Peter Wittwer

Analyse avancée II – Série 1A

Échauffement. (Solutions générales)

Trouver les solutions générales des équations différentielles suivantes en les résolvant :

i) $y' = y - 2$ *ii)* $y' = -xy$ *iii)* $y' + \dfrac{3}{x}\, y = 0$

Exercice 1. (Séparation des variables)

Trouver la solution générale de chacune des équations suivantes :

i) $y' = \lambda y$, où $\lambda \in \mathbb{R}$ *ii)* $y' = \sqrt{y^2 + 1}$

Exercice 2. (Équations à variables séparées)

Pour chacune des équations différentielles ci-dessous, trouver la solution maximale pour la condition initiale donnée.

i) $x(3x+4) - 6(y-1)^2\, y' = 0$ $y(0) = 0$

ii) $y\, y' - e^{y^2 - 4x} = 0$ $y(0) = \sqrt{\ln(2)}$

Exercice 3. (Lois de croissance)

Soit $\varepsilon \geq 0$, et soit $A = [a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervalle fermé arbitraire.

i) Trouver la solution maximale y_ε de l'équation différentielle $y' = y^{1+\varepsilon}$ pour la condition initiale $y(0) = 1$.

ii) Montrer qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$, l'intervalle A soit contenu dans le domaine de définition de y_ε.

iii) Montrer que $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} |y_\varepsilon(x) - y_0(x)| = 0$ pour tout $x \in A$.

Exercice 4. (Modèle de Verhulst)

Résoudre par séparation des variables l'équation différentielle du modèle de Verhulst pour la croissance d'une population, c'est-à-dire

$$y' = y(a - by), \qquad a, b > 0\,,$$

pour la condition initiale $y(0) = y_0$.
Expliquer le comportement respectif de la solution pour $y_0 > \frac{a}{b}$ et pour $y_0 < \frac{a}{b}$.

Ex. 5 et 6 au verso.

Exercice 5. (Solutions maximales)

Déterminer la solution générale de l'équation différentielle

$$x(x-1)y' - y(y-1) = 0$$

et dessiner le graphe des solutions maximales pour les conditions initiales suivantes :

x_0	-1	-1	2	2
y_0	-1	1	4	-4

Exercice 6. (QCM : séparation des variables)

La fonction $u(t)$ qui satisfait pour $t \in \mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$u' + u^2 \sin(t) = 0$$

avec la condition initiale $u(0) = \frac{1}{4}$ vérifie aussi :

- ☐ $u(\pi) = \dfrac{1}{2}$
- ☐ $u(\pi) = \dfrac{e^2}{4}$
- ☐ $u(\pi) = \dfrac{1}{6}$
- ☐ $u(\pi) = \dfrac{1}{4\,e^2}$