

Définition (continuité, ε - δ)

Soit $D \subset \mathbb{R}^n$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$, et $\underline{x}^* \in D$. Alors f est dite continue en $\underline{x}^*$, si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ t.q. } \forall \underline{x} \in D$

$$\|\underline{x} - \underline{x}^*\| \leq \delta \Rightarrow \|f(\underline{x}) - f(\underline{x}^*)\| \leq \varepsilon$$

Proposition soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$. Alors $\|\cdot\|$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}^n$.

Démonstration avec ε - δ

Soit $\underline{x}^* \in \mathbb{R}^n$. Alors $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ t.q. } \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n$.

$$(\|\underline{x} - \underline{x}^*\| \leq \delta) \Rightarrow \left| \|\underline{x}\| - \|\underline{x}^*\| \right| \leq \varepsilon. \quad \leftarrow \text{norme dans } \mathbb{R}.$$

car, avec $\delta = \varepsilon$ et la propriété iv) de la norme on a.

$$\left| \|\underline{x}\| - \|\underline{x}^*\| \right| \leq \|\underline{x} - \underline{x}^*\| \leq \delta = \varepsilon. \quad \square$$

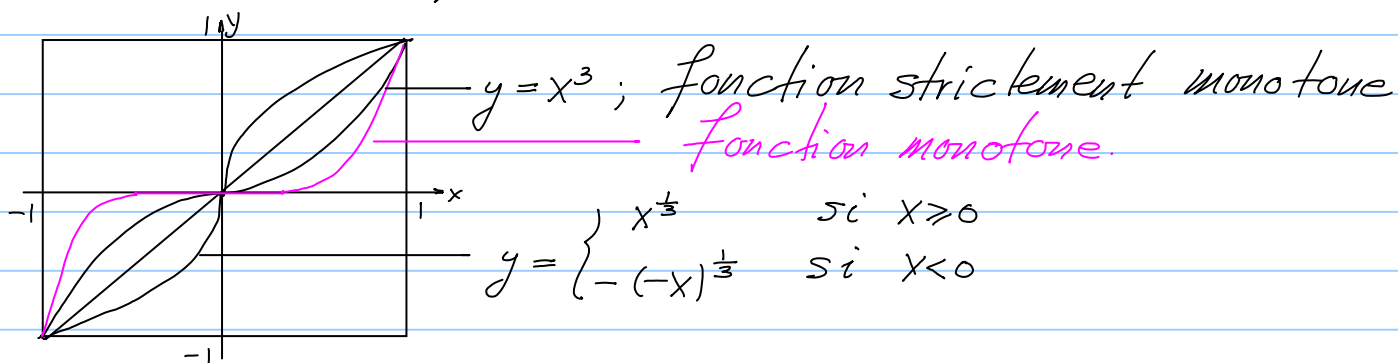
la norme sous étude.

Si dans la définition de la continuité on veut utiliser la norme Euclidienne il faut utiliser qu'il existe $C > 0$ tel que $\forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n, \|\underline{x}\| \leq C \|\underline{x}\|_2$, puis on pose, donné $\varepsilon > 0, \delta = \frac{1}{C} \varepsilon$:

$$\begin{aligned} \left| \|\underline{x}\| - \|\underline{x}^*\| \right| &\leq \|\underline{x} - \underline{x}^*\| \leq C \|\underline{x} - \underline{x}^*\|_2 \leq \\ &\leq C \delta = C \frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon \end{aligned} \quad \square$$

INTERMEZZO

Fonctions réciproques



$$f: [-1, 1] \longrightarrow [-1, 1] \equiv I$$

$$x \longmapsto f(x) = x^3$$

- continue sur I
- dérivable sur I
- continûment dérivable sur I
- monotone
- strictement monotone
- bijective
- $\exists f^{-1}$ (existence d'une fonction réciproque)
- f^{-1} continue sur I .
- f^{-1} n'est pas dérivable en $x=0$ (donc pas dérivable sur I)

Théorème (de la bijection)

Soient I_1 et I_2 deux intervalles fermés, et $f: I_1 \rightarrow I_2$ une fonction continue, strictement monotone et surjective. Alors, f admet une fonction réciproque, $f^{-1}: I_2 \rightarrow I_1$, et f^{-1} est une fonction continue strictement monotone et surjective.

