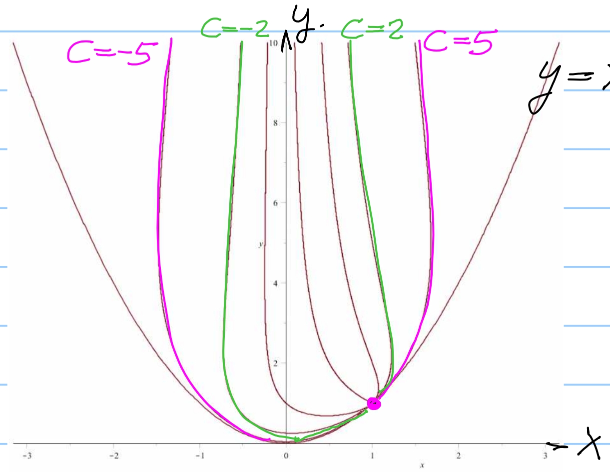
Exemple 3

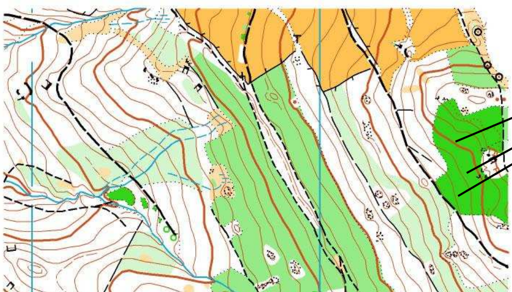
$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 < y\}$, $\quad f(x,y) = \dfrac{xy-1}{\sqrt{y-x^2}}$, $\quad \operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}$



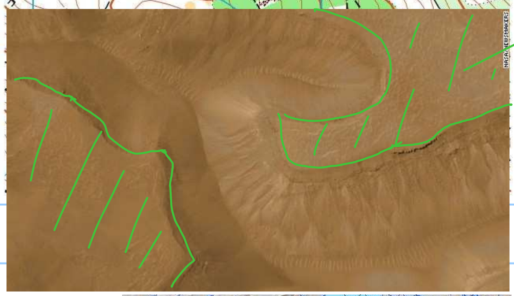
lignes de niveau de f de niveau c.

Le fait que plusieures lignes de niveau "terminent" en le point $(1,1)$ implique la non-existence de la limite $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y)$.

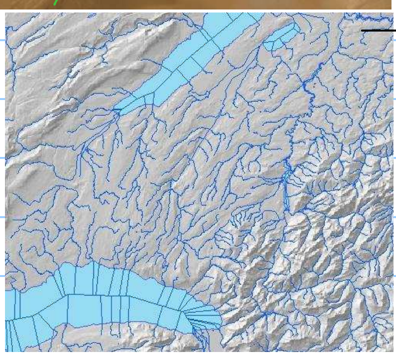
Cartes géographiques



lignes de niveau



plateau de niveau (sur mars)



carte hydrographique, à discuter plus loin.

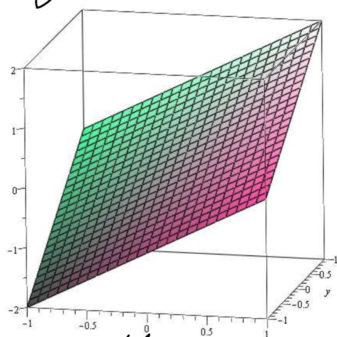
4.4. Limites et continuité (d'une fonction $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$)

Exemple 1 : (opérations algébriques)

i) Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto f(x,y) = x+y$

f est continue en chaque point $(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^2$:

$$\lim_{(x,y)\to(x^*,y^*)} \underbrace{f(x,y)}_{= x+y} = \underbrace{f(x^*,y^*)}_{= x^*+y^*} .$$



moodle002.

