c^d \|g'(s)\|\ ds = |g|.$$

Dans le deuxième cas on a que

$$|f| = \int_d^c \left(-\omega'(w^{-1}(s))\right)\ \|g'(\omega(\omega^{-1}(s)))\|\ \frac{1}{\omega'(\omega^{-1}(s))}\ ds = \int_c^d \|g'(s)\|\ ds = |g|.$$

Exercice 2.

Notons pour commencer que $-\cos(\varepsilon) = \cos(\pi - \varepsilon)$. Sur leurs domaines restreints respectives les paramétrisations f et h sont donc C^1-équivalentes (voir l'Échauffement 1.). On a donc (voir Exercice 1.) que pour tout $\varepsilon \in \,]0, \pi/2[\,$,

$$|f| = \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \|f'(t)\| dt = \int_{\cos(\pi-\varepsilon)}^{\cos(\varepsilon)} \|h'(t)\|\ dt = |h|.$$

On a $\|f'(t)\| = 1$ et

$$\|h'(t)\| = \left\| \left(1, \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}\right)^T \right\| = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}},$$

et donc

$$\pi - 2\varepsilon = \int_{\cos(\pi-\varepsilon)}^{\cos(\varepsilon)} \|h'(t)\|\ dt = 2\int_0^{\cos(\varepsilon)} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\ dt,$$

ce qui implique que

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\ dt := \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_0^{\cos(\varepsilon)} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\ dt = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 3.

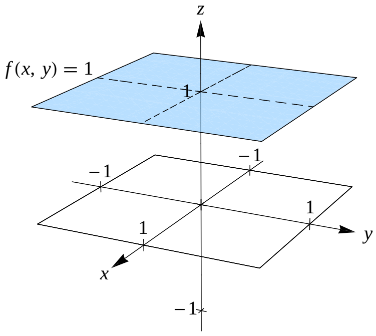
On a par définition que

$$W = \int_0^{2\pi} \left\langle (-\sin(t), \cos(t))^T, (-\sin(t), \cos(t))^T \right\rangle dt = \int_0^{2\pi} 1\ dt = 2\pi.$$

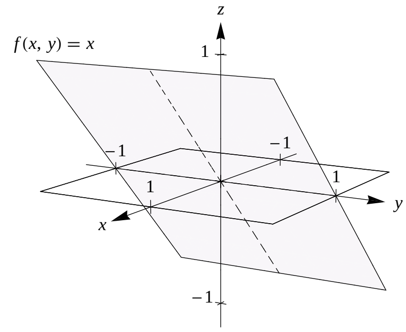
Échauffement 2.

Les lignes hachurées sont les images des axes x et y par la fonction f.

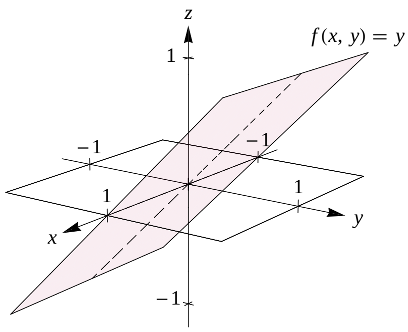
i) $V(f) = \{1\}$



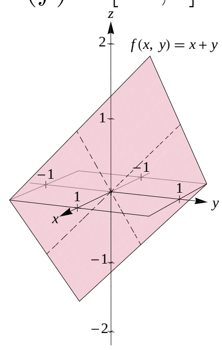
ii) $V(f) = [-1, 1]$



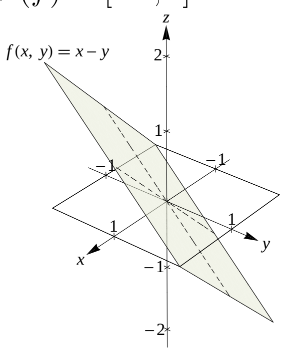
iii) $V(f) = [-1, 1]$



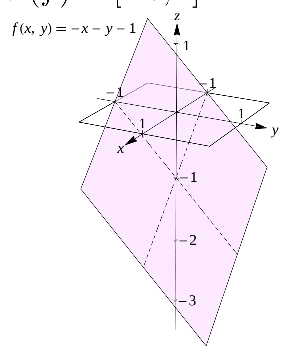
iv) $V(f) = [-2, 2]$



v) $V(f) = [-2, 2]$



vi) $V(f) = [-3, 1]$



Exercice 4.