Démonstration: voir Analyse I

Théorème

Soient I_1, I_2 et f comme dans le théorème précédent.
Si de plus f est continument dérivable sur I_1 ,
et si $\forall x \in I_1, f'(x) \neq 0$, alors f^{-1} est continument dérivable sur I_2 .

┌ Démonstration: voir Analyse I ─┐

Remarques:

- $f: [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$, définie par $f(x) = x^3$ satisfait les conditions du théorème de la bijection, mais pas celles du deuxième théorème car $f'(0) = 0$.
- l'exemple standard d'une fonction dérivable en tout point d'un intervalle fermé, mais qui n'est pas continument dérivable est

$$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

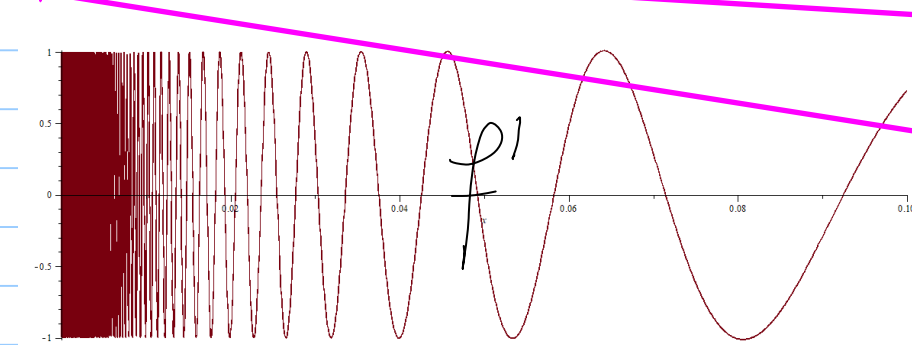
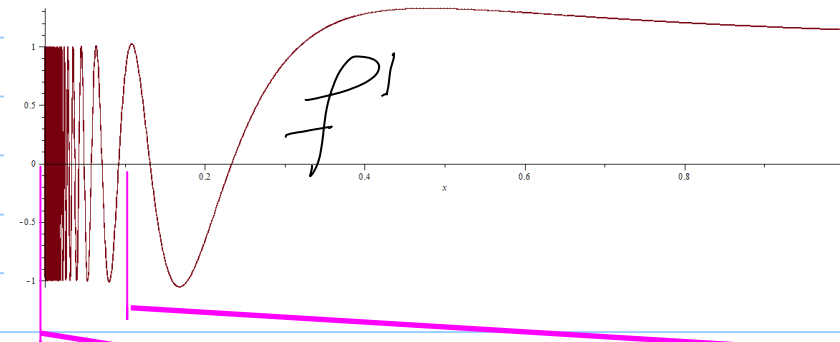
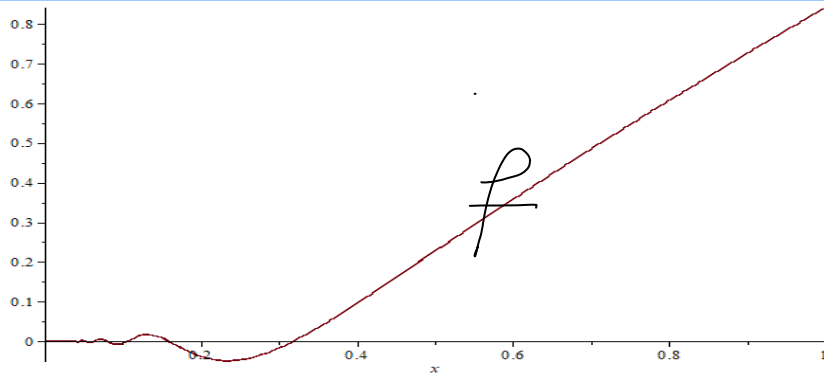
On trouve.
$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$f': [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \cdot \sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x}) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(h \cdot \sin(\frac{1}{h}) \right) = 0$$

mais $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)$ n'existe pas.



