EPFL
Section PH

Peter Wittwer
13 mars 2025

Analyse avancée II – Corrigé de la série 4A

Échauffement

L'intérieur $\mathring{X}$ de X est l'ensemble vide. L'adhérence de X est l'ensemble

$$\bar{X} = \left\{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 \leq 1\right\}.$$

Donc on a pour le bord $\partial X = \bar{X} \setminus \mathring{X} = \bar{X}$. L'ensemble des points isolés est l'ensemble vide, et l'ensemble des points d'accumulation est donc aussi égal à $\bar{X}$.

Exercice 1.

L'ensemble des points d'accumulation consiste des points dans $\mathring{X}$ ainsi que des points du bord de X qui ne sont pas des points isolés. Pour $a \in \mathring{X}$ il existe par définition un $r > 0$ telle que la boule ouverte $B(x, r) \subset \mathring{X} \subset X$. On considère pour tout entier $k \geq 0$ et $r_k = \dfrac{r}{k+1}$ la boule ouverte $B(a, r_k) \subset B(x, r) \subset \mathring{X} \subset X$ et choisit $x_k \in B(a, r_k) \setminus \{a\}$. Par définition de la boule ouverte on a $\|x_k - a\| \leq r_k$ et donc $\lim\limits_{k \to \infty} \|x_k - a\| = 0$ ce qui par définition de la limite veut dire que $\lim\limits_{k \to \infty} x_k = a$. Pour les points a non isolés du bord de X on choisit pour tout entier $k \geq 0$ et $r_k = \dfrac{1}{k+1}$ la boule ouverte $B(a, r_k)$. Par définition des points du bord on a que l'intersection $I_k = B(a, r_k) \cap X \subset X$ est non-vide. Si $a \notin X$ on choisit $x_k \in I_k \subset X$ quelconque. Si $a \in X$, alors $a \in I_k$, mais puisque a n'est pas un point isolé du bord $I_k \subset X$ doit contenir un point $x_k \neq a$, car $I_k = \{a\}$ veut dire par définition que a est isolé. De nouveau, par construction, $\lim\limits_{k \to \infty} \|x_k - a\| = 0$ ce qui par définition de la limite veut dire que $\lim\limits_{k \to \infty} x_k = a$.

Exercice 2.

Soit $(x_k)_{k \geq 0}$ une suite convergente dans $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire telle qu'il existe $a \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\lim_{k \to \infty} x_k = a.$$

Par définition ceci veut dire que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe k_0 tel que pour tout $k \geq k_0$, $\|x_k - a\| \leq \varepsilon$. Soit donc $\varepsilon = 1$ et k_0 tel que pour tout $k \geq k_0$, $\|x_k - a\| \leq 1$, et soit

$$C = \max\left\{\|x_0\|, \ldots, \|x_{k-1}\|, 1 + \|a\|\right\}$$

Alors pour tout $k \geq 0$ on a $\|x_k\| \leq C$, car par définition de C

$$\|x_k\| \leq C \text{ pour } k = 0, \ldots, k_0 - 1$$

et, en utilisant l'inégalité triangulaire, on a pour $k \geq k_0$

$$\|x_k\| \leq \|(x_k - a) + a\| \leq \|a\| + \|x_k - a\| \leq \|a\| + 1.$$

Par définition de C on a donc aussi dans ce deuxième cas que $\|x_k\| \leq C$. La suite est donc bornée car pour tout $k \geq 0$, $x_k \in B(0, C)$.

Exercice 3.

i) On démontre les bornes entre la norme $\| \ \|_2$ et la norme $\| \ \|_1$ par récurrence sur n.

i) Pour $n = 1$ on a pour $x = (x_1) \in \mathbb{R}^1 \equiv \mathbb{R}$ que $\|x\|_1 = \|x\|_2 = |x_1|$ et les bornes sont donc trivialement satisfaites.