a) On a $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{x^2 - 3y}{x + 2y^2} = \frac{4-3}{2+2} = \frac{1}{4}$.

b) On utilise les coordonnées polaires: $\begin{cases} x = r\cos(\varphi) \\ y = r\sin(\varphi) \end{cases}$. Ainsi $x^2 + y^2 = r^2$ et donc

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0} \frac{\sin(r^2)}{r^2} = 1 \quad \text{(Fig. 1)}.$$

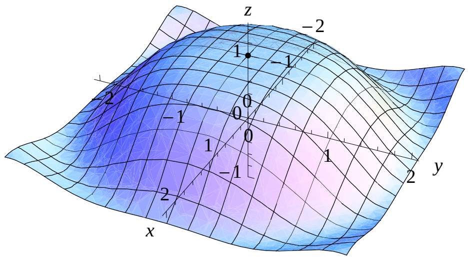


Fig. 1: La limite est représentée par le point noir.

c) Sur une suite de points de la forme $(x_n, 0)$, avec $x_n \neq 0$ et $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ on a $\lim_{n\to\infty} f(x_n, 0) = \frac{x_n \cdot 0^2}{x_n^2 + 0^4} = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$. D'autre part, sur une suite de points (y_n^2, y_n) avec $y_n \neq 0$ et $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$ on a $\lim_{n\to\infty} f(y_n^2, y_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{y_n^2 y_n^2}{(y_n^2)^2 + y_n^4} = \frac{1}{2}$. Donc la limite n'existe pas.

d) Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ avec $x \neq 0$ on a

$$|f(x,y)| = \left|\frac{x^2 y}{x^2 + y^4}\right| \leq \left|\frac{x^2 y}{x^2 + 0}\right| \leq |y|,$$

et pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ avec $x = 0$ on a $f(x, y) = 0$. Ona a donc dans tous les cas que $|f(x, y)| \leq |y|$. Soit (x_n, y_n) une suite telle que $(x_n, y_n) \neq (0, 0)$ et $\lim_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (0, 0)$. Par la Proposition 2.6 du cours on a que $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$ et donc $\lim_{n\to\infty} |f(x_n, y_n)| \leq \lim_{n\to\infty} |y_n| = 0$. Par la définition de la limite ceci implique que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$.

Exercice 5.

a) On a

$$\frac{|x|^{3/2}|y|^{3/2}}{x^2 + y^4} = \frac{|x|^{3/2}}{(x^2 + y^4)^{3/4}} \frac{|y|^{3/2}}{(x^2 + y^4)^{1/4}} \leq \frac{|x|^{3/2}}{(x^2)^{3/4}} \frac{|y|^{3/2}}{(y^4)^{1/4}} \leq \sqrt{|y|} \ ,$$

et la limite vaut donc zéro.

b) Le long d'une suite épointée de la forme $(x_n, 0)$ on a

$$\frac{|x_n|^{3/2}|0|}{x_n^2 + 0^4} = 0 \ ,$$

tandis que le long d'une suite épointée de la forme (y_n^2, y_n) on a

$$\frac{|y_n^2|^{3/2}|y_n|}{y_n^4 + y_n^4} = \frac{1}{2} \ ,$$

et la limite n'existe donc pas.

c) On a que

$$\left|\frac{x^3 y^2}{(x^2 + y^4)(x^4 + y^2)}\right| = \left|\frac{x^3}{x^2 + y^4}\right| \left|\frac{y^2}{x^4 + y^2}\right| \leq \left|\frac{x^3}{x^2 + 0^4}\right| \left|\frac{y^2}{0^4 + y^2}\right| \leq |x| \ ,$$

et la limite vaut donc zéro.

d) On a que

$$\frac{|x|^{7/2}|y|^{3/2}}{(x^2+y^4)(x^4+y^2)} = \frac{|x|^{7/2}}{(x^2+y^4)(x^4+y^2)^{1/4}} \frac{|y|^{3/2}}{(x^4+y^2)^{3/4}} \ ,$$

et donc

$$\frac{|x|^{7/2}|y|^{3/2}}{(x^2+y^4)(x^4+y^2)} \leq \frac{|x|^{7/2}}{(x^2+0^4)(x^4+0^2)^{1/4}} \frac{|y|^{3/2}}{(0^4+y^2)^{3/4}} \leq \sqrt{|x|} \ ,$$

ce qui implique que la limite vaut zéro.