Démonstration

avec les suites : soit (x_n, y_n) une suite telle que $\lim_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (x^*, y^*) \in \mathbb{R}^2$, et $(x_n, y_n) \neq (x^*, y^*)$. Alors

$$|(x_n + y_n) - (x^* + y^*)| = |(x_n - x^*) + (y_n - y^*)|$$

$$\leq \underbrace{\underbrace{|x_n - x^*|}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0} + \underbrace{|y_n - y^*|}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0}}_{\text{par la proposition 2.6.}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

avec $\varepsilon - \delta$: on a

$$\|f(x,y) - f(x^*,y^*)\|_2 = |(x+y) - (x^*+y^*)|$$

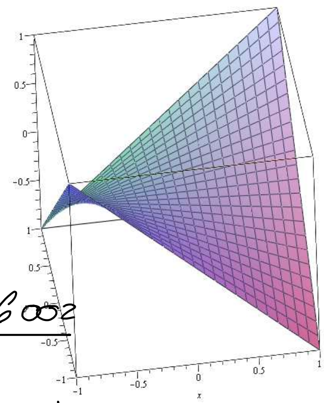
$$\leq |x - x^*| + |y - y^*| = \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} \right\|_1 \leq \sqrt{2} \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} \right\|_2 .$$

donc, $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta$ ($\delta = \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon$, par exemple) tel que

$$\left((x,y) \in D = \mathbb{R}^2, \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} \right\| \leq \delta \right) \Longrightarrow \left(\|f(x,y) - f(x^*, y^*)\| \leq \varepsilon \right)$$

ii) soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto f(x,y) = x \cdot y$

f est continue en chaque point $(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^2$



$$\lim_{(x,y)\to(x^*,y^*)} \underset{\displaystyle x\cdot y}{\underset{\parallel}{f(x,y)}} = \underset{\displaystyle x^*\cdot y^*}{\underset{\parallel}{f(x^*,y^*)}}$$

<u>Démonstration</u> :

<u>mood6002</u>

$$|x\cdot y - x^* \cdot y^*| = |(x-x^*)y + x^*(y-y^*)|$$

$$\leq |x-x^*| \cdot |y| + |x^*||y-y^*| \qquad (*)$$

Soit (x_n, y_n) une suite, $(x_n, y_n) \neq (x^*, y^*)$ telle que $\lim_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (x^*, y^*)$

Il existe alors $C > 0$, tel que $\forall n$, $|y_n| \leq C$, car <u>toute suite convergente est bornée.</u> (voir série 4A)
En utilisant $(*)$ on a donc

$$|x_n \cdot y_n - x^* \cdot y^*| \leq |x_n - x^*| \cdot C + |x^*||y_n - y^*| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

par la proposition 2.6

<u>Conséquence de i) et ii)</u> et du fait que la fonction

$f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$.

<u>Théorème</u> Les fonctions polynôme de deux (ou plusieures) variables, ainsi que les fonctions rationnelles de deux (ou plusieures) variables sont toutes continues sur le domaine de définition de l'expression en question.

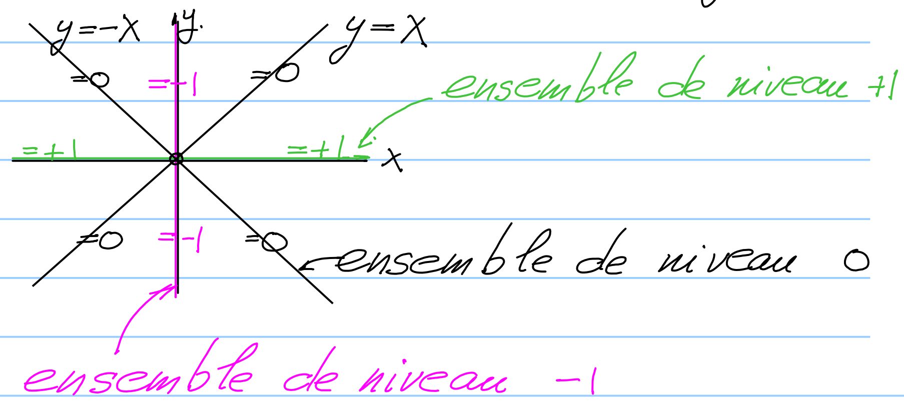
Exemple 2 (non existence d'une limite)

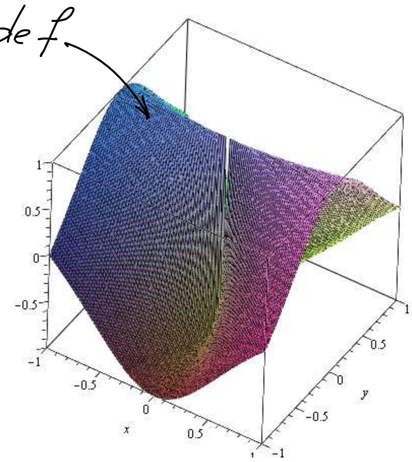
i) $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, $D(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \equiv D$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \,?$$

f continue sur D (car f une fonction rationnelle)

