

$$X := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*, y = 0 \right\}.$$

$$\overset{\circ}{X} = \emptyset$$

$$-x^2 \leq 1$$

ensemble des points isolés de $X = \cancel{X}$.

ensemble des points d'accumulation de $X = \{ (0, 0) \}$.

$$\bar{X} = \cancel{X} \cup \{ (0, 0) \}.$$

$$\partial X = \overline{\cancel{X}}$$

2.4. Suites dans $\mathbb{R}^n$

Définition: on appelle suite de points de $\mathbb{R}^n$ (ou suite dans $\mathbb{R}^n$) toute application $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$

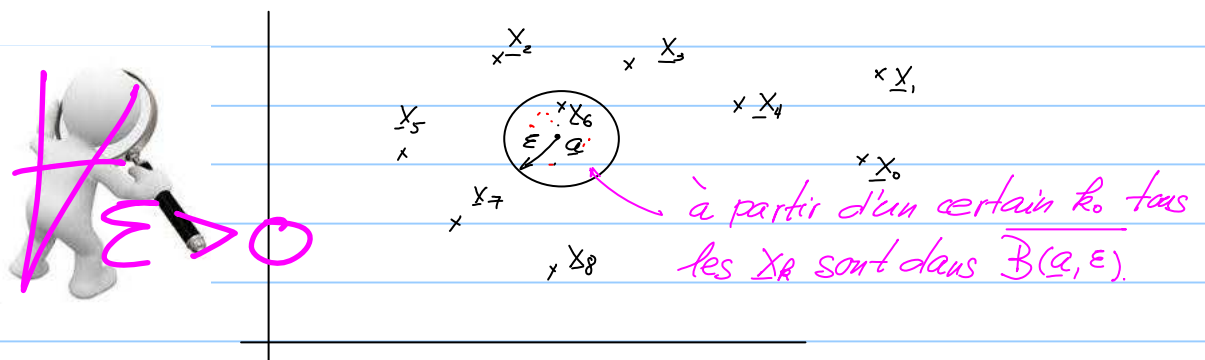
Notation (pour les suites): on pose $\underline{x}_k = f(k)$ et on écrit $(\underline{x}_k)_{k \geq 0}$ ou encore $\underline{x}_0, \underline{x}_1, \dots$ pour les suites

Définition: une suite $(\underline{x}_k)_{k \geq 0}$ dans $\mathbb{R}^n$ est convergente et admet pour limite (ou converge vers) $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$, et l'on écrit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \underline{x}_k = \underline{a},$$

si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq k_0$ on a que $\underline{x}_k \in \overline{B}(\underline{a}, \varepsilon)$
c.-à-d. $d(\underline{x}_k, \underline{a}) = \|\underline{x}_k - \underline{a}\| \leq \varepsilon$.

Illustration



Définition: une suite $(\underline{x}_k)_{k \geq 0}$ dans $\mathbb{R}^n$ est bornée, s'il existe $C > 0$, tel que pour tout $k \geq 0$
 $\underline{x}_k \in \overline{B}(0, C) \Leftrightarrow d(0, \underline{x}_k) \leq C \Leftrightarrow \|\underline{x}_k\| \leq C$

Autres notions identiques à Analyse I

- définition d'une suite divergente
- définition d'une suite de Cauchy
- sous-suites, Théorème de B.W. (Bolzano-Weierstrass)
- le fait que $\mathbb{R}^n$ est complet (toute suite de Cauchy d'éléments de $\mathbb{R}^n$ converge vers un élément de $\mathbb{R}^n$) ($\mathbb{Q}^n$ n'est pas complet)
- $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel normé complet
= espace de Banach

Théorème: une suite (x_k) , $x_k \in \mathbb{R}^n$ est convergente si et seulement si elle est de Cauchy.

Démonstration: voir la série 7B

Théorème: (Bolzano-Weierstrass pour $\mathbb{R}^n$)

Soit $(x_k)_{k \geq 0}$ une suite bornée dans $\mathbb{R}^n$. Alors il existe une sous-suite $(x_{k_j})_{j \geq 0}$ qui est convergente.

Démonstration: voir la série 7B

2.5. Continuité des fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$

Définition (limite = limite épointée) Soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ et x^* un point d'accumulation de $D \subset \mathbb{R}^n$. On dit que f admet pour limite (épointée) $\underline{\ell} \in \mathbb{R}^m$ lorsque x tend vers $x^* \in \mathbb{R}^n$, si pour toute suite $(x_k)_{k \geq 0}$, $x_k \in D \setminus \{x^*\}$ telle que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*$ la suite $(y_k)_{k \geq 0}$, $y_k = f(x_k)$ converge et $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = \underline{\ell}$ (le même $\underline{\ell}$ pour toutes les suites!)