INTERMEZZO

3. Fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^m$

Notation: $f: D \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}$ transposé
 $x \longmapsto f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))^T$

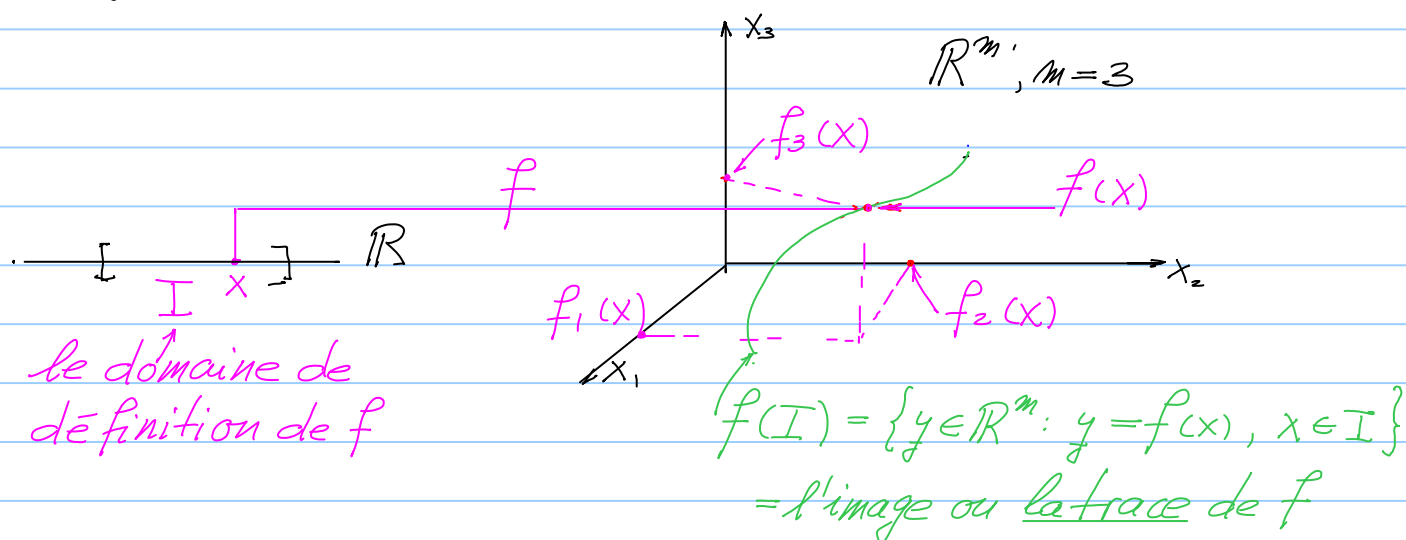
avec $f_i: D \longrightarrow \mathbb{R}$, $i=1, \dots, m$ les composantes de f .

3.0. Fonctions continues

Définition: une fonction continue $f: I \longrightarrow \mathbb{R}^m$, avec $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle (fermé) est appelée un chemin, ou une courbe paramétrée dans $\mathbb{R}^m$.

Remarque: la proposition 2.6 implique qu'une fonction $f = (f_1, \dots, f_m)^T$ est continue en un point $x \in I$ (ou sur I) si et seulement si les fonctions f_i , $i=1, \dots, m$, sont toutes continues en $x \in I$ (ou sur I).