Ensembles de niveau — graphe de f





la limite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ n'existe pas, car pour toute suite de la forme $(x_n, 0)$ telle que $x_n \neq 0$ et $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ on a

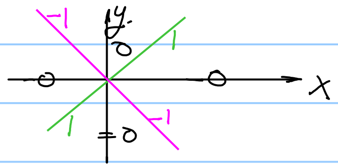
$$f(x_n,0) = \frac{x_n^2-0^2}{x_n^2+0^2} = 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \,,$$

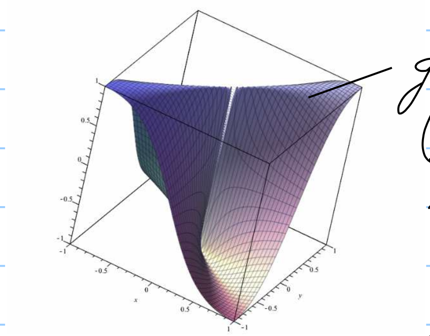
par contre pour toute suite de la forme $(0, y_n)$ telle que $y_n \neq 0$ et $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$ on a

$$f(0,y_n) = \frac{0^2-y_n^2}{0^2+y_n^2} = -1 \xrightarrow[n\to\infty]{} -1 \neq 1.$$

ii) $f(x,y) = \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$, $D(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} = D$

<u>Ensembles de niveau</u>





graphe de $f = \Gamma(f)$ (voir aussi Maple002)

f continue sur D (car f une fonction rationnelle)

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ n'existe pas car

pour une suite de la forme (x_n, x_n) telle que $x_n \neq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ on a

$$f(x_n, x_n) = \frac{2\, x_n \cdot x_n}{x_n^2 + x_n^2} = 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

par contre pour une suite de la forme $(x_n, -x_n)$ telle que $x_n \neq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ on a

$$f(x_n, -x_n) = \frac{2\, x_n\,(-x_n)}{x_n^2 + (-x_n)^2} = -1 \xrightarrow[n\to\infty]{} -1 \neq 1.$$

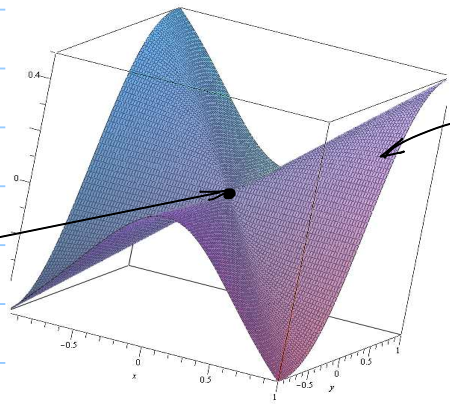
<u>Exemple 3</u> (existence d'une limite)

$f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}$, $D(f) = D = \mathbb{R}^2$

à montrer

f continue sur $D \setminus \{(0,0)\}$, car f une fonction rationnelle.

$$\boxed{\text{Proposition: } \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0}$$



$\Gamma(f)$

Démonstration (deux techniques)

i) par une borne "adéquate"

pour $x\neq 0$ et $y\neq 0$ $\quad |f(x,y)| \leqslant \dfrac{x^2|y|}{x^2+0^2} \leqslant |y|$

pour $x=0$ et $y\neq 0$ $\quad f(x,y) = \dfrac{0^2 y}{0^2+y^2} = 0$

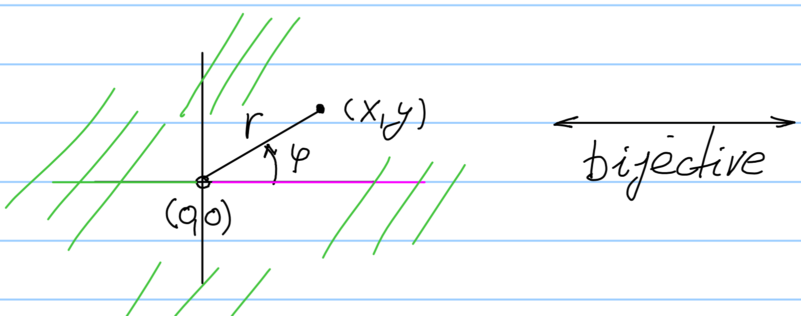
pour $x\neq 0,\ y=0$ $\quad f(x,y) = \dfrac{x^2\cdot 0}{x^2+0^2} = 0$

