Analyse avancée II – Corrigé de la série 3B

Échauffement. (Invariance d'échelle)

Supposons que $y_1(x)$ est une solution de l'équation $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$, et soit pour $C \in \mathbb{R}^*$ la fonction $y_C(x) = \frac{1}{C}\, y_1(Cx)$. Alors on obtient

$$y_C'(x) = y_1'(Cx) = f\left(\frac{y_1(Cx)}{Cx}\right) = f\left(\frac{y_C(x)}{x}\right),$$

ce qui montre que y_C est aussi solution de l'équation.

Exercice 1. (Équations homogènes)

i) Pour $y \neq \pm x$ on peut réécrire l'équation comme

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2} =: f(x, y)\,.$$

Comme on verra dans la suite du cours, la fonction f, ainsi que la fonction $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont les deux continues sur $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \neq \pm y\}$. Par le théorème d'existence et d'unicité, l'équation différentielle doit donc avoir une solution unique en tout point de D. Le comportement des solutions proche des diagonales $x = y$ et $x = -y$ sera discuté sous *ii)*.

L'équation est homogène :

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2} = \frac{2\left(\frac{y}{x}\right)}{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}\,.$$

Comme vu au cours, on pose $y(x) = xv(x)$, donc $y' = v + x\,v'$ et on obtient l'équation

$$v + xv' = \frac{2v}{1 - v^2}\,.$$

A noter que les points (x, y) sur les diagonales sont maintenant caractérisés par $v(x, y) = \pm 1$. On enclenche la méthode de la résolution par séparation des variables qui donne successivement, pour $x \neq 0$ et $v \neq 0$:

$$\frac{1 - v^2}{v + v^3}\, dv = \frac{1}{x}\, dx$$

puis en utilisant que

$$\frac{1 - v^2}{v + v^3} = \frac{1}{v} + \frac{-2v}{1 + v^2}$$

(méthode de la décomposition en éléments simples) on obtient après intégration

$$\ln\left(\frac{|v|}{1+v^2}\right) = \ln\bigl(C\,|x|\bigr), \qquad C>0,$$

d'où ("fin de la parenthèse séparation des variables"), l'équation pour la fonction $v(x)$:

$$\frac{|v(x)|}{1+v(x)^2} = C\,|x|\,, \qquad C>0,$$

que l'on doit maintenant discuter. On commence par enlever la valeur absolue de $v(x)$ en augmentant le domaine de C (voir l'exemple du cours), ce qui donne

$$\frac{v(x)}{1+v(x)^2} = C\,|x|\,, \qquad C\in\mathbb{R}^*.$$

A ce point il faut se rappeler que l'on a dû exclure le point $x=0$ pour utiliser la méthode de la séparation des variables. On a donc deux familles de solutions $v(x)$, une sur l'intervalle $x>0$, qui satisfait

$$\left\{\forall C\in\mathbb{R}^*, \qquad \frac{v(x)}{1+v(x)^2} = Cx, \qquad x>0\right\},$$

et une sur l'intervalle $x<0$ qui satisfait

$$\left\{\forall C\in\mathbb{R}^*, \qquad \frac{v(x)}{1+v(x)^2} = -Cx, \qquad x<0\right\}.$$

La constante C étant arbitraire on peut réécrire la deuxième famille sous la même forme que la première,

$$\left\{\forall C\in\mathbb{R}^*, \qquad \frac{v(x)}{1+v(x)^2} = Cx, \qquad x<0\right\},$$

ce qui donne pour la fonction $y(x)$ la familles d'équations

$$\left\{\forall C\in\mathbb{R}^*, \qquad \frac{y(x)}{x^2+y(x)^2} = C, \qquad x\in\mathbb{R}^*\right\}.$$

Par résolution de l'équation quadratique on obtient les solutions suivantes :

$$\left\{\begin{array}{lll}
\forall C\in\mathbb{R}^*, & y_C^+(x), & x\in\left]-\dfrac{1}{2\,|C|},0\right[\ ; \\
\forall C\in\mathbb{R}^*, & y_C^+(x), & x\in\left]0,\dfrac{1}{2\,|C|}\right[\ ; \\
\forall C\in\mathbb{R}^*, & y_C^-(x), & x\in\left]-\dfrac{1}{2\,|C|},0\right[\ ; \\
\forall C\in\mathbb{R}^*, & y_C^-(x), & x\in\left]0,\dfrac{1}{2\,|C|}\right[
\end{array}\right\}$$