Image d'une fonction $f: I \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle

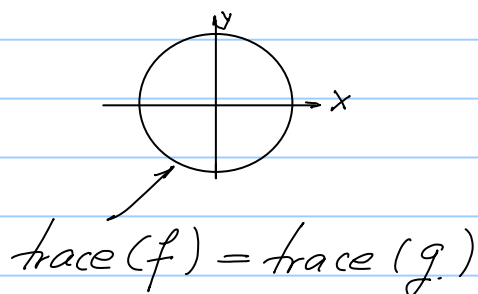


Définition: l'image f s'appelle aussi la trace de f
d'un chemin

Exemple 1 $f: [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$
 $t \longmapsto (\cos(t), \sin(t))^T$

$g: [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$
 $t \longmapsto (\cos(2t), \sin(2t))^T$

$f \neq g$ mais la trace de f = la trace de g .



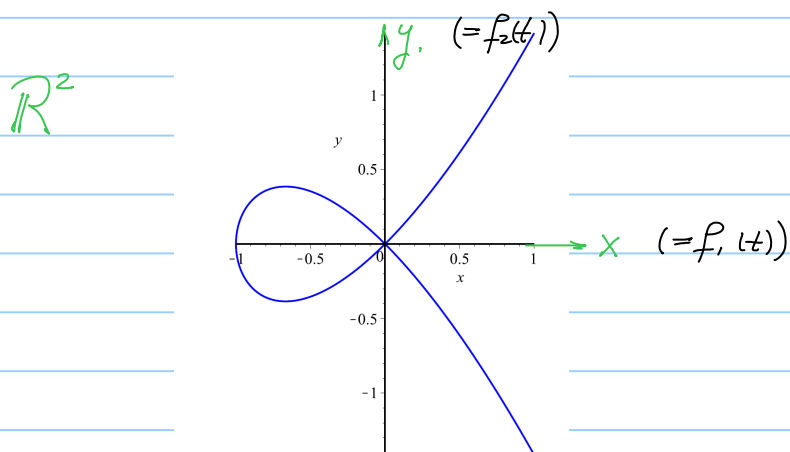
Exemple 2

Soit $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$t \longmapsto f(t) = \left(\underbrace{t^2 - 1}_{f_1(t)}, \underbrace{t^3 - t}_{f_2(t)} \right)^T$$

Trace de f ($\equiv$ image de f) $\subset \mathbb{R}^2$

$$\text{Im}(f) = \{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : (x, y)^T = f(t), t \in \mathbb{R} \}$$

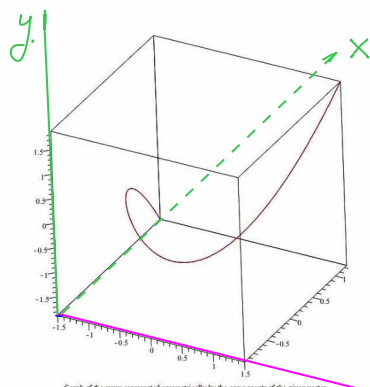


Graphe ($\equiv$ graphique) de f $\subset \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2}_{\Downarrow} \xrightarrow{\text{isomorphe}} \mathbb{R}^3$ (noté $T^1(f)$)

$(t, (x, y)^T)$

On écrit $(t, x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$.

$$T(f) = \{ (t, x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 : (x, y)^T = f(t) \}$$



voir maple ou mws.

Definition:

m est fixe

Soit $\mathcal{C} := \{ \text{tous les chemins dans } \mathbb{R}^m \}$

Deux chemins $f: I_1 \rightarrow \mathbb{R}^m$ et $g: I_2 \rightarrow \mathbb{R}^m$ sont équivalents, $f \sim g$, s'il existe une fonction continue, strictement monotone et surjective $w: I_1 \rightarrow I_2$ telle que $\forall t_1 \in I_1, g(w(t_1)) = f(t_1)$

