EPFL
Section PH

Peter Wittwer
13 mars 2025

Analyse avancée II – Série 4A

Échauffement. (Propriétés d'ensembles)

Soit $X = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 < 1\}$. Trouver l'intérieur $\mathring{X}$ et l'adhérence $\bar{X}$ de X. Trouver le bord ∂X de X, les points isolés de X, ainsi que les points d'accumulation de X.

Exercice 1. (Points d'accumulation)

Soit $X \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble non vide et soit A l'ensemble des points d'accumulation de X. Montrer que pour tout $a \in A$ il existe un suite $(x_k)_{k \geq 0}$ d'éléments de X, telle que $\forall k\ x_k \neq a$, et telle que $\lim\limits_{k \to \infty} x_k = a$.

Exercice 2. (Suites dans $\mathbb{R}^n$)

Montrer que toute suite convergente dans $\mathbb{R}^n$ est bornée.

Exercice 3. (Normes)

Montrer que pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$

i) $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1$ *ii)* $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\, \|x\|_\infty$

Exercice 4. (Continuité des normes)

Montrer que toute norme sur $\mathbb{R}^n$ est une fonction continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 5. (QCM : ensembles)

Soit la fonction $f \colon D \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \ln\bigl(4 - (x + y)^2\bigr)$$

où $D \subset \mathbb{R}^2$ est le plus grand sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ sur lequel l'expression $f(x, y)$ est bien définie. Alors :

- [ ] l'ensemble D n'est ni fermé, ni borné.
- [ ] l'ensemble D est borné mais pas fermé.
- [ ] l'ensemble D est fermé mais pas borné.
- [ ] l'ensemble D est fermé et borné.

suite et Ex. 6 - 8 au verso.

Exercice 6. (Longueur d'un chemin)

Trouver la longueur du chemin $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $f(t) = (\cos(t), \sin(t), t)^T$.

Exercice 7. (Chemins)

Soit la fonction $f \colon [0, 2\pi + 4] \to \mathbb{R}^2$,

$$f(t) = \begin{cases} (1 + \cos(t), \sin(t))^T & \text{si } t \in [0, \pi), \\ (-1 - \cos(t), \sin(t))^T & \text{si } t \in [\pi, 2\pi), \\ (-2 - 2\pi + t, 0)^T & \text{si } t \in [2\pi, 2\pi + 4]. \end{cases}$$

i) Montrer que f définit un chemin, c'est-à-dire montrer que f est une fonction continue.

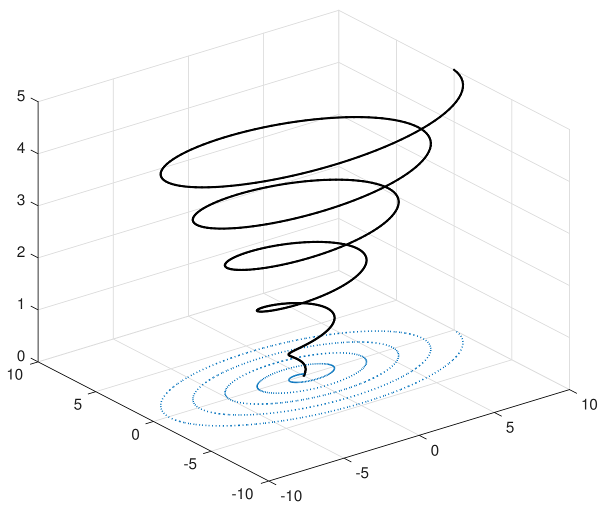
ii) Esquisser la trace de f.

iii) Est-ce que la fonction f est injective ?

iv) Calculer la longueur du chemin f.

Exercice 8. (Paramétrisations)

Soient une courbe ainsi que sa projection sur le plan x-y illustrées dans la figure suivante :



Laquelle parmi les suivantes pourrait être une paramétrisation de cette courbe ?

- ☐ $(x, y, z) = (t\cos(2\pi t), 2t\sin(2\pi t), t)$ avec $t \in [0, 5]$
- ☐ $(x, y, z) = (t\cos(2\pi t), t\sin(2\pi t), t)$ avec $t \in [0, 5]$
- ☐ $(x, y, z) = (2t\cos(2\pi t), t\sin(2\pi t), t)$ avec $t \in [0, 5]$
- ☐ $(x, y, z) = (2\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), t)$ avec $t \in [0, 5]$