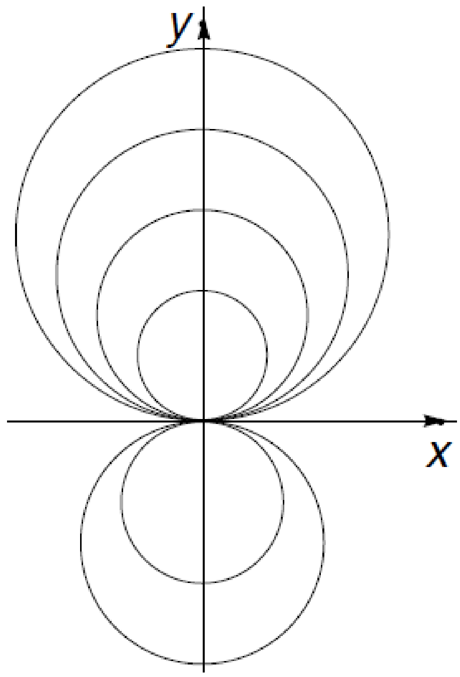
où

$$y_C^\pm(x) = \frac{1\pm\sqrt{1-4C^2x^2}}{2C}\ .$$

On vérifie maintenant facilement que à tout point $(x, y) \in D$, à l'exception des points de la forme $(0, y)$ avec $y \neq 0$, ainsi que des points de la forme $(x, 0)$ avec $x \neq 0$ (on a aussi dû exclure $v = 0$) correspond exactement une de ces solutions pour exactement une valeur de C. En ajoutant les points de la forme $(0, y)$ avec $y \neq 0$, ainsi que les deux solutions $y(x) = 0$, $x > 0$ et $y(x) = 0$, $x < 0$ on obtient finalement la solution générale

$$\left\{ \begin{array}{lll} y(x) = 0, & x > 0 \,; & \\ y(x) = 0, & x < 0 \,; & \\ \forall C \in \mathbb{R}^*, & y_C^+(x), & x \in \left]-\frac{1}{2\,|C|}, \frac{1}{2\,|C|}\right[\,; \\ \forall C \in \mathbb{R}^*, & y_C^-(x), & x \in \left]-\frac{1}{2\,|C|}, 0\right[\,; \\ \forall C \in \mathbb{R}^*, & y_C^-(x), & x \in \left]0, \frac{1}{2\,|C|}\right[\end{array} \right\}$$

ii) Les solutions avec le signe moins correspondent à un quart d'un cercle tangent à l'axe des x passant par $x = 0$ mais sans le point $(0, 0)$ et sans les points sur la diagonale (car les intervalles sont ouverts), et les solutions avec le plus, couvrent les autres moitiés des cercles, et de nouveau sans les points sur la diagonale (car les intervalles sont ouverts).



Remarque additionnelle :
Malgré le fait que le point $(0, 0)$ ne soit pas dans le domaine D de la fonction $f(x, y)$ (voir le point *i*)), les fonctions $y_C^-(x)$ satisfont l'équation différentielle aussi en $(0, 0)$ dans le sens que

$$\lim_{x \to 0} \left(y_C^-\right)'(x) = 0 = \lim_{x \to 0} f(x, y_C^-(x)).$$

Pour cette raison certains auteurs écriront la solution générale comme suit :

$$\left\{\begin{array}{ll} y(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R} \;; & \\ \forall C \in \mathbb{R}^*, \quad y_C^+(x), \quad x \in \left]-\dfrac{1}{2\,|C|}, \dfrac{1}{2\,|C|}\right[\;; & \\ \forall C \in \mathbb{R}^*, \quad y_C^-(x), \quad x \in \left]-\dfrac{1}{2\,|C|}, \dfrac{1}{2\,|C|}\right[& \end{array}\right\},$$

mais dans ce cas on devrait encore y ajouter toutes les solutions obtenues par chirurgie à partir des solutions y_C^- pour différentes valeurs de C.

