Peter Wittwer

Analyse avancée II – Corrigé de la série 1A

Échauffement.

i) La fonction $y(x) = 2$ est solution de l'équation. Pour $y \neq 2$ on a

$$\frac{dy}{dx} = y - 2 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dy}{y-2} = dx \qquad \Rightarrow \qquad \ln(|y-2|) = x + \tilde{C}, \quad \tilde{C} \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \qquad y - 2 = Ce^x, \qquad C \neq 0 \qquad \Rightarrow \qquad y = Ce^x + 2\,.$$

Avec $C = 0$, on a $y(x) = 2$. Ainsi la solution générale est $y(x) = Ce^x + 2$ avec $C \in \mathbb{R}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

ii) La fonction $y(x) = 0$ est une solution. Pour $y \neq 0$, on a

$$\frac{dy}{dx} = -xy \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dy}{y} = -xdx \qquad \Rightarrow \qquad \ln(|y|) = -\frac{1}{2}x^2 + \tilde{C}, \quad \tilde{C} \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \qquad y = Ce^{-\frac{1}{2}x^2}, \quad C \neq 0\,.$$

Comme le cas $C = 0$ correspond à $y(x) = 0$, la solution générale est $y(x) = Ce^{-\frac{x^2}{2}}$ avec $C \in \mathbb{R}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

iii) La fonction $y(x) = 0$ est une solution pour $x \in]-\infty, 0[$ et pour $x \in]0, \infty[$. Si $x, y \neq 0$ on a

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3y}{x} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dy}{y} = -\frac{3dx}{x} \qquad \Rightarrow \qquad \ln(|y|) = -3\ln(|x|) + \tilde{C}, \quad \tilde{C} \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \qquad |y| = \frac{C}{|x|^3}, \quad C \neq 0 \qquad \Rightarrow \qquad y = \pm\frac{C}{|x|^3} \qquad \Rightarrow \qquad y = \frac{C}{x^3}\,.$$

Comme $C = 0$ mène à $y(x) = 0$, la solution générale est $y(x) = \dfrac{C}{x^3}$ avec $C \in \mathbb{R}$ pour $x \in]-\infty, 0[$ et pour $x \in]0, \infty[$.

Exercice 1.

i) En écrivant $y' = \dfrac{dy}{dx}$ dans l'équation donnée, celle-ci devient

$$\frac{dy}{dx} = \lambda y \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{dy}{y} = \lambda dx\,.$$

On intègre alors des deux côtés et on obtient pour $x \in \mathbb{R}$

$$\ln(|y|) = \lambda x + \tilde{C} \quad \text{avec } \tilde{C} \in \mathbb{R}\,,$$

c'est-à-dire

$$|y(x)| = e^{\tilde{C}}e^{\lambda x}\,, \quad \text{i.e.} \qquad y(x) = Ce^{\lambda x} \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}\,.$$

Notez qu'on peut avoir $C = 0$ (même si $e^{\tilde{C}} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) parce que la fonction $y(x) = 0$ est aussi une solution de l'équation.

Remarque : Une équation différentielle de cette forme décrit une croissance (si $\lambda > 0$) ou décroissance (si $\lambda < 0$) exponentielle, un phénomène qui apparaît souvent dans la nature.

ii) En intégrant $\dfrac{dy}{\sqrt{y^2+1}} = dx$ des deux côtés on trouve $\operatorname{Argsh}(y) = x + C$ pour $C, x \in \mathbb{R}$. Il s'en suit que $y(x) = \sinh(x + C)$ pour $C, x \in \mathbb{R}$.

