2. L'espace $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, rappels, définitions, notations

prérequis

Analyse I :
- produit cartésien d'ensembles
- intervalles ouverts, fermés, etc.
- suites numériques, sous-suites, BW
- suites de Cauchy
- définition de la limite
- définition de la continuité
- définition de la dérivabilité

classes d'équivalence

Algèbre linéaire :
- espace vectoriel
- produit scalaire
- définition d'une norme

2.0. $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ comme ensemble (voir analyse I)

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R} \quad , \ n \text{ facteurs} \quad , \ \times = \text{produit cartésien}$$
$$= \{(x_1, \ldots, x_n) \ : \ x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, n\}$$

n-tuples

Notations: $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ un point de $\mathbb{R}^n$

pour $n = 2$: $\underline{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$

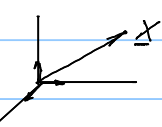
pour $n = 3$: $\underline{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Si aucune confusion n'est possible on écrira aussi simplement $x \in \mathbb{R}^n$ au lieu de $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$.

2.1. $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ comme espace vectoriel (voir algèbre linéaire)

Notation: $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\underline{x}$ un vecteur

$x_i \in \mathbb{R}$ ses coordonnées



souvent on écrira juste x au lieu de $\underline{x}$.

$$\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i \quad , \quad \langle \, , \, \rangle$$ un produit scalaire (voir la série 6B pour le cas général)

$$\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \underline{x}^T \cdot \underline{y}$$

(produit des "matrices")

2.2. $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ est un espace vectoriel normé

La fonction $\| \_ \| : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\| \underline{x} \| := \sqrt{\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

est une norme sur $\mathbb{R}^n$ (= longeur du vecteur $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$)

<u>Remarque</u>: pour $n=1$ c'est simplement la fonction valeur absolue.

<u>Propriétés (définition d'une norme)</u>

i) $\| \underline{x} \| \geq 0$, $\forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n$ et $\| \underline{x} \| = 0 \Leftrightarrow \underline{x} = \underline{0}$ (vecteur zéro)

ii) $\| \lambda \underline{x} \| = |\lambda| \cdot \| \underline{x} \|$, $\forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$

iii) <u>inégalité triangulaire</u>: $\| \underline{x} + \underline{y} \| \leq \| \underline{x} \| + \| \underline{y} \|$, $\forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$

[iv) <u>inégalité triangulaire inverse</u>: $\| \underline{x} - \underline{y} \| \geq \big| \| \underline{x} \| - \| \underline{y} \| \big|$, $\forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$]

car iii) $\Leftrightarrow$ iv)

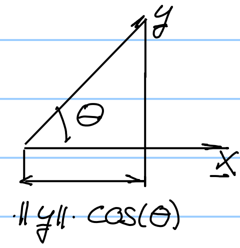
<u>Inégalité de Cauchy-Schwarz</u>

$$|\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle| \leq \| \underline{x} \| \cdot \| \underline{y} \|$$

Démonstration: voir la série 6B

Interprétation géométrique

$$\boxed{\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \|\underline{x}\| \cdot \|\underline{y}\| \cdot \cos(\theta)}$$



Distance entre deux points de $\mathbb{R}^n$

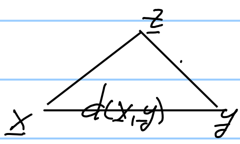
$$d(\underline{x}, \underline{y}) := \|\underline{x} - \underline{y}\|$$

Propriétés (définition d'une distance, $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$)

i) $d(\underline{x}, \underline{y}) \geq 0$, $\forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$ et $d(\underline{x}, \underline{y}) = 0 \Leftrightarrow \underline{x} = \underline{y}$

ii) $d(\underline{x}, \underline{y}) = d(\underline{y}, \underline{x})$, $\forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$

iii) inégalité triangulaire



$$d(\underline{x}, \underline{y}) \leq d(\underline{x}, \underline{z}) + d(\underline{z}, \underline{y}), \quad \forall \underline{x}, \underline{y}, \underline{z} \in \mathbb{R}^n$$

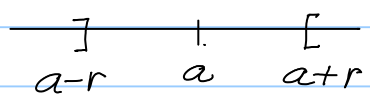
2.3. Sousensembles de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$

Définition: soit $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$. L'ensemble

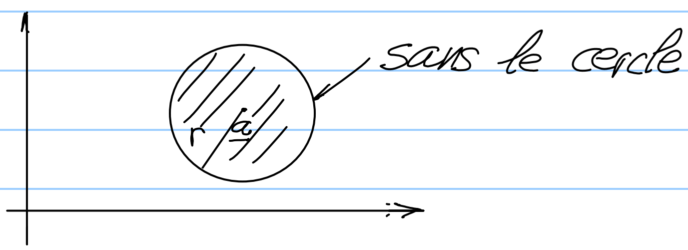
$$B(\underline{a}, r) := \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n : d(\underline{x}, \underline{a}) < r \}$$

est appelée "boule ouverte de centre $\underline{a}$ et rayon r."

