1.8. ED linéaires à coëfficients constants d'ordre supérieur

Soit l'ED

$$\boxed{a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = q(x) \quad (*)}$$

$a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$, $a_n \in \mathbb{R}^*$, $q(x)$ une fonction continue sur un intervalle I.

i) <u>résolution de l'équation homogène</u> (associée à $(*)$)

On essaye $y(x) = e^{\lambda x}$ et on trouve que nécessairement

$$\boxed{a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0}$$

$$\Leftrightarrow \quad a_n (\lambda - \lambda_1)^{p_1} (\lambda - \lambda_2)^{p_2} \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_m)^{p_m} = 0$$

avec $1 \leq m \leq n$, $p_i \geq 1$, $i = 1 \dots m$, $p_1 + \dots + p_m = n$ et $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$ (voir la série 4B Ex. 2ii) pour le cas $\lambda \in \mathbb{C}$)

La solution générale du problème homogène est

$$\boxed{y_h(x) = P_1(x) \cdot e^{\lambda_1 x} + \dots + P_m(x) e^{\lambda_m x}, \quad x \in \mathbb{R}}$$

avec P_i, $i = 1, \dots, m$ des polynômes de degré $p_i - 1$:

$$P_1(x) e^{\lambda_1 x} = C_1 \underbrace{e^{\lambda_1 x}}_{= y_1(x)} + C_2 \underbrace{x e^{\lambda_1 x}}_{= y_2(x)} + \dots + C_{p_1} \underbrace{x^{p_1 - 1} e^{\lambda_1 x}}_{= y_{p_1}(x)}$$

$$\vdots$$

$$P_m(x) e^{\lambda_m (x)} = C_{n-p_m+1} \underbrace{e^{\lambda_m x}}_{= y_{n-p_m+1}(x)} + \dots + C_n \underbrace{x^{p_m - 1} e^{\lambda_m x}}_{= y_n(x)}$$

Dans le cas où $m = n$ on a $P_i(x) = C_i$, $i = 1 \dots n$, avec $C_i \in \mathbb{R}$.

$$\boxed{y_h(x) = C_1 \cdot \underbrace{e^{\lambda_1 x}}_{=y_1(x)} + \dots + C_n \underbrace{e^{\lambda_n x}}_{=y_n(x)}, \quad x \in \mathbb{R}}$$

ii) – la méthode de la variation des constantes se généralise. On a que $y_p(x) = C_1(x)\, y_1(x) + \dots + C_n(x)\, y_n(x)$ avec $C_1(x), \dots, C_n(x)$ solutions de :

$$\begin{pmatrix} C_1'(x) \\ \vdots \\ C_n'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & & y_n'(x) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{1}{a_n} \cdot q(x) \end{pmatrix}$$

– la méthode des coefficients indéterminés se généralise (voir la série 3A pour des exemples)

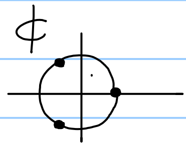
iii) la solution générale est de la forme

$$\boxed{\{\forall C_1, .., C_n \in \mathbb{R}\ (\text{ou } \mathbb{C})\ \ y(x) = \underbrace{y_p(x)}_{\text{trouvé sous ii)}} + \underbrace{y_h(x)}_{\text{trouvé sous i)}}, \quad x \in I \}}$$

<u>Exemple (voir aussi 1.5.2 et la série 4B)</u>

$$y''' - y = 2x^3 = q(x), \quad I = \mathbb{R}$$

i) $\lambda^3 - 1 = 0$



$\lambda_1 = 1$

$\lambda_2 = \overline{\lambda_3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \alpha + i\beta$

$$\boxed{y_h(x) = C_1 \cdot e^{x} + C_2\, e^{-\frac{1}{2}x} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_3\, e^{-\frac{1}{2}x} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)}$$

ii) $q(x)$ n'est pas résonnant (pas de la forme $x^r q_0(x)$, avec $r \in \mathbb{N}$ et $q_0(x)$ solution de l'équation homogène. Par conséquence $y_p(x) \in \text{vect}\{q(x), q'(x), \dots\}$:

$$y_p(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D \quad , \quad A, B, C, D \in \mathbb{R}$$

$$y_p'''(x) = 6A$$

$$\begin{array}{llll} x^3 : & \overset{\text{zéro}}{0} - A = 2 & \Rightarrow & A = -2 \\ x^2 : & 0 - B = 0 & \Rightarrow & B = 0 \\ x : & 0 - C = 0 & \Rightarrow & C = 0 \\ 1 : & 6A - D = 0 & \Rightarrow & D = 6A = -12 \end{array}$$

Donc $\boxed{y_p(x) = -2x^3 - 12}$

iii) la solution générale du problème est

$$\boxed{\{ \forall C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R} \ , \ y(x) = y_p(x) + y_h(x) \quad , x \in \mathbb{R} \}.}$$

1.9. Solutions qualitatives, méthode des isoclines

Soit une ED du premier ordre. On suppose que l'on puisse l'écrire sous la forme (isoler y'):