Notation $\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}^*} f(\underline{x}) = \underline{\ell}$
($\underline{x} \neq \underline{x}^*$) $\leftarrow$ si on veut souligner que c'est la limite épointée

Définition: (continuité) une fonction $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^n$ est continue en $\underline{x}^* \in D$, si $\underline{x}^*$ est un point isolé de D , ou si

$$\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}^*} f(\underline{x}) = f(\underline{x}^*) \quad (\text{existence de la limite et égalité avec la valeur } f(\underline{x}^*))$$

2.6. Autres normes sur $\mathbb{R}^n$

Proposition: les fonctions $\|\cdot\|_p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, définies pour $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $p \in [1, \infty[$ par

$$\|\underline{x}\|_p := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}$$

et pour $p = \infty$ par

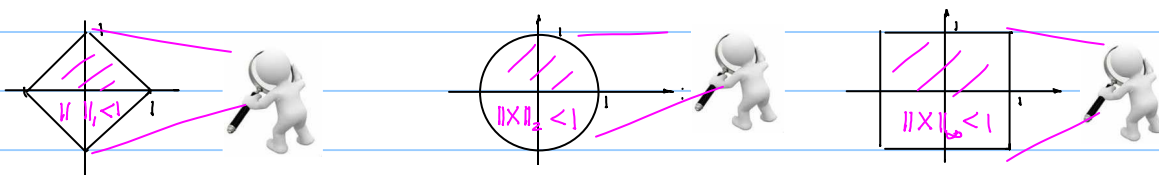
$$\|\underline{x}\|_\infty := \max \{ |x_1|, \dots, |x_n| \}$$

définissent des normes sur $\mathbb{R}^n$.

┌ Démonstration: voir série 8B. ─

Notation: $\|\underline{x}\|_2 \equiv \|\underline{x}\|$ (la norme Euclidienne)

Illustration:



Boule ouverte centrée en zéro de rayon $r=1$, dans les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$

Estimation d'une norme par une autre

$n=1$: $\|\underline{x}\|_2 = \|\underline{x}\|_\infty = \|\underline{x}\|_1$, même chose à chaque fois

$n=2$: soit $\underline{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors :

$$\textcircled{1} \quad \|\underline{x}\|_1 = |x| + |y| = \sqrt{x^2 + y^2 + 2|x||y|} \geq \sqrt{x^2 + y^2} = \|\underline{x}\|_2$$

$$\textcircled{2} \quad \sqrt{2} \|\underline{x}\|_2 = \sqrt{2} \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2x^2 + 2y^2} = \sqrt{(|x| + |y|)^2 + \underbrace{(|x| - |y|)^2}_{\geq 0}} \geq$$

$$\text{Donc : } \frac{1}{\sqrt{2}} \|\underline{x}\|_1 \stackrel{\textcircled{2}}{\leq} \|\underline{x}\|_2 \stackrel{\textcircled{1}}{\leq} \|\underline{x}\|_1 \quad \Rightarrow |x| + |y| = \|\underline{x}\|_1$$

$$(\Leftrightarrow \|\underline{x}\|_2 \stackrel{\textcircled{1}}{\leq} \|\underline{x}\|_1 \stackrel{\textcircled{2}}{\leq} \sqrt{2} \|\underline{x}\|_2)$$

Définition: deux normes $\|\cdot\|_a$ et $\|\cdot\|_b$ sur un espace vectoriel V sont dites équivalentes, s'il existe des constantes $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ telles que pour tout $\underline{x} \in V$

$$C_1 \|\underline{x}\|_a \leq \|\underline{x}\|_b \leq C_2 \|\underline{x}\|_a$$

Théorème: sur $\mathbb{R}^n$ toutes les normes sont équivalentes
et en particulier, $\forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \|\underline{x}\|_1 \leq \|\underline{x}\|_2 \leq \|\underline{x}\|_1$$

$$\|\underline{x}\|_\infty \leq \|\underline{x}\|_2 \leq \sqrt{n} \|\underline{x}\|_\infty$$

Voir la série 4A

Proposition 2.6 soit $(\underline{x}_k)_{k \geq 0}$, $\underline{x}_k = (x_{k,1}, \dots, x_{k,n}) \in \mathbb{R}^n$
une suite dans $\mathbb{R}^n$ et $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$.
Alors:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \underline{x}_k = \underline{a} \iff \lim_{k \rightarrow \infty} x_{k,i} = a_i, \quad i=1, \dots, n.$$

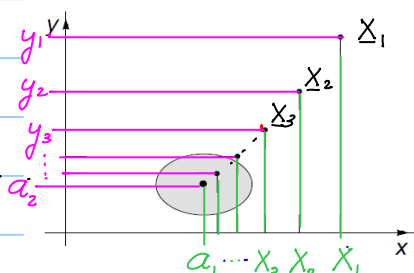
définie avec la
norme Euclidienne:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists k_0, \text{ t.q. } \forall k \geq k_0$$

$$\|\underline{x}_k - \underline{a}\| \leq \varepsilon.$$

convergence des suites
des composantes

Illustration ($n=2$, $\underline{x}_k = (x_{k,1}, x_{k,2})$, $\underline{a} = (a_1, a_2)$).



