

Analyse avancée II – Série 5A

Échauffement 1. (Courbes continues et courbes de classe C^1)

Soient les fonctions f , g , et h définies respectivement par

$$\begin{aligned} f: [0, \pi] &\rightarrow \mathbb{R}^2, & f(x) &= (\cos(t), \sin(t))^T \\ g: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] &\rightarrow \mathbb{R}^2, & g(x) &= (\cos(2t), \sin(2t))^T \\ h: [-1, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^2, & h(x) &= \left(t, \sqrt{1-t^2}\right)^T \end{aligned}$$

Montrer que f , g , et h sont les trois des représentants d'une courbe continue, mais pas d'une courbe de classe C^1 .

Exercice 1. (Longueur d'une courbe de classe C^1)

Montrer que la longueur d'une courbe de classe C^1 est bien définie, c'est-à-dire indépendante de sa paramétrisation.

Exercice 2. (Paramétrisation d'une courbe de classe C^1)

Soient les fonctions f et h comme dans l'Échauffement 1. Montrer que pour tout $\varepsilon \in]0, \frac{\pi}{2}[$ la restriction de la fonction f à l'intervalle $[\varepsilon, \pi - \varepsilon]$ et la restriction de la fonction h à l'intervalle $[-\cos(\varepsilon), \cos(\varepsilon)]$ sont des chemins équivalents de classe C^1 . Utiliser cette information pour montrer que l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

existe au sens d'une intégrale généralisée et calculer sa valeur.

Exercice 3. (Intégrales curvilignes)

Soit $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ la fonction définie par $f(t) = (\cos(t), \sin(t))^T$ et $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la fonction définie par $F(x, y) = (-y, x)^T$. Calculer l'intégrale curviligne de F le long de la courbe $\langle f \rangle$.

Échauffement 2. (Graphes)

Trouver l'image et esquisser le graphe des fonctions $f: [-1, 1] \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ suivantes :

$$\begin{array}{llll} i) f(x, y) = 1 & ii) f(x, y) = x & iii) f(x, y) = y & iv) f(x, y) = x + y \\ v) f(x, y) = x - y & vi) f(x, y) = -x - y - 1 & & \end{array}$$

Exercice 4. (Limites)

Calculer les limites suivantes si elles existent:

$$a) \lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \frac{x^2 - 3y}{x + 2y^2} \quad b) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \quad c) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} \quad d) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y}{x^2 + y^4}$$

Exercice 5. (Limites)

Calculer les limites suivantes si elles existent:

$$\begin{array}{lll}
 a) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|x|^{3/2}|y|^{3/2}}{x^2 + y^4} & b) \quad a) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|x|^{3/2}|y|}{x^2 + y^4} & c) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y^2}{(x^2 + y^4)(x^4 + y^2)} \\
 d) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|x|^{7/2}|y|^{3/2}}{(x^2 + y^4)(x^4 + y^2)} & &
 \end{array}$$

Exercice 6. (Continuité)

Déterminer (s'il existe) le prolongement par continuité au point $(0,0)$ des fonctions f dont l'expression pour $(x,y) \neq (0,0)$ est :

$$\begin{array}{ll}
 i) \quad f(x,y) = \frac{3x^3 - 2y^3}{x^2 + y^2} & ii) \quad f(x,y) = \frac{xy}{x^2 + (2x - y)^2} \\
 iii) \quad f(x,y) = \frac{1 - \cos(\sqrt{x^2 + y^2})}{x^2 + y^2} & iv) \quad f(x,y) = xy \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}
 \end{array}$$

Exercice 7. (V/F : limites et continuité)

Q1: Soit une fonction $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ et soit $(x_0, y_0) \in D$ où $D \subset \mathbb{R}^2$ est ouvert. Si

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y)$$

existe, alors f est continue en (x_0, y_0) .

Q2: Soit une fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ et soit une fonction $g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ avec $\lim_{r \rightarrow 0^+} g(r) = 0$. S'il existe une valeur φ_0 de $\varphi \in [0, 2\pi[$ telle que

$$|f(r \cos(\varphi_0), r \sin(\varphi_0))| \leq g(r)$$

pour tout $r \in \mathbb{R}^+$, alors

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0.$$

Q3: Soit une fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(0,0) = 0$. Si pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et tout $\beta \in \mathbb{R}$ on a

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(\alpha t, \beta t) = 0,$$

alors f est continue en $(0,0)$.

Exercice 8. (Question à rédaction détaillée)

Donner un exemple d'une fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ qui n'admet pas de limite en $(0,0)$ mais satisfait pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t, \alpha t^2) = 0.$$

Exercice 9. (V/F : limites)

Soit une fonction $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ et soit $(x_0, y_0) \in D$ où $D \subset \mathbb{R}^2$ est ouvert. Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y_0)$ existe, alors

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y)$$

existe.