$n = 1$:

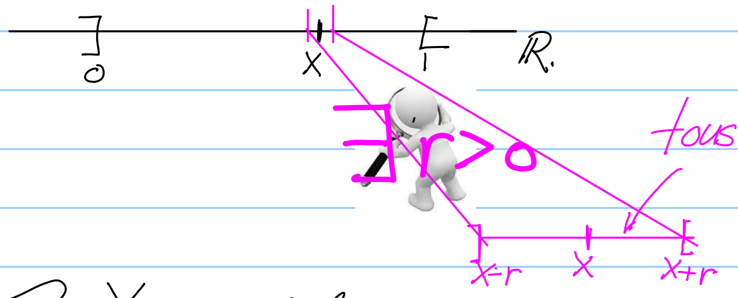


$n = 2$:



Définition: un sousensemble $X \subset \mathbb{R}^n$ est dit ouvert, si $\forall \underline{x} \in X$, $\exists\, r > 0$, tel que $B(\underline{x}, r) \subset X$.

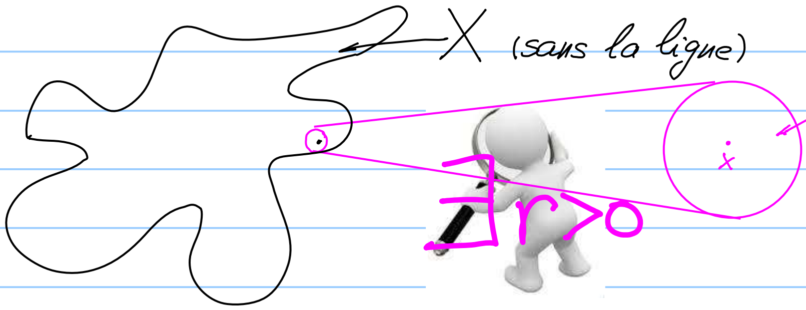
$n=1$: $X =]0,1[\subset \mathbb{R}$ est un sousensemble ouvert de $\mathbb{R}$



tous ces points $\in X$

$$\begin{cases} r = \frac{1-x}{2}, & x \geq \frac{1}{2}. \\ r = \frac{x}{2}, & x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

$n=2$:



$B(x,r) \subset X$ pour un $r>0$ suffisamment petit

Remarque: la boule ouverte de $\mathbb{R}^n$, $B(\underline{a}, r)$ est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Remarque: $\mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$.
ϕ est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$.

"ensemble vide" (rien à contrôler)

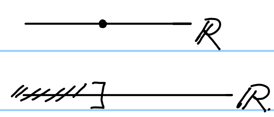
Attention (notation) pour tout ensemble X, $X \subset X$

le symbole $\subset$ ne signifie pas inclusion stricte !

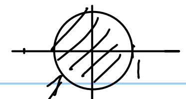
Définition: un ensemble $X \subset \mathbb{R}^n$ est dit fermé si l'ensemble $X^c = \mathbb{R}^n \setminus X$ est ouvert.

Exemples: $X = [0,0] = \{0\} \subset \mathbb{R}$

$X =]-\infty, 0] = \mathbb{R} \setminus]0, \infty[$



$X = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^2 : d(\underline{x}, 0) \leq 1 \}$



avec le cercle

Remarque: $\mathbb{R}^n \setminus \phi = \mathbb{R}^n$ est fermé (car ϕ ouvert) et $\phi = \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^n$ est fermé (car $\mathbb{R}^n$ ouvert) et. ϕ et $\mathbb{R}^n$ sont donc à la fois ouverts et fermés

Définition: l'intérieur $\mathring{X} \subset X \subset \mathbb{R}^n$ est le plus grand sousensemble ouvert contenu dans X, c.-à-d. si $Y \subset X$, Y ouvert, alors $Y \subset \mathring{X}$.

Exemple: $X = [0,1[$, $\mathring{X} =]0,1[$

Définition: l'adhérence $\overline{X} \supset X$, $X \subset \mathbb{R}^n$ est le plus petit sousensemble fermé qui contient X, c.-à-d. si $Y \supset X$, Y fermé, alors $Y \supset \overline{X}$

Exemple: $X = [0,1[$, $\overline{X} = [0,1]$

Identités: $\overline{X} = \left(\left(\mathring{X^c} \right) \right)^c$, tout $X \subset \mathbb{R}^n$.