Démonstration

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad |x_{k,i} - a_i| &\leq \max_i |x_{k,i} - a_i| = \|\underline{x}_k - \underline{a}\|_\infty \leq \\ &\leq \|\underline{x}_k - \underline{a}\|_2 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftarrow \quad \|\underline{x}_k - \underline{a}\|_2 &\leq \|\underline{x}_k - \underline{a}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_{k,i} - a_i| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \\ &\quad \text{un nombre fini de termes } \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0, \forall i \end{aligned}$$

Définition (continuité, ε - δ)

Soit $D \subset \mathbb{R}^n$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$, et $\underline{x}^* \in D$. Alors f est dite continue en $\underline{x}^*$, si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, t.q.
 $\forall \underline{x} \in D$

$$\|\underline{x} - \underline{x}^*\| \leq \delta \Rightarrow \|f(\underline{x}) - f(\underline{x}^*)\| \leq \varepsilon$$

Remarques:

- f est continue en $\underline{x}^*$ indépendamment du choix des normes dans $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$. Pourquoi?
- on devrait s'attendre que la bonne définition serait de demander $0 < \|\underline{x} - \underline{x}^*\| \leq \delta$ (comme pour la limite épointée), mais pour les points d'accumulation $\in D$ ceci ne change pas la définition, car $f(\underline{x}) - f(\underline{x}^*) = 0$ si $\underline{x} = \underline{x}^*$ et l'implication est trivialement satisfaite. De plus, cette définition inclut la continuité pour $\underline{x}^*$ un point isolé. (voir la définition avec les suites).
- on peut écrire $\dots < \varepsilon$ et $\dots < \delta$ au lieu de $\dots \leq \varepsilon$ et $\dots \leq \delta$, sans que ça change la définition (pourquoi?).

Proposition Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$. Alors $\|\cdot\|$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}^n$.

Démonstration avec les suites voir série 4A

Démonstration avec ε - δ

Soit $x^* \in \mathbb{R}^n$. Alors $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, t.g. $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

$$(\|x - x^*\| \leq \delta) \Rightarrow |\|x\| - \|x^*\|| \leq \varepsilon. \quad \leftarrow \text{norme dans } \mathbb{R}.$$

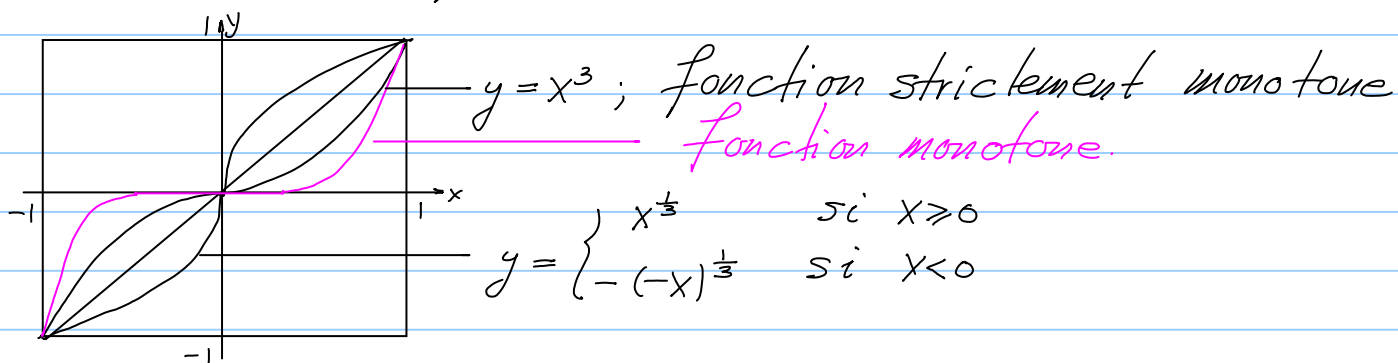
car, avec $\delta = \varepsilon$ et la propriété iv) de la norme on a.

$$|\|x\| - \|x^*\|| \leq \|x - x^*\| \leq \delta = \varepsilon. \quad \square$$

La norme sous étude. Si on veut utiliser la norme Euclidienne, on utilise qu'il existe $C > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^n, \|x\| \leq C \|x\|_2$, puis on pose, donné $\varepsilon > 0$, $\delta = \frac{1}{C} \varepsilon$.