Exercice 2. (Équations homogènes)

Dans tous les cas il faut procéder comme discuté dans l'Exercice 1, c'est-à-dire dans i) et ii) il faut commencer par enlever le point $x = 0$ où la fonction $f(x, y)$ correspondante n'est pas définie. A la fin on rajoute si possible $x = 0$ en calculant des limites, mais on ne donnera plus tous les détails.

i) L'équation différentielle peut s'écrire comme

$$y' = \frac{y}{x} \ln\Big(\frac{y}{x}\Big) .$$

Comme vu au cours, on pose $y(x) = xv(x)$, et donc $y' = v + x\,v'$ et on obtient l'équation

$$v + x\,v' = v \ln(v),$$

puis on enclenche la méthode de la séparation des variables

$$\frac{dv}{v\big(\ln(v) - 1\big)} = \frac{dx}{x} ,$$

et on trouve :

$$\begin{aligned} & \ln\big(\,|\ln(v) - 1|\,\big) = \ln(|x|) + \ln(C), \quad C > 0 \\ \Leftrightarrow \quad & |\ln(v) - 1| = C|x|, \quad C > 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \ln(v) = 1 + C|x|, \quad C \neq 0 \;. \end{aligned}$$

En substituant $\dfrac{y}{x}$ pour v, on a

$$\ln\Big(\frac{y}{x}\Big) = 1 + Cx \qquad \Leftrightarrow \qquad y = x\,e^{1+Cx} \quad C \neq 0 \;. \tag{1}$$

En divisant par $v\,(\ln(v) - 1)$ on a perdu la solution $v(x) = e$ pour $x \in \mathbb{R}$, qui correspond à $y(x) = ex$ pour $x \in \mathbb{R}$. Or, cette solution est obtenue en prenant $C = 0$ dans (1). Ainsi la solution générale recherchée est (cf. Fig. 1)

$$\Big\{\forall C \in \mathbb{R}, y(x) = x\,e^{1+Cx}, \quad x \in \mathbb{R}\Big\} \;.$$

ii) Comme vu au cours, on pose $y(x) = xv(x)$, et donc $y' = v + x\,v'$ et on obtient pour l'équation différentielle homogène

$$y' = \frac{y}{x}\left(\frac{y}{x} + 2\right)$$

l'équation à variables séparées

$$v + x\,v' = v(v+2) \quad \Leftrightarrow \quad x\,v' = v(v+1)$$

puis on enclenche la méthode de la séparation des variables :

$$\frac{dx}{x} = \frac{dv}{v(v+1)} = \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v+1}\right) dv\,,$$

et en intégrant on trouve

$$\ln(|v|) - \ln(|v+1|) = \ln(|x|) - \ln(C), \quad C > 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad C\frac{v}{v+1} = x, \quad C \neq 0\ .$$

En substituant $\dfrac{y}{x}$ pour v,

$$\frac{C\frac{y}{x}}{\frac{y}{x}+1} = x \qquad \Leftrightarrow \qquad Cy = x(y+x) \qquad \Leftrightarrow \qquad y = \frac{x^2}{C-x}\ . \tag{2}$$

En divisant par $v(v+1)$ on a perdu les solutions $v = 0$ et $v = -1$ qui correspondent aux solutions $y = 0$ et $y = -x$. Tandis que la dernière est obtenue en prenant $C = 0$ dans (2), la première n'est pas un cas particulier de (2).
La solution générale de l'équation différentielle donnée est ainsi (cf. Fig. 2):

$$\left\{ \begin{array}{ll} \forall C \neq 0,\ \dfrac{x^2}{C-x}, & x \in \left]-\infty, C\right[\ ; \\ \forall C \neq 0,\ \dfrac{x^2}{C-x}, & x \in \left]C, \infty\right[\ ; \\ -x, & x \in \mathbb{R}\,; \\ 0, & x \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

iii) On commence de la même manière pour les trois cas : on récrit l'équation donnée en divisant le numérateur et le dénominateur par x avant de faire le changement de variable $y \to v = \frac{y}{x}$, $y' = v + xv'$:

$$y' = \frac{a + b\frac{y}{x}}{c + d\frac{y}{x}} =: g\left(\frac{y}{x}\right) \qquad \Leftrightarrow \qquad v + xv' = g(v) = \frac{a + bv}{c + d\cdot v}\ .$$

Si $d \neq 0$ (ce qui correspond au cas plus intéressant), on obtient l'équation

$$x\,\frac{dv}{dx} = \frac{a + bv - v(c + d\cdot v)}{c + d\cdot v} = \frac{a + (b-c)v - d\cdot v^2}{c + d\cdot v}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{c + d\cdot v}{a + (b-c)v - d\cdot v^2}\, dv = \frac{dx}{x} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{v + \frac{c}{d}}{v^2 + \frac{c-b}{d}\,v - \frac{a}{d}}\, dv = -\frac{dx}{x}$$

qu'on doit intégrer des deux côtés (notez bien la différence entre dv et $d\cdot v$).

