1.3. ED linéaires du premier ordre

Prérequis : algèbre linéaire, structure de l'ensemble des solutions de $\boxed{Av=b}$, A une matrice $n\times n$, v et b des vecteurs dans $\mathbb{R}^n$.

1.3.1. Définitions

Une ED linéaire du premier ordre est de la forme

$$\boxed{y' + p(x)\,y = q(x) \qquad (*)}$$

avec p et q des fonctions données continues sur un intervalle ouvert I.

Remarque : $(*) \Leftrightarrow E(x,y,y') = y' + p(x)\,y - q(x) = 0$

Terminologie homogène/inhomogène

- si $q=0$ l'équation $(*)$ est dite homogène
- si $q \neq 0$ l'équations $(*)$ est dite inhomogène et $y'+p(x)\,y=0$ est appelée l'équation homogène associée à $(*)$.

On définit l'application

$$L : C^1(I) \to C^0(I), \quad \eta \mapsto L(\eta)$$

par :

$$\big(L(\eta)\big)(x) := \eta'(x) + p(x)\,\eta(x),$$

et l'équation $(*)$ devient (on écrira souvent $L\eta$ au lieu de $L(\eta)$) :

$$\boxed{Ly = q} \qquad (\text{analogue à } Av=b)$$

$C^1(I)$ et $C^0(I)$ sont des espaces vectoriels (de dimension ∞) et L est linéaire, c'est-à-dire $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\eta_1, \eta_2 \in C^1(I)$

$$L(\alpha \eta_1 + \beta \eta_2) = \alpha \cdot L(\eta_1) + \beta L(\eta_2)$$

(voir aussi série 2B, échauffement)

$$\left(\alpha \eta_1(x) + \beta \eta_2(x)\right)' + p(x)\left(\alpha \cdot \eta_1(x) + \beta \eta_2(x)\right)$$
$$= \alpha \cdot \left(\eta_1'(x) + p(x)\, \eta_1(x)\right) + \beta\left(\eta_2'(x) + p(x)\, \eta_2(x)\right)$$

Le noyau de L est de dimension 1 (voir plus loin) et puisque l'équation est linéaire la solution générale de $(*)$ est de la forme

$$\boxed{\left\{ \forall C \in \mathbb{R},\ y(x) = y_p(x) + \underbrace{C\, y_1(x)}_{= y_h(x)},\ x \in I \right\} \ (**)}$$

où y_p est <u>une solution quelconque du problème inhomogène</u>, appelée solution particulière, et y_1 <u>une fonction quelconque non nulle dans le noyau de L</u> : $L y_1 = y_1' + p(x)\, y_1 = 0$. <u>Nous verrons plus loin (théorème d'unicité)</u> que, vu que $y(x) = 0$, $x \in I$, est une solution du problème homogène, aucune autre solution du problème homogène ne peut prendre la valeur zéro sur I.

1.3.2. Méthode de résolution générale

i) L'équation homogène peut être résolue par séparation des variables (au vu de (**) il suffit de trouver une solution non nulle,
On a :

$$y' + p(x)\, y = 0 \iff \frac{dy}{y} = -p(x)\,dx$$

$$\ln(|y|) = -P(x)$$

avec P une primitive quelconque de p.

Donc
$$\boxed{y_1(x) = e^{-P(x)}, \quad x \in I} \quad \neq 0,\ \forall x \in I\ !$$

ii) Recherche d'une solution particulière

a) Méthode (dite) de la variation de la constante

On pose $y_p(x) = C(x)\, y_1(x)$, avec $C(x)$ une fonction inconnue et l'on substitue dans l'équation inhomogène :

$$\left(C(x)\, y_1(x)\right)' + p(x)\left(C(x)\, y_1(x)\right) = q(x)$$

$$C'(x) \cdot y_1(x) + \underbrace{C(x)\, y_1'(x) + p(x)\, C(x)\, y_1(x)}_{= C(x) \cdot \underbrace{(y_1'(x) + p(x)\, y_1(x))}_{=0 \text{ par définition de } y_1}} = q(x)$$

un TEST !

on obtient donc

$$\boxed{C'(x)\, y_1(x) = q(x)}$$

et donc

$$C'(x) = \frac{1}{y_1(x)}\, q(x) = \underbrace{e^{P(x)}\, q(x)}_{\text{continue sur } I}$$

et on obtient

$$C(x) = \int e^{P(x)} q(x)\, dx$$

et

$$\boxed{y_p(x) = \left(\int e^{P(x)} \cdot q(x)\, dx\right) \cdot e^{-P(x)} \quad , x \in I}$$

$\boxed{\text{De i) et ii) on obtient la solution générale } (**)}$

Attention: y_1 et y_p ne sont pas uniques, ils dépendent du choix des primitives.

b) Méthode des coéfficients indéterminés

$\boxed{\text{attention : nécessite } p(x) = \text{const.} = p \in \mathbb{R}.}$

Cette méthode s'applique si $p(x) = p$ et si $q(x)$ est une combinaison linéaire de polynômes, fonctions exponentielles, sin et cos et produids de ces fonctions c'est-à-dire si $q(x) \in \text{vect}\{q_i(x)\}$, voir le tableau pour les fonctions q_i admises. Par linéarité, si

$$q(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i\, q_i(x) \quad , a_i \in \mathbb{R}$$

et si $L\, y_{P,i} = q_i$, $i = 1, \dots, m$, alors

$$y_P(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i\, y_{P,i}(x)$$

satisfait $Ly = q$. Pour les $y_{p,i}(x)$ on a le tableau suivant:

