Peter Wittwer

14 mars 2025

Analyse avancée II – Série 4B

Échauffement. (Linéarité)

Soient p, q et r des fonctions continues sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ et soit l'équation différentielle linéaire du deuxième ordre $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$, ainsi que l'équation linéaire homogène associée, $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$. Montrer que :

i) si y_1 et y_2 sont deux solutions quelconques de l'équation sur I, alors pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ telles que $\alpha + \beta = 1$, la fonction $y = \alpha y_1 + \beta y_2$ est aussi solution de l'équation sur I.

ii) si y_1 et y_2 sont deux solutions quelconques de l'équation sur I, alors la fonction $y = y_1 - y_2$ est solution de l'équation linéaire homogène associée sur I.

iii) l'ensemble des solutions de l'équation linéaire homogène associée est un espace vectoriel.

Exercice 1. (Réduction de l'ordre)

i) Soient p et q des fonctions continues sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$, et soit y_1 est une solution non nulle de l'équation différentielle linéaire du deuxième ordre $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ sur I. Trouver l'équation différentielle du première ordre que l'on obtient si on pose $y = U\, y_1$, avec U une primitive d'une nouvelle fonction inconnue u (méthode de la réduction de l'ordre, voir le cours).

ii) Soit l'équation différentielle $y'' + y = 0$ et soit $y_1(x) = \sin(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Utiliser la méthode de la réduction de l'ordre pour trouver une deuxième solution linéairement indépendante de $y_1(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2. (Deuxième ordre à coefficients constants)

Soit l'équation différentielle linéaire du deuxième ordre à coefficients constants $ay''+by'+cy = 0$.

i) Montrer que l'idée de la réduction de l'ordre permet de trouver la solution y_2 pour le deuxième cas du §1.5.2 du cours.

ii) Montrer que l'expression donnée pour le troisième cas du §1.5.2 du cours s'obtient par la formule d'Euler (c.-à-d. $\forall \phi \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{i\phi} = \cos(\phi) + i \sin(\phi)$) à partir des deux solutions exponentielles complexes.

Exercice 3. (Wronskien)

Soit l'équation différentielle linéaire du deuxième ordre $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, avec p et q des fonctions continues sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$. Soient y_1 et y_2 deux solutions quelconques de l'équation sur I, et soit $w = y_1 y_2' - y_1' y_2$ le Wronskien des deux solutions.

i) Montrer que si les deux solutions y_1 et y_2 sont linéairement dépendantes, alors $\forall x \in I$ $w(x) = 0$.

ii) Montrer que s'il existe $x_0 \in I$ tel que $w(x_0) = 0$, alors $\forall x \in I$ $w(x) = 0$ et les solutions y_1 et y_2 sont linéairement dépendantes.

iii) Montrer que la dimension de l'espace vectoriel des solutions est deux.