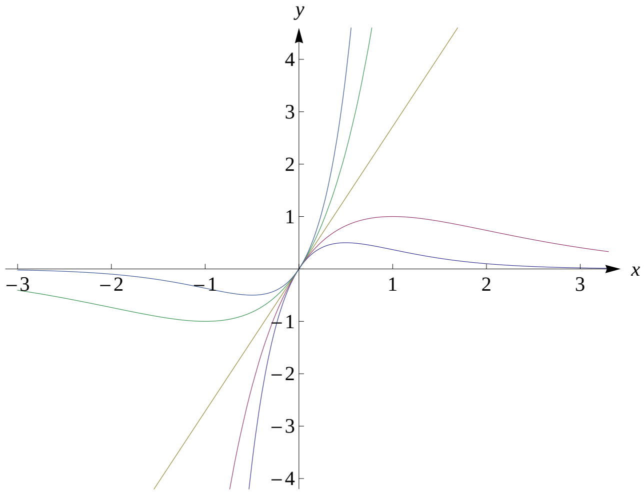


Figure 1

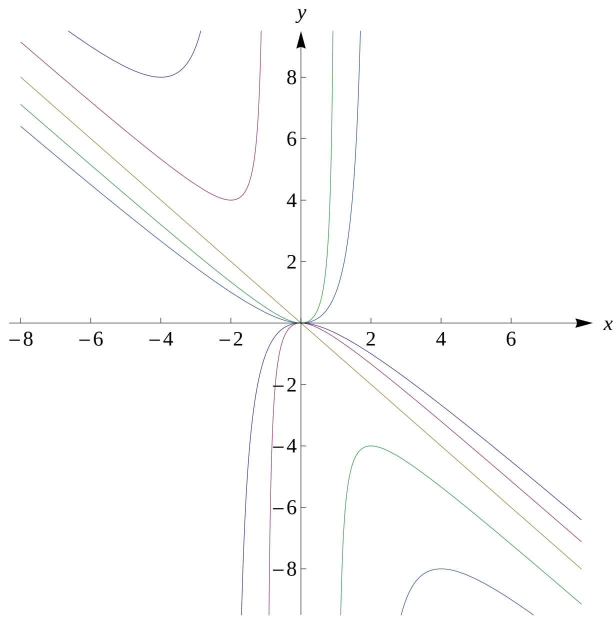


Figure 2

1) Dans ce cas le membre de gauche est $\dfrac{v-\frac{3}{2}}{v^2-2v-1}$. Pour l'intégrer, on doit le décomposer en éléments simples (cf. Analyse I). La décomposition dépend des racines du dénominateur qui sont

$$\lambda_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{8}}{2}=1\pm\sqrt{2}$$

La fonction rationnelle s'écrit alors

$$\frac{v-\frac{3}{2}}{v^2-2v-1}=\frac{A}{v-\lambda_1}+\frac{B}{v-\lambda_2}=\frac{(A+B)v-A\lambda_2-B\lambda_1}{v^2-2v-1}\ ,$$

ce qui mène au système

$$\begin{cases} A+B=1 \\ A\lambda_2+B\lambda_1=\frac{3}{2}\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} A+B=1 \\ A-B=\frac{1}{2\sqrt{2}}\end{cases}$$

Ainsi $A=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{8}=\frac{1}{8}(4-\sqrt{2})$ et $B=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{8}=\frac{1}{8}(4+\sqrt{2})$. Pour simplifier la notation on continue d'écrire A,B,λ_1,λ_2 pour l'instant. L'intégrale est alors

$$\int\frac{v-\frac{3}{2}}{v^2-2v-1}\,dv=\int\frac{A}{v-\lambda_1}\,dv+\int\frac{B}{v-\lambda_2}\,dv=A\ln(|v-\lambda_1|)+B\ln(|v-\lambda_2|)$$

si bien que la solution $v(x)$ de l'équation différentielle satisfait (pour $C>0$)

$$A\ln(|v-\lambda_1|)+B\ln(|v-\lambda_2|)=-\ln(|x|)+\ln(C)\quad\Leftrightarrow\quad |v-\lambda_1|^A|v-\lambda_2|^B=\frac{C}{|x|}\,.$$