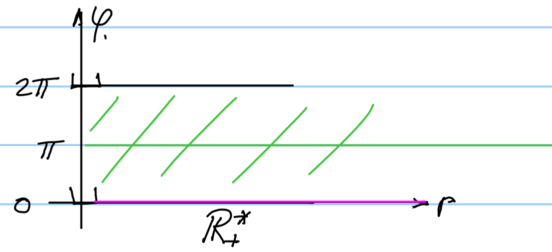
En conclusion on a $|f(x,y)| \leqslant |y|$, $\forall (x,y)\in D\setminus\{(0,0)\}$

$$\Rightarrow 0 \leqslant \lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y) - \underbrace{0}_{\text{la valeur de la limite.}}| = \lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y)|$$

$$\leqslant \lim_{(x,y)\to(0,0)} |y| \underbrace{=}_{\text{par la proposition 2.6.}} 0$$

ii) par coordonnées polaires (par rapport à $(x^*,y^*)=(0,0)$)





$r = \sqrt{x^2+y^2} = \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|$

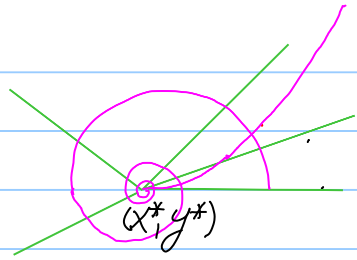
$x = r\cdot\cos(\varphi)$

$y = r\cdot\sin(\varphi)$

$\varphi = \begin{cases} 0, & y=0,\ x>0 \\ \pi + 2\arctan\left(\dfrac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{sinon} \end{cases}$

Dans notre exemple $(x^*,y^*)=(0,0)$. Pour toute suite (x_n,y_n) telle que $(x_n,y_n)\neq(x^*,y^*)$ et $\lim_{n\to\infty}(x_n,y_n)=(x^*,y^*)$ on a que $\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty}\sqrt{(x_n-x^*)^2+(y_n-y^*)^2} = 0$, mais φ_n peut varier d'une manière quelconque dans $[0,2\pi[$.

Illustration:



Explication: différentes manières d'approcher (x^*, y^*) le long de droites ($\varphi_n = \text{const.}$ en coordonnées polaires), ou par d'autres manières (φ_n = quelconque en coordonnées polaires).

Dans notre exemple, donné une suite arbitraire telle que $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$, $r_n > 0$ (mais φ_n arbitraires !) on a:

$$|f(x_n, y_n)| = |f(r_n \cdot \cos(\varphi_n), r_n \cdot \sin(\varphi_n))|$$

$$\underset{\text{dans notre exemple}}{=} \left| \frac{r_n^2 \cos(\varphi_n)^2 \cdot r_n \sin(\varphi_n)}{r_n^2} \right|$$

$$= |r_n \cdot \cos(\varphi_n)^2 \cdot \sin(\varphi_n)| \leq r_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

cette borne est vraie pour toutes les suites φ_n

$\exists C$, t.q. $\forall \varphi$ ($C = 1$ ici)

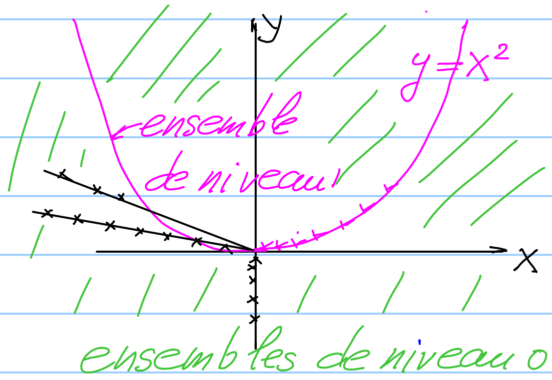
Prolongement par continuité (voir Analyse I)

La fonction

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{pour } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{pour } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exemple 4 (important ! il faut tester toutes les suites, c-à-d toutes les approches)



$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{pour } y = x^2 \\ 0 & \text{pour } y \neq x^2. \end{cases}$$

On a que $\forall \varphi \in [0, 2\pi[$

$$\lim_{r \to 0+} f(r\cdot\cos(\varphi), r\cdot\sin(\varphi)) = 0$$ (donc toute approche avec φ fixe)

mais la limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ n'existe pas !, car

pour une suite de la forme (x_n, x_n^2) telle que $x_n \neq 0$ $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ on a

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, x_n^2) = 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \neq 0.$$