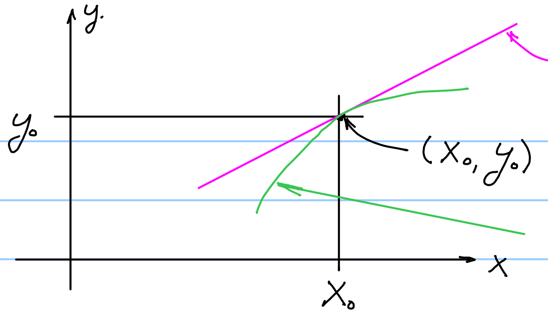
$$\boxed{y' = f(x,y) \qquad \text{pour une fonction } f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}}$$

Exemples: $f(x,y) = y, \ y^2, \ldots$ (revoir tous les exemples)

Interprétation géométrique de $y' = f(x,y)$

En chaque point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ on connait $f(x_0, y_0)$ et donc la dérivée $y'(x_0)$ de toute solution $y(x)$ qui satisfait la condition initiale $y(x_0) = y_0$, car on a

$$y'(x_0) = f(x_0, y(x_0)) = f(x_0, y_0)$$

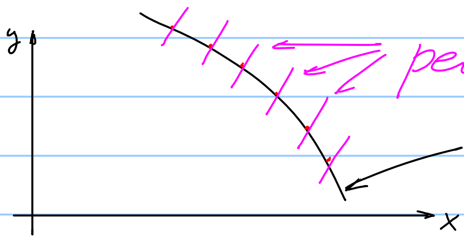


droite de pente $f(x_0, y_0)$ qui passe par le point (x_0, y_0).

exemple du graphe d'une solution $y(x)$ de l'équation qui passe par (x_0, y_0). La droite magenta est tangente au graphe de $y(x)$ en $(x_0, y_0 = y(x_0))$.

Méthode des isoclines

On considère les points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(x,y) = c$, pour c donné. Nous verrons dans la suite que ceci correspond souvent, pour chaque valeur de c, à un ensemble de courbes :

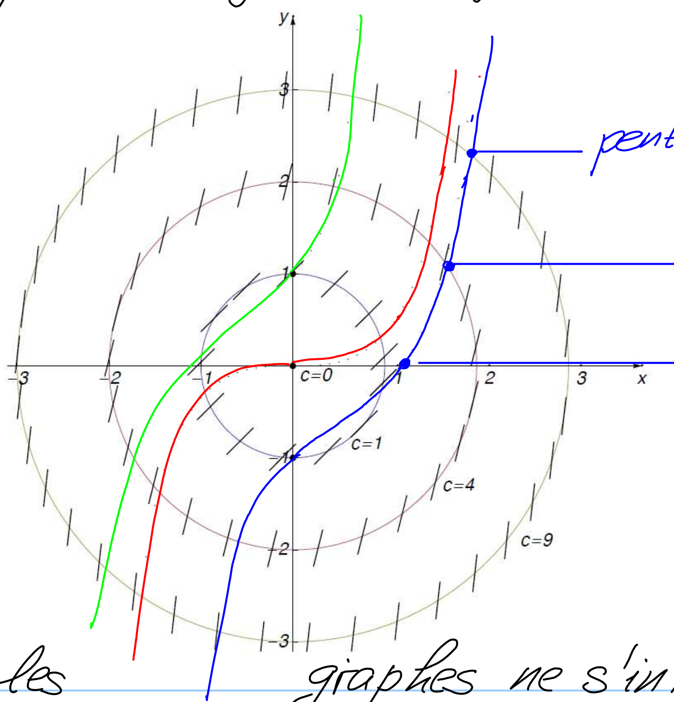


petits segments de pente c

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = c\}$ = isocline de f pour c.

Une solution de l'ED qui coupe une isocline de f pour c doit avoir une tangente de pente c en ce point.

Exemple: $y' = x^2 + y^2 = f(x,y)$ (eq. de Riccati)



pente = 9 en ce point

pente = 4 en ce point

pente = 1 en ce point.

Remarque: les graphes ne s'intersectent pas !

1.10 Théorème d'existence et d'unicité

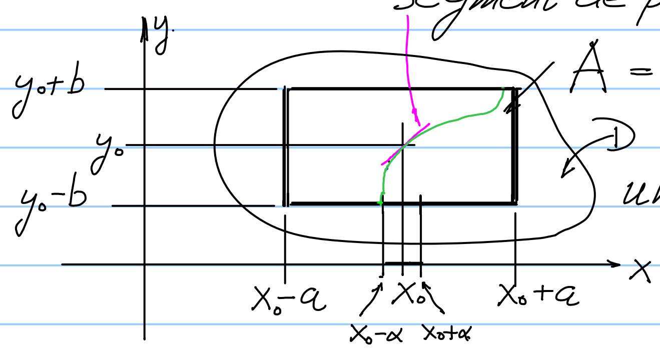
Théorème: Soit le problème de Cauchy

$$(*)\quad \begin{cases} y' = f(x,y), & f: D \to \mathbb{R}, \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$ ouvert, $(x_0, y_0) \in D$.