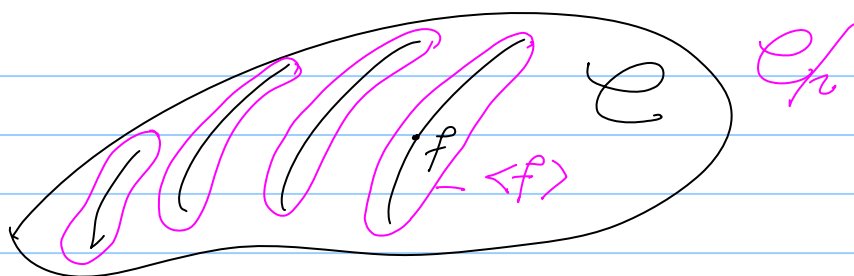
i) réflexive $\forall t_1 \in I_1, \overbrace{f(w(t_1))}^{w(t_1)} = f(t_1)$ (choisir $w(t_1) = t_1$).
 $\underbrace{f \sim f}$

ii) symétrique $\forall t_1 \in I_1, g(w(t_1)) = f(t_1) \Leftrightarrow \forall t_2 \in I_2, \underbrace{f(w^{-1}(t_2))}_{g \sim f} = g(t_2)$

iii) transitive $\forall t_1 \in I_1, \underbrace{g(w_1(t_1))}_{f \sim g \text{ avec } w_1} = f(t_1)$ et $\forall t_2 \in I_2, \underbrace{h(w_2(t_2))}_{g \sim h \text{ avec } w_2} = g(t_2)$

$$\Rightarrow \forall t_1 \in I_1, \underbrace{h(w_2(w_1(t_1)))}_{=(w_2 \circ w_1)(t_1)} = g(w_1(t_1)) = f(t_1)$$

ce qui veut dire que $f \sim h$ avec $w_2 \circ w_1: I_1 \rightarrow I_3$,
(continue, strictement monotone et surjective).



Definition : une classe d'équivalence de chemins est appelée une courbe continue, et on note $\langle f \rangle$ la classe d'équivalence qui contient f

Terminologie: soit γ une courbe continue. On appelle $f \in \gamma$ aussi une paramétrisation de la courbe continue γ

3.1. Fonctions dérivables (ou différentiables)

Définition (provisoire) :

$$f'(x) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (*)$$

↑
définition "usuelle"
de la dérivée en un point

"moins" entre deux vecteurs

Proposition: soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle (fermé). Une fonction $f: I \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f = (f_1, \dots, f_m)^T$, est dérivable en $x \in I$ (ou sur I) si et seulement si les fonctions f_i , $i=1, \dots, m$ sont toutes dérivables en $x \in I$ (ou sur I)

Explication

$$f'(x) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(x+h) - f(x))$$

↑
par définition (*)

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f_1(x+h) - f_1(x)}{h}, \dots, \frac{f_m(x+h) - f_m(x)}{h} \right)^T$$

↑
calcul dans l'espace vectoriel

$$= \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_1(x+h) - f_1(x)}{h}, \dots, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_m(x+h) - f_m(x)}{h} \right)^T$$

↑
ceci est vrai par la proposition 2.6.