ii) Soit maintenant $n > 1$ et supposons que pour $y = (x_1, \ldots, x_{n-1})^T \in \mathbb{R}^{n-1}$ les bornes soient satisfaites, c'est-à-dire :

$$\frac{1}{\sqrt{n-1}}\, ||y||_1 \leq ||y||_2 \leq \|y\|_1 \ .$$

Alors on a, pour $x = (x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}\|x\|_1 &= \sum_{i=1}^{n} |x_i| = \|y\|_1 + |x_n| = \sqrt{\|y\|_1^2 + |x_n|^2 + 2\|y_1\||x_n|} \geq \sqrt{\|y\|_1^2 + |x_n|^2} \\ &\geq \sqrt{\|y\|_2^2 + |x_n|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 + |x_n|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \|x\|_2.\end{aligned}$$

ainsi que,

$$\begin{aligned}\sqrt{n}\, \|x\|_2 = \sqrt{n}\, \sqrt{\|y\|_2^2 + x_n^2} = \sqrt{n\, \|y\|_2^2 + n\, x_n^2} &\geq \sqrt{\frac{n}{n-1}\, \|y\|_1^2 + n\, x_n^2} \\ &= \sqrt{\|y\|_1^2 + \frac{1}{n-1}\, \|y\|_1^2 + x_n^2 + (n-1)\, x_n^2} \\ &= \sqrt{(\|y\|_1 + |x_n|)^2 - 2\|y\|_1|x_n| + \frac{1}{n-1}\, \|y\|_1^2 + (n-1)\, x_n^2} \\ &= \sqrt{(\|y\|_1 + |x_n|)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\, \|y\|_1 - \sqrt{n-1}\, |x_n|\right)^2} \\ &\geq \sqrt{(\|y\|_1 + |x_n|)^2} = \|y\|_1 + |x_n| = \|x\|_1 \ .\end{aligned}$$

Une démonstration plus élégante mais moins directe utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz que nous verrons dans la série 6B, exercice 1. On peut en effet considérer la norme $\|x\|_1$ comme le produit scalaire entre le vecteur $v_1 = (|x_1|, \ldots, |x_n|)^T$ et le vecteur $v_2 = (1, \ldots, 1)^T$. Si on a a déjà démontré l'inégalité de Cauchy-Scharz on obtient alors directement le résultat souhaité, car $\|x\|_1 = \langle v_1, v_2\rangle \leq \|v_1\|_2\, \|v_2\|_2 = \|x\|_2\, \sqrt{n}$.

ii) Les bornes entre la norme $\| \ \|_2$ et la norme $\| \ \|_\infty$ sont plus faciles à démontrer. On a :

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \leq \sqrt{n\, \max\left\{x_1^2, \ldots, x_n^2\right\}} = \sqrt{n}\, \max\big\{|x_1|, \ldots, |x_n|\big\} = \sqrt{n}\, \|x\|_\infty$$

ainsi que, avec $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $|x_{i_0}| = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$.

$$\|x\|_\infty = |x_{i_0}| = \sqrt{x_{i_0}^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \|x\|_2 \ .$$

Exercice 4.
Soit a un point quelconque de $\mathbb{R}^n$, et $|| \; ||$ une norme. Il faut montrer que pour toute suite $(x_k)_{k\geq 0}$ dans $\mathbb{R}^n$, $x_k \neq a$, telle que $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$ (donc par définition telle que $\lim\limits_{k\to\infty} \|x_k - a\|_2 = 0$), on a :

$$\lim_{k\to\infty} \|x_k\| = \|a\|.$$

Pour commencer, pusique toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes, on a $\|x_k-a\| \leq C\,\|x_k-a\|_2$ pour une certaine constante $C > 0$ et donc $\lim\limits_{k\to\infty} \|x_k - a\| = 0$ pour toutes les suites sous considération. De l'inégalité triangulaire on obtient :

$$\begin{aligned}\|x_k\| - \|a\| &= \|x_k - a + a\| - \|a\| \\ &\leq \|x_k - a\| + \|a\| - \|a\| = \|x_k - a\|\end{aligned}$$

ainsi que

$$\begin{aligned}\|a\| - \|x_k\| &= \|a - x_k + x_k\| - \|x_k\| \\ &\leq \|a - x_k\| + \|x_k\| - \|x_k\| = \|a - x_k\|\end{aligned}$$

et donc

$$\big|\, \|x_k\| - \|a\| \,\big| \leq \|x_k - a\| \ ,$$

de sorte que

$$0 \leq \lim_{k\to\infty} \big|\, \|x_k\| - \|a\| \,\big| \leq \lim_{k\to\infty} \|x_k - a\| = 0 \ .$$

Toute norme définit donc une fonction continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 5.

