

Analyse avancée II – Série 3A

Échauffement. (Révision – Intégration)

Calculer l'intégrale

$$\int_0^4 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}} dx .$$

Exercice 1. (Rappel intégration, continuité, périodicité)

Soit l'équation différentielle $y'' + y = \tan(x)$ pour $x \in I_0 =]-\pi/2, \pi/2[$. Pour une solution particulière de la forme

$$y_{\text{part}}(x) = C_1(x) \cos(x) + C_2(x) \sin(x), \quad (1)$$

(méthode de la variation des constantes) on obtient le système

$$\begin{pmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tan(x) \end{pmatrix} .$$

i) Trouver une solution particulière (1) à partir de ce système.

Observez que la solution trouvée est solution de l'ED dans tous les intervalles de la forme $I_k =]-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi[$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Considérons maintenant la fonction¹

$$f(x) = -\cos(x) \ln \left(\left| \frac{1 + \sin(x)}{\cos(x)} \right| \right) .$$

ii) Est-ce que f est continue sur \mathbb{R} ?

iii) Est-ce que f est dérivable sur \mathbb{R} ?

iv) Montrer que f est une fonction périodique.

v) Est-ce que f est π -périodique?

Exercice 2. (Équations d'ordre supérieur)

Résoudre les équations différentielles suivantes :

i) $y'''' - y'' - 12y = 12x + 5$

ii) $y'''' - 5y'' + 3y' + 9y = e^{-x} + \sin(x)$

Exercice 3. (Isoclines)

Soit l'équation différentielle $y^2 y' + x^2 = 0$.

i) Déterminer les isoclines associées aux pentes $y' \in \{0, -\frac{1}{10}, -\frac{1}{2}, -1, -2, -8\}$ et esquisser les trajectoires intégrales de l'équation différentielle pour les conditions initiales $y(0) = -1$, $y(0) = 0$ et $y(0) = 1$.

ii) Résoudre analytiquement l'équation différentielle et contrôler le résultat de i).

¹ **Remarque :** par convention, le domaine de définition d'une fonction donnée par une expression est le plus grand sous-ensemble de \mathbb{R} sur lequel l'expression est bien définie union les points où la fonction peut être définie par un prolongement par continuité.

Exercice 4. (Solutions par morceaux)

Soit l'équation différentielle $y' = 5(y^4)^{1/5}$.

- i) Déterminer toutes les solutions de cette équation.
- ii) Esquisser les graphes des solutions passant par les points $(-3, -1)$ et $(2, 1)$.

Exercice 5. (Théorème d'existence et d'unicité ; voir aussi Exercice 4 de la Série 1A.)

Soit l'équation différentielle $u'(t) = u(t)(u(t) - 1)$.

- i) Trouver pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$ et tout $u_0 \in \mathbb{R}$ la solution maximale pour la condition initiale $u(t_0) = u_0$.
- ii) Trouver la solution générale.

Exercice 6. (Théorème d'existence et d'unicité ; voir aussi Exercice 5 de la Série 1A.)

Soit l'équation différentielle de l'Exercice 5 de la Série 1A : $x(x - 1)y' - y(y - 1) = 0$.

- i) Montrer que si on pose $y(x) = u(t(x))$ avec $t(x) = -\ln(|x|) + \ln(|x - 1|)$, les solutions de cette équation différentielle peuvent être exprimées en terme des solutions de l'équation différentielle de l'Exercice 5.
- ii) Trouver la solution générale.

Exercice 7. (QCM : problème de Cauchy)

La solution $y(x)$ de l'équation différentielle $xy' - y = x$ pour $x \in]0, \infty[$ avec la condition initiale $y(1) = 0$ vérifie :

$y(2) = \ln(2)$

$y(2) = -2 \ln(2)$

$y(2) = 2 \ln(2)$

$y(2) = 2 \ln(2) + 2$

Exercice 8. (QCM : séparation des variables)

La solution $y(x)$ de l'équation différentielle $y' - \cos(x)y + \cos(x)y^2 = 0$ pour $x \in \mathbb{R}$ avec la condition initiale $y(0) = \frac{1}{2}$ est :

$y(x) = \frac{1}{1 + e^{\sin(x)}}$

$y(x) = -\frac{1}{2}e^{-\sin(x)}$

$y(x) = \frac{1}{1 + e^{-\sin(x)}}$

$y(x) = \frac{1}{1 + e^{-\frac{1}{2}\sin(x)}}$

Exercice 9. (QCM : problème de Cauchy)

La solution $y(x)$ de l'équation différentielle $y'' - 8y' + 41y = 0$ pour $x \in \mathbb{R}$ avec les conditions initiales $y(0) = 7$ et $y'(0) = -2$ est :

$y(x) = e^{5x} \left(7 \cos(4x) - \frac{37}{4} \sin(4x) \right)$

$y(x) = (-37x + 7)e^{5x}$

$y(x) = 37e^{4x} - 30e^{5x}$

$y(x) = e^{4x} (7 \cos(5x) - 6 \sin(5x))$