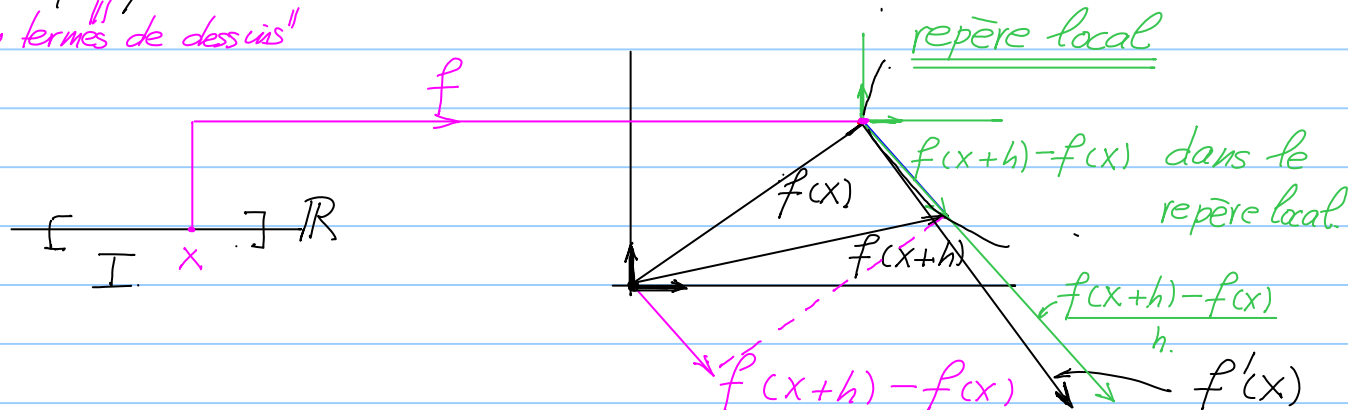
$$= (f'_1(x), \dots, f'_m(x))^T$$

↑
par la définition de la dérivée pour $f_1, \dots, f_m$.

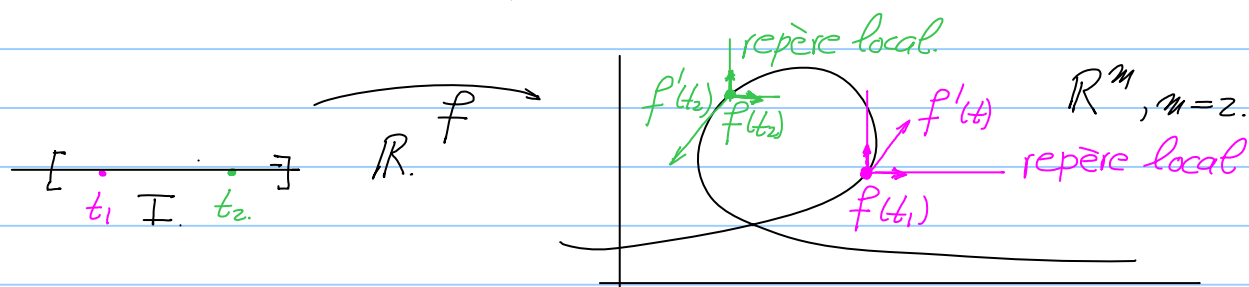
Interprétation: si on interprète $t \equiv x$ comme le temps et $f(t)$ comme la position d'un objet dans $\mathbb{R}^m$ ($m=3$ par exemple), alors $f'(t)$ est le vecteur de la vitesse instantanée de l'objet au temps t .

Graphiquement (calcul de la limite, $m=2$).

"en termes de dessins"



Remarque: graphiquement, pour illustrer $f'(t)$, on "attache" en $f(t) \in \mathbb{R}^m$ une copie (dite locale) de $\mathbb{R}^m$.



Longueur d'un chemin continûment dérivable

Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$, $a < b$, un chemin continûment dérivable sur $[a, b]$ (c'est-à-dire $f = (f_1, \dots, f_m)^T$ avec $f_i: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions continûment dérivables). Alors sa longueur $l \in \mathbb{R}$ est par définition:

$$l := \int_a^b \|f'(t)\| dt$$

Annotations:
 - "on suppose f' continue" points to the integrand.
 - "la norme est une fonction continue de $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ " points to the norm symbol.
 - "la norme Euclidienne" points to the norm symbol.

Remarque: comme sur l'ensemble des chemins continus on peut définir des classes d'équivalence sur l'ensemble des chemins continûment dérivables (demander que $w: I_1 \rightarrow I_2$, qui définit l'équivalence soit de classe C^1 et tel que $\forall t_i \in I_1$, $w'(t_i) \neq 0$). Les classes d'équivalence sont appelées courbes de classe C^1 .

Remarque: soit γ une courbe de classe C^1 . Alors

$$|\gamma| := \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt \quad (\text{longueur de } \gamma)$$

avec $\gamma \in \gamma$ une paramétrisation continûment dérivable quelconque. Différentes paramétrisations donnent la même longueur, car changer la paramétrisation de la courbe revient à faire un changement de variables dans l'intégrale Le vérifier!