- [x] l'ensemble D n'est ni fermé, ni borné.
- [ ] l'ensemble D est borné mais pas fermé.
- [ ] l'ensemble D est fermé mais pas borné.
- [ ] l'ensemble D est fermé et borné.

En effet, l'expression est bien définie si $4 - (x + y)^2 > 0$ ce qui est équivalent à

$$-2 < x + y < 2 \ .$$

Les équations $-2 = x + y \Leftrightarrow \; y = -2 - x$ et $x + y = 2 \Leftrightarrow y = 2 - x$ définissent deux droites parallèles et D est l'ensemble des points entre ces deux droites. L'ensemble est donc ouvert et non borné.

Exercice 6.
Pour la vitesse instantanée on a $f'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 1)^T$ avec $||f'(t)|| = \sqrt{(-\sin(t))^2 + (\cos(t))^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, et on trouve pour la longeur du chemin

$$l = \int_0^{2\pi} ||f'(t)||\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\, dt = 2\sqrt{2}\pi.$$

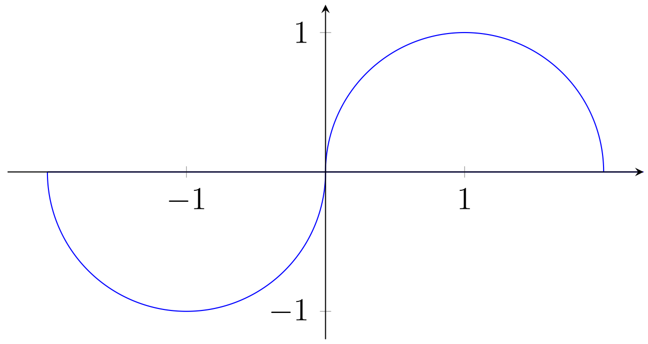
Exercice 7.

i) Les fonctions $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f_1(t) = (1 + \cos(t), \sin(t))^T$, $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f_2(t) = (-1 - \cos(t), \sin(t))^T$ et $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f_3(t) = (-2 - 2\pi + t, 0)^T$ sont differentiable sur $\mathbb{R}$ et donc en particulier continues sur $\mathbb{R}$. Puisque $f_1(\pi) = f_2(\pi)$ et $f_2(2\pi) = f_3(2\pi)$, on a

$$\lim_{t\to\pi^-} f(t) = \lim_{t\to\pi^+} f(t) = f(\pi) \quad \text{et} \quad \lim_{t\to2\pi^-} f(t) = \lim_{t\to2\pi^+} f(t) = f(2\pi)$$

ce qui montre que la fonction f est continue.

ii) La trace de f est (le segment $[-2, 2]$ fait partie de la trace)



iii) La fonction f n'est pas injective car on a :

$$f(0) = f(2\pi + 4) = (2, 0)$$

ou encore

$$f(\pi) = f(2\pi + 2) = (0, 0)\ .$$

iv) La fonction f n'est pas différentiable à $t = 2\pi$, mais f_1, f_2 et f_3 sont différentaiables. On a :

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{\pi} ||f_1'(t)||\, dt + \int_{\pi}^{2\pi} ||f_2'(t)||\, dt + \int_{2\pi}^{2\pi+4} ||f_3'(t)||\, dt \\ &= \int_0^{\pi} 1\, dt + \int_{\pi}^{2\pi} 1\, dt + \int_{2\pi}^{2\pi+4} 1\, dt \\ &= 2\pi + 4\ . \end{aligned}$$

Exercice 8.

- ☐ $(x, y, z) = (t\cos(2\pi t), 2t\sin(2\pi t), t)$ avec $t \in [0, 5]$
- ☐ $(x, y, z) = (t\cos(2\pi t), t\sin(2\pi t), t)$ avec $t \in [0, 5]$
- ■ $(x, y, z) = (2t\cos(2\pi t), t\sin(2\pi t), t)$ avec $t \in [0, 5]$
- ☐ $(x, y, z) = (2\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), t)$ avec $t \in [0, 5]$