Exercice 2.

i) On procède par séparation des variables. En écrivant $y' = \dfrac{dy}{dx}$ l'équation devient

$$6(y-1)^2\,dy = x(3x+4)\,dx\,,$$

d'où, par intégration des deux fonctions polynomiales,

$$2(y-1)^3 = x^3 + 2x^2 + \tilde{C}, \qquad \tilde{C} \in \mathbb{R}.$$

La forme explicite de la solution y est donc

$$y(x) = 1 + f^{-1}\Big(x^2\big(\tfrac{1}{2}x+1\big) + C\Big), \qquad x \in I,\ C \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

où $f^{-1}(u)$ est la fonction réciproque de $f(x) = x^3$ et I est un intervalle ouvert à définir. Comme f est bijective sur $\mathbb{R}$, sa fonction réciproque f^{-1} est aussi définie sur $\mathbb{R}$, à savoir par

$$f^{-1}(u) = \operatorname{sgn}(u)|u|^{1/3}.$$

Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$ mais elle n'est pas dérivable en $u = 0$, ce qui fait que l'équation différentielle a plusieurs solutions $y(x)$ de la même forme (1) qui sont définies sur des intervalles ouverts différents. Ces intervalles I dépendent des racines réelles du polynôme $x^2\big(\frac{1}{2}x+1\big) + C$, chaque solution étant définie sur un intervalle ouvert sur lequel ce polynôme est du même signe.

La condition initiale $y(0) = 0$ implique que $0 = 1 + \operatorname{sgn}(C)|C|^{1/3}$, c'est-à-dire $C = -1$. On obtient donc la solution particulière (maximale)

$$y(x) = 1 - \Big|x^2\big(\tfrac{1}{2}x+1\big) - 1\Big|^{1/3} = 1 - \sqrt[3]{1 - x^2\big(\tfrac{1}{2}x+1\big)}\,, \qquad x \in \,]-\infty, x_0[\,,$$

où $x_0 > 0$ est l'unique solution réelle de l'équation $x^2\big(\frac{1}{2}x+1\big) - 1 = 0$.
(On peut voir que x_0 est l'unique solution et qu'elle est positive par une mini-étude de la fonction $g(x) = x^2\big(\frac{1}{2}x+1\big) - 1$.)

ii) On applique la même méthode:

$$y\,y' - e^{y^2-4x} = 0 \quad\Rightarrow\quad y\,e^{-y^2}dy = e^{-4x}dx \quad\Rightarrow\quad -\frac{1}{2}e^{-y^2} = -\frac{1}{4}e^{-4x} + \tilde{C}, \quad \tilde{C} \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow\quad e^{-y^2} = \frac{1}{2}e^{-4x} + C, \quad C \in \mathbb{R} \qquad\Rightarrow\qquad y^2 = -\ln\left(\left(\frac{1}{2}e^{-4x} + C\right)\right), \quad C \in \mathbb{R}$$

En fait, la constante C ne peut pas prendre toutes les valeurs dans $\mathbb{R}$ parce que $y^2 \geq 0$ et le logarithme doit être définie. Mais comme on ne s'intéresse pas à la solution générale ici, il n'est pas nécessaire de trouver le domaine exact de C, il suffira de trouver la valeur de C à partir de la condition initiale et puis le domaine de x en fonction.

La forme explicite de la solution y est alors

$$y(x) = \pm\sqrt{-\ln\big(\tfrac{1}{2}e^{-4x} + C\big)}.$$

La condition initiale $y(0) = \sqrt{\ln(2)}$ implique que le signe est positif, et, de plus,

$$\sqrt{\ln(2)} = +\sqrt{-\ln\left(\tfrac{1}{2} + C\right)} \qquad \Rightarrow \qquad C = 0.$$

La solution particulière pour la condition initiale donnée est donc

$$y(x) = \sqrt{4x + \ln(2)}$$

qui est à priori définie pour $x \geq -\frac{\ln(2)}{4}$. Or, $y'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{4x + \ln(2)}}$ n'est pas définie en $x = -\frac{\ln(2)}{4}$. La solution maximale pour la condition initiale donnée est donc

$$y(x) = \sqrt{4x + \ln(2)}, \qquad x \in \left]-\tfrac{\ln(2)}{4}, \infty\right[.$$

Exercice 3.

i) Pour $\varepsilon = 0$, la solution maximale est $y_0(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$. Pour $\varepsilon > 0$ on utilise la séparation des variables

$$\frac{dy}{dx} = y^{1+\varepsilon} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{dy}{y^{1+\varepsilon}} = dx \ ,$$

ce qui donne, après intégration, la solution générale

$$-\frac{1}{\varepsilon\, y^{\varepsilon}} = x + C \ , \qquad \text{avec } C \in \mathbb{R}.$$

