Peter Wittwer

28 février 2025

Analyse avancée II – Série 2B

Échauffement. (Linéarité)

Soient p et q deux fonctions continues sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ et soit l'équation différentielle linéaire du premier ordre $y' + p(x)y = q(x)$. Montrer que si y_1 et y_2 sont deux solutions quelconques de l'équation sur I, alors :

i) pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ telles que $\alpha + \beta = 1$ la fonction $y = \alpha y_1 + \beta y_2$ est aussi solution de l'équation.

ii) la fonction $y = y_1 - y_2$ est solution de l'équation homogène associée à $y' + p(x)y = q(x)$, c'est-à-dire de l'équation $y' + p(x)y = 0$.

Exercice 1. (Solution générale et problème de Cauchy)

Soit l'équation différentielle $2y^3 + 3xy^2y' = 0$. Déterminer

i) la solution générale.

ii) la solution maximale qui satisfait respectivement les condition initiales $y(1) = 2$, $y(1) = -2$, $y(-1) = 2$, $y(-1) = -2$ et $y(0) = 0$.

Exercice 2. (Familles de courbes orthogonales)

Trouver la famille des courbes orthogonales à la famille donnée et dessiner quelques membres de chaque famille.

i) $xy = c,\ c \in \mathbb{R}$ *ii*) $y^3 = cx^2,\ c \in \mathbb{R}$ *iii*) $x^2 + 2y^2 = c,\ c \in \mathbb{R}_+^*$

Exercice 3. (Équations linéaires)

Trouver la solution générale des équations suivantes :

i) $y' + 4y = 3\sin(2x)$ *ii*) $(1 + x^2)\, y' + xy = 4x\sqrt{1 + x^2}$

Exercice 4. (Équations de Bernoulli)

Trouver la solution générale des équations suivantes :

i) $y' - y = x\, y^4$ *ii*) $y' + 4y - 2(x+1)y^3 = 0$ *iii*) $y' + \dfrac{y}{x} = x^2y^3$