Peter Wittwer
7 mars 2024

Analyse avancée II – Série 3A

Échauffement. (Révision – Intégration)

Calculer l'intégrale

$$\int_0^4 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\, dx \ .$$

Exercice 1. (Rappel intégration, continuité, périodicité)

Soit l'équation différentielle $y'' + y = \tan(x)$ pour $x \in I_0 = \left]-\pi/2, \pi/2\right[$. Pour une solution particulière de la forme

$$y_{\text{part}}(x) = C_1(x)\cos(x) + C_2(x)\sin(x)\,, \tag{1}$$

(méthode de la variation des constantes) on obtient le système

$$\begin{pmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1{}'(x) \\ C_2{}'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tan(x) \end{pmatrix}.$$

i) Trouver une solution particulière (1) à partir de ce système.

Observez que la solution trouvée est solution de l'ED dans tous les intervalles de la forme $I_k = \left]-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi\right[$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Considérons maintenant la fonction[1]

$$f(x) = -\cos(x)\ln\left(\left|\frac{1+\sin(x)}{\cos(x)}\right|\right)\ .$$

ii) Est-ce que f est continue sur $\mathbb{R}$?

iii) Est-ce que f est dérivable sur $\mathbb{R}$?

iv) Montrer que f est une fonction périodique.

v) Est-ce que f est π-périodique?

Exercice 2. (Équations d'ordre supérieur)

Résoudre les équations différentielles suivantes :

i) $y'''' - y'' - 12y = 12x + 5$

ii) $y''' - 5y'' + 3y' + 9y = e^{-x} + \sin(x)$

Exercice 3. (Isoclines)

Soit l'équation différentielle $y^2\, y' + x^2 = 0$.

i) Déterminer les isoclines associées aux pentes $y' \in \left\{0, -\frac{1}{10}, -\frac{1}{2}, -1, -2, -8\right\}$ et esquisser les trajectoires intégrales de l'équation différentielle pour les conditions initiales $y(0) = -1$, $y(0) = 0$ et $y(0) = 1$.

ii) Résoudre analytiquement l'équation différentielle et contrôler le résultat de *i*).

[1] ***Remarque :*** *par convention, le domaine de définition d'une fonction donnée par une expression est le plus grand sous-ensemble de* $\mathbb{R}$ *sur lequel l'expression est bien définie union les points où la fonction peut être définie par un prolongement par continuité.*

Ex. 4 - 8 au verso.

Exercice 4. (Solutions par morceaux)

Soit l'équation différentielle $y' = 5\left(y^4\right)^{1/5}$.

i) Déterminer toutes les solutions de cette équation.

ii) Esquisser les graphes des solutions passant par les points $(-3,-1)$ et $(2,1)$.

Exercice 5. (QCM : problème de Cauchy)

La solution $y(x)$ de l'équation différentielle $x\,y' - y = x$ pour $x \in]0,\infty[$ avec la condition initiale $y(1) = 0$ vérifie :

- [ ] $y(2) = \ln(2)$
- [ ] $y(2) = -2\ln(2)$
- [ ] $y(2) = 2\ln(2)$
- [ ] $y(2) = 2\ln(2) + 2$

Exercice 6. (QCM : séparation des variables)

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $\frac{1}{2}y'\sin(y) = (4x^3+3x)\cos(y)^2$ qui sont définies sur tout $\mathbb{R}$ est donnée par :

- [ ] $y(x) = \pm\arcsin\left(\dfrac{1}{2x^4+3x^2+C}\right) + 2k\pi$, avec $C \geq 1$ et $k \in \mathbb{Z}$
- [ ] $y(x) = \pm\arccos\left(\dfrac{1}{2x^4+3x^2+C}\right) + 2k\pi$, avec $C \geq 1$ et $k \in \mathbb{Z}$
- [ ] $y(x) = \pm\arccos\left(e^{-\frac{2}{2x^4+3x^2+C}}\right) + 2k\pi$, avec $C \geq 1$ et $k \in \mathbb{Z}$
- [ ] $y(x) = \pm\arccos\left(\dfrac{-1}{2x^4+3x^2+C}\right) + 2k\pi$, avec $C \geq 1$ et $k \in \mathbb{Z}$

Exercice 7. (QCM : séparation des variables)

La solution $y(x)$ de l'équation différentielle $y' - \cos(x)\,y + \cos(x)\,y^2 = 0$ pour $x \in \mathbb{R}$ avec la condition initiale $y(0) = \frac{1}{2}$ est :

- [ ] $y(x) = \dfrac{1}{1+e^{-\sin(x)}}$
- [ ] $y(x) = -\dfrac{1}{2}e^{-\sin(x)}$
- [ ] $y(x) = \dfrac{1}{1+e^{\sin(x)}}$
- [ ] $y(x) = \dfrac{1}{1+e^{-\frac{1}{2}\sin(x)}}$

Exercice 8. (QCM : problème de Cauchy)

La solution $y(x)$ de l'équation différentielle $y'' - 8y' + 41y = 0$ pour $x \in \mathbb{R}$ avec les conditions initiales $y(0) = 7$ et $y'(0) = -2$ est :

- [ ] $y(x) = e^{5x}\left(7\cos(4x) - \dfrac{37}{4}\sin(4x)\right)$
- [ ] $y(x) = (-37x+7)e^{5x}$
- [ ] $y(x) = 37e^{4x} - 30e^{5x}$
- [ ] $y(x) = e^{4x}\,(7\cos(5x) - 6\sin(5x))$