La condition initiale implique que

$$-\frac{1}{\varepsilon} = C \ .$$

Ainsi

$$y^{-\varepsilon} = -\varepsilon\left(x - \frac{1}{\varepsilon}\right)$$

et la solution particulière recherchée est donc

$$y_\varepsilon(x) = (1 - \varepsilon x)^{-\frac{1}{\varepsilon}} \ , \qquad x \in \left]-\infty, \frac{1}{\varepsilon}\right[\ .$$

(L'intervalle de définition pour x s'obtient à partir du fait que $1 - \varepsilon x$ doit être positif.)

ii) On a vu que le domaine de définition de y_ε pour $\varepsilon > 0$ est $\left]-\infty, \frac{1}{\varepsilon}\right[$ et que celui de y_0 est $\mathbb{R}$. Donc si $b \leq 0$, l'intervalle A est dans le domaine de définition de y_ε pour tout $\varepsilon \geq 0$ et $\varepsilon_0 = \infty$. Si $b > 0$, l'intervalle A est dans le domaine de définition de y_ε pour autant que $b < \frac{1}{\varepsilon}$, c'est-à-dire pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0 = \frac{1}{b}$.

iii) Pour montrer que $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} |y_\varepsilon(x) - y_0(x)| = 0$, il suffit de montrer que $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} y_\varepsilon(x) = y_0(x)$. On a que

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \to 0} y_\varepsilon(x) &= \lim_{\varepsilon \to 0} (1 - \varepsilon x)^{-\frac{1}{\varepsilon}} \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \exp\left[-\frac{1}{\varepsilon} \ln(1 - \varepsilon x)\right] .
\end{aligned}$$

Comme la fonction exponentielle est continue, on peut échanger l'évaluation de la fonction et la limite et l'on obtient

$$\lim_{\varepsilon\to 0} y_\varepsilon(x) = \exp\left[\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{\ln(1-\varepsilon x)}{\varepsilon}\right)\right].$$

Puisque $\lim_{\varepsilon\to 0}\ln(1-\varepsilon x) = \ln(1) = 0$ et $\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon = 0$, on peut appliquer Bernoulli-l'Hospital [1] pour calculer la limite, ce qui donne

$$\lim_{\varepsilon\to 0} y_\varepsilon(x) = \exp\left[\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{\frac{-x}{1-\varepsilon x}}{1}\right)\right] = \exp\left[\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{x}{1-\varepsilon x}\right] = \exp(x) = y_0(x)\ .$$

Exercice 4.

On récrit l'équation

$$\frac{dy}{dt} = y(a-by) \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{dy}{y(a-by)} = dt \qquad \Leftrightarrow \qquad \int \frac{dy}{y(a-by)} = \int dt$$

On décompose le terme de gauche en éléments simples :

$$\frac{A}{y} + \frac{B}{a-by} = \frac{A(a-by)+By}{y(a-by)} \qquad \Leftrightarrow \qquad 1 = A(a-by)+By = Aa-(Ab-B)y\,,$$

donc $A = \frac{1}{a}$ et $B = \frac{b}{a}$. Ainsi

$$\int \frac{1}{y(a-by)}\ dy = \int \frac{1}{ay}\ dy + \int \frac{b}{a(a-by)}\ dy = \frac{1}{a}\ln(|y|) - \frac{1}{a}\ln(|a-by|)\,,$$

et donc on a pour $C > 0$

$$\frac{1}{a}\ln(|y|) - \frac{1}{a}\ln(|a-by|) = t + \ln(C) \qquad \Leftrightarrow \qquad \left|\frac{y}{a-by}\right|^{1/a} = Ce^t \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{y}{a-by} = \pm C^a e^{at}$$

On pose alors $C^* := \pm C^a \in \mathbb{R}^*$ et on continue

$$\frac{y}{a-by} = C^* e^{at} \qquad \Leftrightarrow \qquad y = C^* e^{at}(a-by) \qquad \Leftrightarrow \qquad y(1+bC^*e^{at}) = aC^*e^{at}$$

$$\Leftrightarrow \qquad y = \frac{aC^*e^{at}}{1+bC^*e^{at}} = \frac{aC^*}{e^{-at}+bC^*} = \frac{a}{\frac{e^{-at}}{C^*}+b} = \frac{\frac{a}{b}}{1+\frac{e^{-at}}{bC^*}}$$