Exercice 6.

i) En passant en coordonnées polaires $\begin{cases} x = r\cos(\varphi) \\ y = r\sin(\varphi) \end{cases}$ on a

$$3x^3 - 2y^3 = r^3\left(3\cos(\varphi)^3 - 2\sin(\varphi)^3\right) \qquad \text{et} \qquad x^2+y^2 = r^2$$

et donc

$$f(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) = r\left(3\cos(\varphi)^3 - 2\sin(\varphi)^3\right),$$

et on trouve que pour tout $\varphi \in [0, 2\pi[$, $|f(x,y)| \leq 5r$, ce qui implique que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y)| \leq \lim_{r\to 0} 5r = 0,$$

et par conséquence

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

Il s'en suit que la fonction $\hat{f}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\hat{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

est le prolongement par continuité de la fonction f en $(0,0)$. Le graphe de $\hat{f}$ se trouve à la Fig. 2.

ii) On considère les limites de deux cas particuliers de f:

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{0}{5x^2} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0} f(x,2x) = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{x^2} = 2\,.$$

Par conséquent $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ n'existe pas et la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ n'admet donc pas de prolongement par continuité en $(0,0)$ (voir Fig. 3 pour le graphe).

iii) On utilise encore une fois les coordonnées polaires $\begin{cases} x = r\cos(\varphi) \\ y = r\sin(\varphi) \end{cases}$. Ainsi

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0} \frac{1-\cos(r)}{r^2} = \lim_{r\to 0} \frac{1-\cos(r)^2}{r^2(1+\cos(r))} = \lim_{r\to 0} \left(\frac{\sin(r)}{r}\right)^2 \cdot \frac{1}{1+\cos(r)} = \frac{1}{2}$$

La fonction $\hat{f}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\hat{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ \frac{1}{2}, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

est donc le prolongement par continuité de f en $(0,0)$ (graphe de $\hat{f}$ à la Fig. 4).

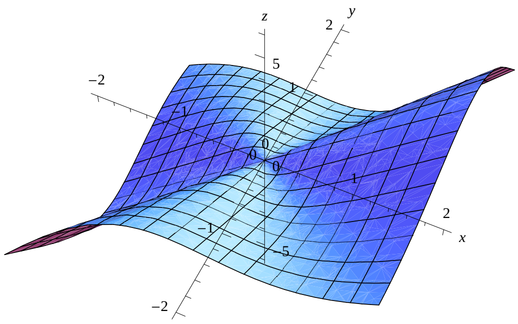


Fig. 2

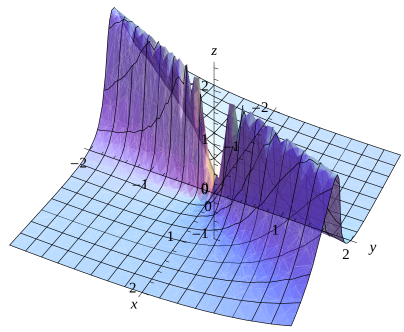


Fig. 3

iv) Comme on a

$$\lim_{t\to 0} f(t,t) = \lim_{t\to 0} t^2 \frac{0}{4t^4} = 0\,,$$

on devrait avoir $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ pour qu'un prolongement par continuité de f en $(0,0)$ existe. Or, en considérant la limite $f(2t,t)$ on trouve

$$\lim_{t\to 0} f(2t,t) = \lim_{t\to 0} 2t^2 \frac{4t^2 - t^2}{(4t^2+t^2)^2} = \lim_{t\to 0} \frac{6t^4}{25t^4} = \frac{6}{25} \neq 0\,.$$

Ainsi f ne peut pas être prolongé par continuité au point $(0,0)$ (voir Fig. 5).