En remplaçant $v=\dfrac{y}{x}$ on a

$$\left|\frac{y}{x}-\lambda_1\right|^A\left|\frac{y}{x}-\lambda_2\right|^B=\frac{C}{|x|}\quad\Leftrightarrow\quad |y-\lambda_1x|^A\,|y-\lambda_2x|^B=C|x|^{A+B-1}\,.$$

Or, $A+B=1$ (cf. plus haut), ce qui fait qu'on obtient finalement

$$\left|y(x)-(1+\sqrt{2})x\right|^{\frac{4-\sqrt{2}}{8}}\left|y(x)-(1-\sqrt{2})x\right|^{\frac{4+\sqrt{2}}{8}}=C, \qquad C>0$$

Comme les deux exposants ne sont pas égaux, on ne peut pas isoler y dans cette équation, la solution est donc donnée sous forme implicite.

2) Dans ce cas le membre de gauche est $\dfrac{v+5}{v^2+2v+1}=\dfrac{v+5}{(v+1)^2}$. Son intégrale est alors

$$\int\frac{v+5}{(v+1)^2}\,dv=\int\frac{v+1}{(v+1)^2}\,dv+\int\frac{4}{(v+1)^2}\,dv=\ln(|v+1|)-\frac{4}{v+1}\,,$$

et donc la solution $v(x)$ de l'équation différentielle satisfait (pour $C>0$)

$$\ln(|v+1|)-\frac{4}{v+1}=-\ln(|x|)+\ln(C) \qquad \Leftrightarrow \qquad |v+1|\,\exp\Big(-\frac{4}{v+1}\Big)=\frac{C}{|x|}\;.$$

En remplaçant $v=\dfrac{y}{x}$ on a

$$\left|\frac{y}{x}+1\right|\,\exp\Big(-\frac{4}{\frac{y}{x}+1}\Big)=\frac{C}{|x|} \qquad \Leftrightarrow \qquad |y+x|\,\exp\Big(-\frac{4x}{y+x}\Big)=C, \quad C>0$$

Comme avant, on ne peut pas donner une solution explicite pour cette équation.

3) Dans ce cas le membre de gauche est $\dfrac{v-\frac{3}{2}}{v^2-v+\frac{1}{2}}$. Le discriminant du dénominateur vaut -1, c'est-à-dire il n'y a pas de racines réelles. Il n'y a donc pas de décomposition plus simple pour intégrer cette fonction rationnelle de sorte qu'on doit faire des manipulations bien choisies en haut et en bas pour intégrer.

$$\begin{aligned}\int\frac{v-\frac{3}{2}}{v^2-v+\frac{1}{2}}\,dv &= \int\frac{\frac{1}{2}(2v-1)-1}{v^2-v+\frac{1}{2}}\,dv\\ &=\frac{1}{2}\int\frac{2v-1}{v^2-v+\frac{1}{2}}\,dv-\int\frac{1}{\left(v-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}\,dv\\ &=\frac{1}{2}\int\frac{q'(v)}{q(v)}\,dv-\int\frac{1}{u^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}\,du\,,\end{aligned}$$

où $q(v)=v^2-v+\frac{1}{2}$ et $u=v-\frac{1}{2}$, $u'=1$. Ainsi

$$\begin{aligned}\int\frac{v-\frac{3}{2}}{v^2-v+\frac{1}{2}}\,dv &= \frac{1}{2}\ln(|q(v)|)-2\arctan(2u)\\ &=\frac{1}{2}\ln\left(\left|v^2-v+\frac{1}{2}\right|\right)-2\arctan(2v-1)\end{aligned}$$

et donc la solution $v(x)$ de l'équation différentielle satisfait (pour $C>0$)

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\ln\left(\left|v^2-v+\frac{1}{2}\right|\right)-2\arctan(2v-1)=-\ln(|x|)+\ln(C)\\ &\qquad\Leftrightarrow \qquad \sqrt{\left|v^2-v+\frac{1}{2}\right|}\,\exp\big(-2\arctan(2v-1)\big)=\frac{C}{|x|}\;.\end{aligned}$$

En remplaçant $v = \dfrac{y}{x}$ on a

$$\sqrt{\left|\frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x} + \frac{1}{2}\right|}\, \exp\left(-2\arctan\left(\frac{2y}{x} - 1\right)\right) = \frac{C}{|x|}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \sqrt{\left|y^2 - x\,y + \frac{x^2}{2}\right|}\, \exp\left(-2\arctan\left(\frac{2y-x}{x}\right)\right) = C\,, \quad C > 0$$

Comme pour les deux cas précédents, la solution peut seulement être donnée sous forme implicite.