On détermine la valeur de C^* pour condition initiale $y(0) = y_0$:

$$y(0) = \frac{\frac{a}{b}}{1+\frac{1}{bC^*}} = \frac{aC^*}{bC^*+1} = y_0 \qquad \Leftrightarrow \qquad aC^* = y_0(bC^*+1) \qquad \Leftrightarrow \qquad C^* = \frac{y_0}{a-by_0}$$

[1] En général il est préférable d'éviter la règle de Bernoulli-l'Hospital et d'utiliser les développements limités. On a (formule de Taylor avec reste) que $\ln(1+z) = z + \mathcal{o}(z)$ autour de $z = 0$, ce qui donne que $\frac{\ln(1-\varepsilon x)}{\varepsilon} = -x + \frac{\mathcal{o}(\varepsilon x)}{\varepsilon}$ lorsque $\varepsilon \to 0$, d'où le résultat. De plus, dans le présent cas, on aurait d'ailleurs aussi pu utiliser directement que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(1-\varepsilon x)^{-\frac{1}{\varepsilon}} = \left(\lim_{\varepsilon\to 0}(1-\varepsilon x)^{-\frac{1}{\varepsilon x}}\right)^x = \mathrm{e}^x.$$

La solution cherchée est donc

$$y(t) = \frac{\frac{a}{b}}{1 + \frac{e^{-at}(a-by_0)}{by_0}} = \frac{\frac{a}{b}}{1 + \left(\frac{a}{by_0} - 1\right)e^{-at}}$$

comme vu au cours.
Noter que pour les conditions initiales $y_0 = 0$ ou $y_0 = \frac{a}{b}$, les solutions de l'équation différentielle sont des fonctions constantes, à savoir $y(t) = 0$ et $y(t) = \frac{a}{b}$ respectivement.
La croissance de la solution $y(t)$ est déterminée par le facteur $\lambda := \frac{a}{by_0} - 1$ devant l'exponentielle. Si $y_0 > \frac{a}{b}$, alors $\lambda < 0$ et donc $y(t)$ est décroissante. Si $y_0 < \frac{a}{b}$ on a $\lambda > 0$ et $y(t)$ est croissante. Puisque $\lim_{t\to\infty} y(t) = \frac{a}{b}$, la droite $y = \frac{a}{b}$ est une asymptote horizontale et n'est donc jamais intersectée par $y(t)$.

Exercice 5.

Observons d'abord que les fonctions constantes $y(x) = 0$ et $y(x) = 1$ sont des solutions pour $x \in \mathbb{R}$.
Si $x, y \neq 0$ et $x, y \neq 1$, l'équation différentielle donnée s'écrit

$$\frac{dy}{y(y-1)} = \frac{dx}{x(x-1)} \ ,$$

puis, en décomposant chaque terme en éléments simples:

$$\left(-\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1}\right) dy = \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}\right) dx \ .$$

En intégrant les deux côtés on obtient

$$\begin{aligned} -\ln|y| + \ln|y-1| &= -\ln|x| + \ln|x-1| + \ln(\tilde{C}), \quad \tilde{C} > 0, \\ \Leftrightarrow \qquad \ln\left|\frac{y-1}{y}\right| &= \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| + \ln(\tilde{C}) \quad \tilde{C} > 0, \\ \Leftrightarrow \qquad \left|\frac{y-1}{y}\right| &= \tilde{C}\left|\frac{x-1}{x}\right| \quad \tilde{C} > 0, \end{aligned} \tag{2}$$

L'équation (2) est équivalente à

$$\frac{y-1}{y} = C\,\frac{x-1}{x}, \quad C \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \ , \tag{3}$$

car, si un couple (x, y) satisfait l'équation (2) pour un certain $\tilde{C}$, il satisfait aussi l'équation (3) avec $C = \tilde{C}$ ou $C = -\tilde{C}$, et si un couple (x, y) satisfait l'équation (3) pour un certain C, il satisfait aussi l'équation (2) pour $\tilde{C} = |C|$.
A partir de (3) on trouve l'expression explicite de y en fonction de x,

$$Cy(x-1) = x(y-1) \qquad \Rightarrow \qquad y(Cx - C - x) = -x \qquad \Rightarrow \qquad y(x) = \frac{x}{(1-C)x + C} \ .$$