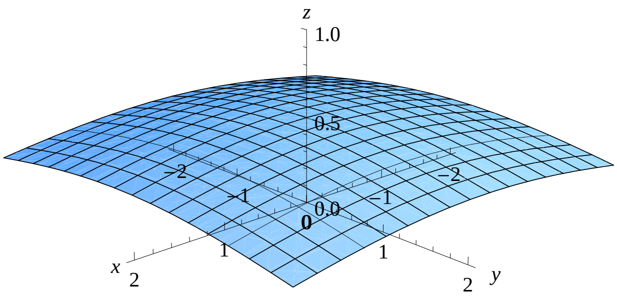


Fig. 4

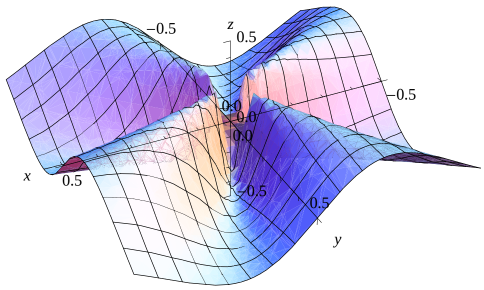


Fig. 5

Exercice 7. (V/F : limites et continuité)

Q1 : Soit une fonction $f\colon D \to \mathbb{R}$ et soit $(x_0, y_0) \in D$ où $D \subset \mathbb{R}^2$ est ouvert. Si

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$$

existe, alors f est continue en (x_0, y_0).

Réponse : faux. *L'existence de la limite ne suffit pas, il faut en plus que cette limite soit égale à la valeur de f en (x_0, y_0), c'est-à-dire que* $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0)$.

Q2 : Soit une fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et soit une fonction $g\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ avec $\lim\limits_{r\to 0^+} g(r) = 0$. S'il existe une valeur φ_0 de $\varphi \in [0, 2\pi[$ telle que

$$\big|f\big(r\cos(\varphi_0), r\sin(\varphi_0)\big)\big| \leq g(r)$$

pour tout $r \in \mathbb{R}^+$, alors

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0\,.$$

Réponse : faux. *Contre-exemple : soit $f(x,0) = 0$ pour $x \in \mathbb{R}^+$, $f(x,y) = 1$ sinon, et soit $g(r) = 0$ pour tout $r \in \mathbb{R}^+$. Alors pour $\varphi = 0$ on a pour tout $r \in \mathbb{R}^+$,*

$$0 = |f(r,0)| = \big|f\big(r\cos(0), r\sin(0)\big)\big| \leq 0 = g(r)\,,$$

mais la limite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ *n'existe pas.*

Q3 : Faux. Il ne suffit pas de regarder les limites de la forme

$$\lim_{t\to 0} f(\alpha t, \beta t) = 0$$

(limites le long de droites) pour montrer que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

ou encore l'existence de cette limite (voir les contre-exemples du cours).

Exercice 8.

La fonction

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \neq 0\,, \\[2ex] 1 & \text{si } x = 0\,, \end{cases}$$

n'admet pas de limite en $(0,0)$ mais on peut vérifier que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{t\to 0} f(t,\, \alpha t^2) = 0$.

Exercice 9.

C'est **faux**. La première limite est une limite épointée dans $\mathbb{R}$, tandis que la deuxième est une limite épointée dans $\mathbb{R}^2$. Prenons par exemple $(x_0, y_0) = (0, 0)$ et considérons la fonction $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 1 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Alors $\lim_{x\to 0} f(x,0) = 0$ existe, mais $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,0)$ n'existe pas.

En effet, dans la première limite on considère la fonction d'une variable $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par $g(x) = f(x,0)$ et on a que $g(x) = 0$ si $x \neq 0$ et que $g(0) = 1$, et

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) := \lim_{x\to 0} g(x) = 0.$$

La deuxième limite est dans $\mathbb{R}^2$. On considère donc la fonction $h \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $h(x,y) = f(x,0)$ et on a que

$$h(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

et

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,0) := \lim_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y).$$

Prenons la suite $(x_n, 0)$ avec $x_n \neq 0$ et $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, alors $\lim_{n\to\infty} h(x_n, 0) = 0$. D'autre part, si on prend la suite $(0, y_n)$ avec $y_n \neq 0$ et $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$ on a $\lim_{n\to\infty} h(0, y_n) = 1$. Donc la limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y)$ n'existe pas.