On a donc pu observer que les solutions y de l'équation différentielle $y' = \dfrac{ax+by}{cx+dy}$ satisfont $f(x,y) = C$ avec $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ et $C > 0$.

iv) Pour ramener cette équation qui n'est pas homogène à une équation homogène, on fait le changement de variable $x \to \bar{x} + x_0$, $y \to \bar{y} + y_0$, où x_0, y_0 sont des constantes à déterminer. Géométriquement ce changement de variable revient à une translation de l'origine par (x_0, y_0), voir Fig. 3.

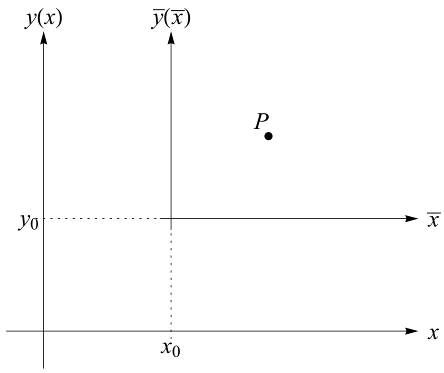


Figure 3

Tout point du plan, comme par exemple P, peut donc être exprimé comme $\big(x, y(x)\big)$ ou comme $\big(\bar{x}, \bar{y}(\bar{x})\big)$. Les relations entre ces deux expressions sont

$$x = \bar{x} + x_0$$
$$y(x) = \bar{y}(\bar{x}) + y_0,$$

ce qui fait que, puisque $\bar{y}(\bar{x}) = y(\bar{x} + x_0) - y_0$,

$$\bar{y}'(\bar{x}) = \frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{x}} = \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{\bar{x}+x_0} = y'(\bar{x} + x_0)\,.$$

On peut donc écrire l'équation différentielle en $\bar{y}$

$$\bar{y}'(\bar{x}) = y'(\bar{x} + x_0) = \frac{a(\bar{x} + x_0) + b\big(\bar{y}(\bar{x}) + y_0\big) + r}{c(\bar{x} + x_0) + d\big(\bar{y}(\bar{x}) + y_0\big) + s}\,,$$

ou, sous forme plus courte,

$$\bar{y}' = \frac{a\bar{x} + b\bar{y} + ax_0 + by_0 + r}{c\bar{x} + d\bar{y} + cx_0 + dy_0 + s}\,.$$

On choisit alors x_0 et y_0 tels que

$$\begin{cases} a\,x_0 + b\,y_0 + r = 0 \\ c\,x_0 + d\,y_0 + s = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -r \\ -s \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} bs - dr \\ cr - as \end{pmatrix}$$

pour autant que $ad - bc \neq 0$. Si ce déterminant est nul, le système a soit une infinité de solutions (c.-à-d. on peut librement choisir x_0 ou y_0), soit il n'a pas de solution et donc on ne peut pas écrire l'équation sous la forme voulue.
On a ainsi une équation de la même forme qu'au *iii*) et on pourrait donc la résoudre de la même manière.

Exercice 3. (Équation de Riccati)

i) Comme y_1 est une solution de l'équation donnée, on obtient pour y, pourvu que $(u(x) \neq 0$,

$$\left(y_1 + \frac{1}{u}\right)' = a\left(y_1 + \frac{1}{u}\right)^2 + b\left(y_1 + \frac{1}{u}\right) + c$$

$$\Leftrightarrow \quad y_1' - \frac{u'}{u^2} = a\left(y_1^2 + 2\frac{y_1}{u} + \frac{1}{u^2}\right) + b\,y_1 + b\,\frac{1}{u} + c$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{u'}{u^2} = 2a\frac{y_1}{u} + \frac{a}{u^2} + \frac{b}{u} \quad \Leftrightarrow \quad u' + (2ay_1 + b)u = -a\ .$$

ii) La méthode de *i)* permet de trouver la solution générale de l'équation différentielle de Riccati

$$y' = -\frac{4}{3x}y^2 + \frac{4}{3x}$$

à partir d'une solution particulière trouvée en tâtonnant. C'est le plus facile de chercher une solution constante; en l'occurrence on trouve la solution particulière $y_1 = 1$.