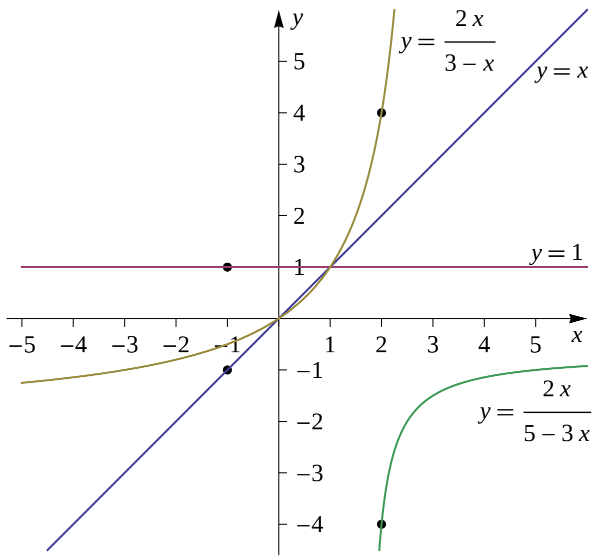
Pour $C \neq 0$ et $C \neq 1$ la fonction $y(x)$ définit deux solutions, une sur l'intervalle $\left]-\infty, \frac{C}{C-1}\right[$ et une sur l'intervalle $\left]\frac{C}{C-1}, \infty\right[$. (Le dénominateur de y s'annule en $x = \frac{C}{C-1}$ dans ce cas.)
Pour $C = 0$, on a $y(x) = 1$ et pour $C = 1$, on a $y(x) = x$. Tout comme la solution triviale $y(x) = 0$, ces deux solutions sont définies pour $x \in \mathbb{R}$. La solution générale de l'équation donnée est donc

$$
\begin{array}{lll}
y(x) = \dfrac{x}{(1-C)x + C}\,, & C \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}\,, & x \in \left]-\infty, \frac{C}{C-1}\right[\text{ ou } x \in \left]\frac{C}{C-1}, \infty\right[, \\
y(x) = 1\,, & C = 0\,, & x \in \mathbb{R}, \\
y(x) = x\,, & C = 1\,, & x \in \mathbb{R}, \\
y(x) = 0\,, & \text{-} & x \in \mathbb{R}.
\end{array}
$$

Pour trouver les solutions particulières pour les conditions initiales $y(x_0) = y_0$ données, on met la condition initiale dans la solution générale et on résout pour C. Les solutions sont:

$$
\begin{array}{lllllll}
x_0 = -1,\ y_0 = -1 & \Rightarrow & C = 1 & \Rightarrow & y = x, & x \in \mathbb{R} \\
x_0 = -1,\ y_0 = 1 & \Rightarrow & C = 0 & \Rightarrow & y = 1, & x \in \mathbb{R} \\
x_0 = 2,\ y_0 = 4 & \Rightarrow & C = \frac{3}{2} & \Rightarrow & y = \frac{2x}{3-x}, & x \in]-\infty, 3[^* \\
x_0 = 2,\ y_0 = -4 & \Rightarrow & C = \frac{5}{2} & \Rightarrow & y = \frac{2x}{5-3x}, & x \in]\frac{5}{3}, \infty[^*
\end{array}
$$

*On a choisi l'intervalle qui contient x_0.



Graphe des solutions (les points correspondent aux conditions initiales):

Exercice 6.

La fonction $u(t)$ qui satisfait pour $t \in \mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$u' + u^2 \sin(t) = 0$$

avec la condition initiale $u(0) = \frac{1}{4}$ vérifie aussi :

- [ ] $u(\pi) = \dfrac{1}{2}$
- [ ] $u(\pi) = \dfrac{e^2}{4}$
- [x] $u(\pi) = \dfrac{1}{6}$
- [ ] $u(\pi) = \dfrac{1}{4\,e^2}$