$X = \mathring{X} \iff X$ ouvert

$X = \overline{X} \iff X$ fermé

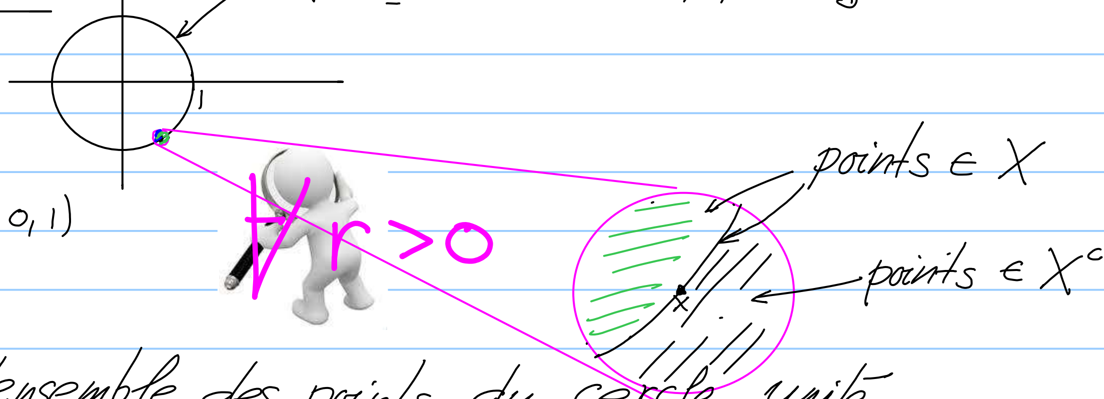
Définition: $\partial X := \overline{X} \setminus \mathring{X}$ est appelé le bord de l'ensemble X.

Remarque:

$$\partial X = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n : \forall r>0,\ B(\underline{x},r) \cap X \neq \emptyset,\ B(\underline{x},r) \cap X^c \neq \emptyset \}$$

Exemples:

$X = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^2 : d(\underline{x},0) \leq 1 \}$



$\mathring{X} = B(0,1)$

$\bar{X} = X$

$\partial X =$ l'ensemble des points du cercle unité

$X = \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, $\mathring{\mathbb{Q}} = \emptyset$, $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} = \partial \mathbb{Q}$

$X = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, $\mathring{X} = \emptyset$, $\bar{X} = \mathbb{R} = \partial X$

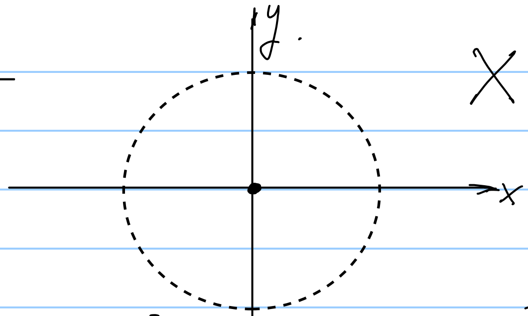
Definition $x \in X$ est appelé un point isolé s'il existe $r>0$ tel que. $B(x,r) \cap X = \{x\}$.

Remarque: les points isolés de $X \subset \mathbb{R}^n$ sont un sousensemble (au plus dénombrable) de ∂X.

Attention: les points isolés sont par définition des éléments de X, par contre les autres éléments de ∂X ne le sont pas forcément !

Definition $x \in \bar{X} \setminus \{$les points isolés de $X\}$ est appelé un point d'accumulation de X

Exemple



(voir aussi la série 6B)

$X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2>1\} \cup \{(0,0)\}$

$\mathring{X} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2>1\}$

$\overline{X} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \geq 1\} \cup \{(0,0)\}$

$\partial X = \overline{X} \setminus \mathring{X} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\} \cup \{(0,0)\}$

$(0,0) \in \partial X \cap X$ est un point isolé

l'ensemble des points d'accumulation de X est

$\overline{X} \setminus \{(0,0)\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \geq 1\}$.

Remarque (ensembles ouverts)

- une réunion quelconque de sousensembles ouverts de $\mathbb{R}^n$ est un sousensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$
- une intersection finie de sous-ensembles ouvert de $\mathbb{R}^n$ est un sousensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$

voir la série 7B pour les détails

D'une manière analogue on a (utiliser la série 1B)

- une intersection quelconque de sous-ensembles fermés de $\mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$
- une union finie de sous-ensembles fermés de $\mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$