INTERMEZZO

Fonctions réciproques



$$f: [-1, 1] \longrightarrow [-1, 1] \equiv I$$

$$x \longmapsto f(x) = x^3$$

- continue sur I
- dérivable sur I
- continûment dérivable sur I
- monotone
- strictement monotone
- bijective
- $\exists f^{-1}$ (existence d'une fonction réciproque)
- f^{-1} continue sur I .
- f^{-1} n'est pas dérivable en $x=0$ (donc pas dérivable sur I)

Théorème (de la bijection)

Soient I_1 et I_2 deux intervalles fermés, et $f: I_1 \rightarrow I_2$ une fonction continue, strictement monotone et surjective. Alors, f admet une fonction réciproque, $f^{-1}: I_2 \rightarrow I_1$, et f^{-1} est une fonction continue strictement monotone et surjective.

Démonstration: voir Analyse I

Théorème

Soient I_1, I_2 et f comme dans le théorème précédent.
Si de plus f est continument dérivable sur I_1 ,
et si $\forall x \in I_1, f'(x) \neq 0$, alors f^{-1} est continument dérivable sur I_2 .

┌ Démonstration: voir Analyse I ─┐

Remarques:

- $f: [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$, définie par $f(x) = x^3$ satisfait les conditions du théorème de la bijection, mais pas celles du deuxième théorème car $f'(0) = 0$.
- l'exemple standard d'une fonction dérivable en tout point d'un intervalle fermé, mais qui n'est pas continument dérivable est

$$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

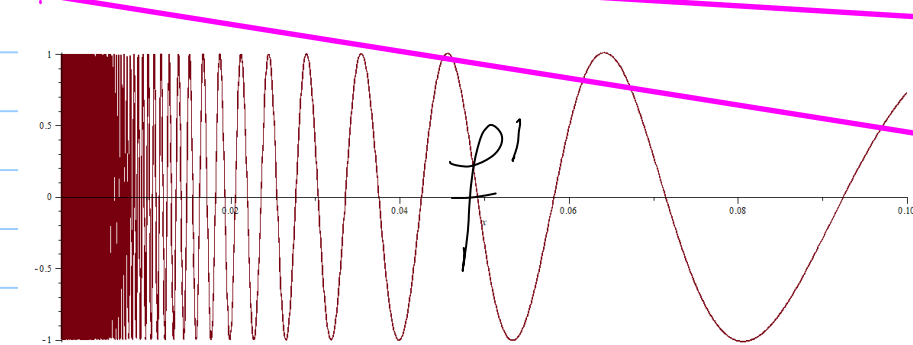
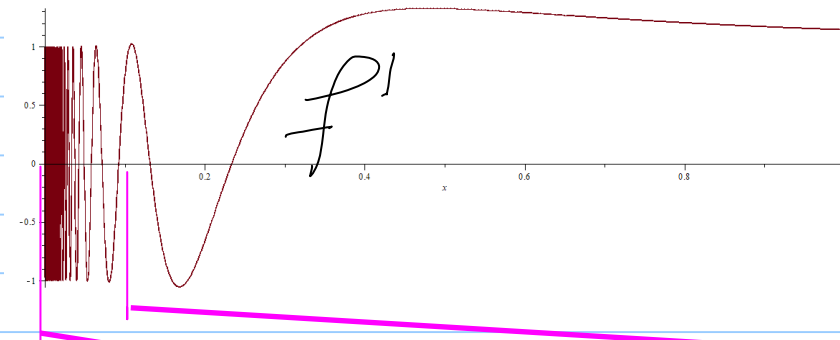
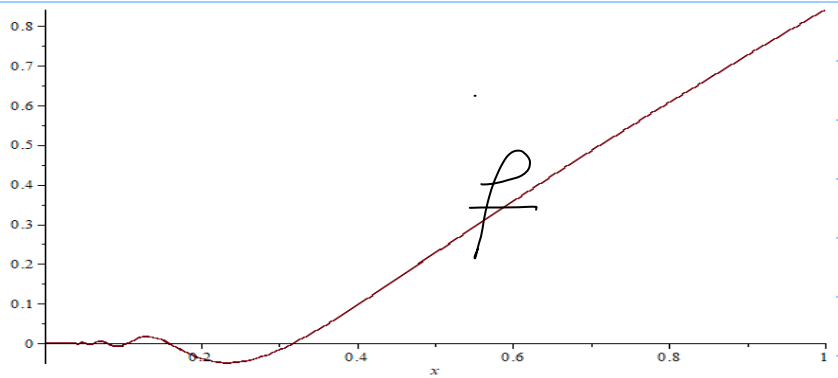
On trouve.
$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$f': [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \cdot \sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x}) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(h \cdot \sin(\frac{1}{h}) \right) = 0$$

mais $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)$ n'existe pas.



INTERMEZZO