f continue sur D
$\frac{\partial f}{\partial y}$ continue sur D } voir les chapitres à suivre

fonction dérivée partielle de f par rapport à y : à définir dans les chapitres à suivre



$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$ un rectangle fermé $\subset D$

$$M = \max_{(x,y) \in A} |f(x,y)|$$

Alors il existe exactement une fonction $y(x)$ continue sur $[x_0-\alpha, x_0+\alpha]$ et continument dérivable sur $I =]x_0-\alpha, x_0+\alpha[$ solution de $(*)$ sur I. où $\alpha = \min\{a, \frac{b}{M}\}$

Remarque: puisque A est fermé, la condition que f et $\frac{\partial f}{\partial y}$ soient des fonctions continues implique que f et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont bornées sur A. (voir les chapitres à suivre).

Remarque: le théorème s'applique à $(x_0', y_0') \in D$ arbitraire

Démonstration (idée de base) :

(*) est équivalent à :

$$\boxed{y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, y(\xi))\, d\xi}$$

On pose $y_0(x) \equiv y_0$ et puis, pour $n = 1, 2, \ldots$

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, y_{n-1}(\xi))\, d\xi$$

puis on montre que, par le théorème de l'application contractante (théorème de point fixe de Banach), la suite des fonctions y_n converge sur l'intervalle $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ dans l'espace vectoriel de fonctions $C^0([x_0 - \alpha, x_0 + \alpha], \mathbb{R})$ équipé de la norme $\| \ \|_\infty$ (voir plus loin dans le cours, c'est un espace de Banach).

Exemple

$$\left.\begin{array}{l} y' = y \quad (= f(x, y)) \\ x_0 = 0, \quad y(0) = y_0 = 1 \end{array}\right\} \text{ solution: } y(x) = e^x.$$

Avec le théorème :

$$y_0(x) = 1$$

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x f(\xi, y_0(\xi))\, d\xi = 1 + \int_0^x 1\, d\xi = 1 + x$$

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x f(\xi, y_1(\xi))\, d\xi = 1 + \int_0^x (1 + \xi)\, d\xi$$

$$= 1 + x + \frac{1}{2} x^2$$

$$y_3(x) = 1 + \int_0^x f(\xi, y_2(\xi))\, d\xi = 1 + \int_0^x \left(1 + \xi + \tfrac{1}{2}\xi^2\right) d\xi.$$

$$= 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3!}x^3$$

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k \xrightarrow[n\to\infty]{} e^x = y(x).$$

convergence uniforme sur $[-\alpha, \alpha]$ avec $\alpha > 0$ arbitraire.

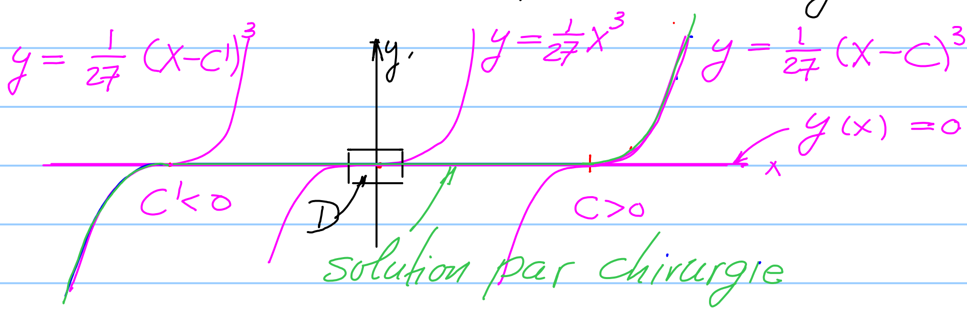
Contre-exemple: (seulement f continue ne suffit pas).

$$y' = |y|^{\frac{2}{3}} = f(x,y) \qquad (\text{continue sur } D = \mathbb{R}^2)$$

$y(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$ est une solution

$y(x) = \frac{1}{27}(x-c)^3$, $x \in \mathbb{R}$, est une solution pour tout $c \in \mathbb{R}$.

La condition initiale $y(0) = 0$ ne selectionne donc pas une solution unique, car $y(x) = 0$ et $y(x) = \frac{1}{27}x^3$ sont les deux des solutions qui satisfont $y(0) = 0$. Pire encore : il existe une infinité de solutions telles que $y(0) = 0$ qui peuvent être construites par "chirurgie":



<u>Solutions par chirurgie:</u> $y(x) = \begin{cases} \frac{1}{27}(x-C)^3, & x > C > 0 \\ \frac{1}{27}(x-C')^3, & x < C' < 0 \\ 0, & C' \leq x \leq C \end{cases}$

où les choix de $C' < 0$ et $C > 0$ sont arbitraires.

<u>Explication:</u>
Le théorème d'existence et d'unicité ne s'applique pas en $(0,0)$ car la fonction $f(x,y) = |y|^{\frac{2}{3}}$ (vue comme fonction de y) n'est pas différentiable en $(0,0)$.

<u>Remarque:</u> f continue suffit pour démontrer l'existence d'une solution (Théorème de Peano)