Posons donc $y = y_1 + \frac{1}{u} = 1 + \frac{1}{u}$. Alors u satisfait l'équation différentielle linéaire

$$u' - \frac{8}{3x}u = \frac{4}{3x}\ . \tag{3}$$

L'équation homogène associée est à variables séparées:

$$\frac{du}{8u} = \frac{dx}{3x} \quad \Leftrightarrow \quad \ln|u| = \frac{8}{3}\ln|x| + \ln(\tilde{C}), \quad \tilde{C} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad |u| = \tilde{C}|x|^{8/3}, \quad \tilde{C} > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad u = \pm\tilde{C}|x|^{8/3}, \quad \tilde{C} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad u = \tilde{C}|x|^{8/3}, \quad \tilde{C} \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \tag{4}$$

Pour $\tilde{C} = 0$, on obtient la fonction triviale qui est aussi solution de l'équation homogène associée à (3) si bien que $\tilde{C} \in \mathbb{R}$ dans (4).

En observant que $u_{\text{part}} = -\frac{1}{2}$ est une solution particulière de (3), on a finalement

$$u(x) = u_{\text{hom}}(x) + u_{\text{part}}(x) = \tilde{C}|x|^{8/3} - \frac{1}{2}, \quad \tilde{C} \in \mathbb{R}, \quad x \in]-\infty, 0[\text{ ou } x \in]0, \infty[\ . \tag{5}$$

Pour $\tilde{C} \neq 0$, la solution y de l'équation de Riccati s'écrit

$$y(x) = 1 + \frac{1}{u(x)} = \frac{\tilde{C}|x|^{8/3} + \frac{1}{2}}{\tilde{C}|x|^{8/3} - \frac{1}{2}} = \frac{|x|^{8/3} + \frac{1}{2\tilde{C}}}{|x|^{8/3} - \frac{1}{2\tilde{C}}} = \frac{|x|^{8/3} + C}{|x|^{8/3} - C}, \quad C \neq 0\ , \tag{6}$$

Cette fonction n'est pas définie lorsque $|x|^{8/3} - C = 0$, ce qui peut seulement arriver quand $C > 0$ (cf. résumé ci-dessous).

Pour $\tilde{C} = 0$ dans (5), on a $y(x) = 1 + \frac{1}{u(x)} = 1 - 2 = -1$. La solution particulière $y_1(x) = 1$ est obtenue de (6) avec $C = 0$.

En remarquant que contrairement à (3), l'équation de Riccati est aussi définie pour $x = 0$, on résume ses solutions:

$$\Big\{ y(x) = \frac{|x|^{8/3}+C}{|x|^{8/3}-C}, \qquad C>0, \qquad x \in]-\infty, -C^{3/8}[\text{ ou } x \in]-C^{3/8}, C^{3/8}[\text{ ou } x \in]C^{3/8}, \infty[$$

$$y(x) = \frac{|x|^{8/3}+C}{|x|^{8/3}-C}, \qquad C<0, \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$y(x) = 1, \qquad C=0, \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$y(x) = -1, \qquad C=\infty, \qquad x \in \mathbb{R} \Big\}$$

Exercice 4. (Équation de Clairaut)

De l'équation

$$(y - xy')^2 = -2y' .$$

on obtient les équations de Clairaut $y = xy' + f_\pm(y')$ avec

$$f_\pm(y') = \pm\sqrt{-2y'} .$$

On pose $p = y'$, et on obtient

$$y = xp + f_\pm(p).$$

On dérive une fois par rapport à x et l'on obtient

$$p = p + xp' + f'_\pm(p)p',$$

si bien que

$$p' \left(x + f'_\pm(p)\right) = 0.$$

Cette équation a les solutions $p'(x) = 0$ c'est-à-dire $p(x) = C$ et donc pour $C \leq 0$ les droites :

$$y(x) = Cx + f_\pm(C) = Cx \pm \sqrt{-2C} .$$

L'autre possibilité est que $x + f'_\pm(p) = 0$ et on obtient la solution sous forme paramétrique avec $p \in \mathbb{R}_-$:

$$x = -f'_\pm(p) = \pm\frac{1}{\sqrt{-2p}}$$

$$y = xp + f_\pm(p) = \pm\frac{1}{\sqrt{-2p}}\,p \pm \sqrt{-2y'} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{-2y'}$$

ou d'une manière explicite en éliminant p :

$$y(x) = \frac{1}{2x}.$$