Soit $r \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$:

fonction $q_i(x)$	$\longrightarrow$ fonction $y_{p,i}(x) \in$
x^r	$\mathrm{vect}\{x^r, x^{r-1}, \dots, x, 1\}$
$x^r e^{\lambda x}$, $\lambda \neq -p$	$\mathrm{vect}\{x^r e^{\lambda x}, \dots, x e^{\lambda x}, e^{\lambda x}\}$
cas dit résonant $\left.\right\}$ $x^r e^{-px}$	$\mathrm{vect}\{x^{r+1} e^{-px}, \dots, x^1 e^{-px}\}$
$x^r \sin(\alpha x) e^{\lambda x}$ ou $x^r \cos(\alpha x) e^{\lambda x}$	$\mathrm{vect}\{x^r \sin(\alpha x) e^{\lambda x}, \dots, \sin(\alpha x) e^{\lambda x}, x^r \cos(\alpha x) e^{\lambda x}, \dots, \cos(\alpha x) e^{\lambda x}\}$.

Explication: on écrit l'ED sous la forme

$$p \cdot y(x) = q(x) - y'(x)$$

et compare les fonctions des deux côtés de l'équation

1.3.3. Exemples

1) $\underbrace{y' + x^2 y}_{Ly} = \underbrace{x^2}_{q}$, $\quad p(x) = x^2$, $q(x) = x^2$, $I = \mathbb{R}$.
($\Rightarrow$ y définie sur $\mathbb{R}$).

i) problème homogène: $y' + x^2 y = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{y} = -x^2 dx, \quad \ln(|y|) = -\frac{1}{3}x^3$$

$$y_h(x) = e^{-\frac{1}{3}x^3}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

ii) solution particulière (variation de la constante)

$$y_p(x) = C(x)e^{-\frac{1}{3}x^3}$$ à substituer dans l'équation

$$C'(x)\cdot e^{-\frac{1}{3}x^3} + \underbrace{C(x)e^{-\frac{1}{3}x^3}(-x^2) + x^2 C(x)e^{-\frac{1}{3}x^3}}_{\substack{\text{TEST} \\ =0}} = x^2$$

$$C'(x)e^{-\frac{1}{3}x^3} = x^2 \Rightarrow C'(x) = e^{\frac{1}{3}x^3}\cdot x^2$$

$$\Rightarrow C(x) = e^{\frac{1}{3}x^3} \Rightarrow y_p(x) = e^{\frac{1}{3}x^3}\cdot e^{-\frac{1}{3}x^3} = 1$$ deviner si possible !

Solution générale

$$\boxed{\left\{\forall C\in\mathbb{R},\ y(x) = \overset{y_p(x)}{1} + \underbrace{Ce^{-\frac{1}{3}x^3}}_{=y_h(x)},\ x\in\mathbb{R}\right\}}$$

2) Méthode b), voir la série 2B, Ex. 3 i)

3) Voir série 2B, Ex 3 ii) attention à mettre sous la forme $y' + p(x)y = q(x)$

1.4. Exemples d'ED du premier ordre qui ne sont pas linéaires et ne sont pas à variables séparées

1.4.1. Equation de Bernoulli (série 2B, Ex. 4)

C'est une équation de la forme

$$\boxed{y' + p(x)y = q(x)y^m,\quad m\in\{2,3,\dots\}\subset\mathbb{N}^* \quad (*)}$$

où $p(x)$ et $q(x)$ sont supposées continues sur un intervalle ouvert $I\subset\mathbb{R}$.

i) $y(x) = 0,\ x \in I$ est une solution.

ii) nous posons $\boxed{u(x) = y(x)^{1-m}}$ (voir la discussion sous le point iii)).

On a $u' = (1-m)\, y^{-m}\, y'$, et si on multiplie l'équation (*) avec $(1-m)\, y^{-m}$ on obtient l'équation

$$\boxed{u' + (1-m)\, p(x)\, u = (1-m)\, q(x)}$$

C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre pour la fonction u (sur I) que l'on sait résoudre.

iii) pour remonter à $y(x)$ à partir de $u(x)$ il faut distinguer deux cas:

- <u>si m est impair</u>, il faut restraindre $u(x)$ à des intervalles ouverts où $u(x) > 0$. Chacun de ces intervalles donne une solution $y(x) = u(x)^{\frac{1}{1-m}}$.

- <u>si m est pair</u>, il faut décomposer I en des intervalles où $u(x) > 0$ et $u(x) < 0$. On a

$y(x) = u(x)^{\frac{1}{1-m}}$ sur un intervalle où $u(x) > 0$

$y(x) = -\left(-u(x)\right)^{\frac{1}{1-m}}$ sur un intervalle ou $u(x) < 0$.

1.4.2. Equations homogènes  (série 3B, échauff. + Ex. 2)

$$\boxed{\text{A ne pas confondre avec les équations } \underline{\text{linéaires}} \text{ homogènes}}$$

Une équation homogène est de la forme

$$\boxed{y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (*)}$$

<u>Méthode de résolution</u> : on pose

$$\boxed{y(x) = x \cdot v(x)}$$

et on cherche la fonction $v(x)$: on a

$$y'(x) = v(x) + x \cdot v'(x)$$

et on obtient à partir de $(*)$ l'équation suivante pour v :

$$v + x v' = f(v)$$

que l'on peut résoudre par séparation des variables.

1.4.3. Equation de Riccati (série 3B, Ex. 3).

C'est une équation de la forme ($y_R \leftarrow$ Riccati)

$$\boxed{y_R' = a(x)\, y_R^2 + b(x)\, y_R + c(x)} \qquad (*)$$

avec $a(x), b(x), c(x)$ des fonctions continues sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$. Si c est identiquement zéro c'est une équation de Bernoulli $(m=2)$.

On ne sait pas résoudre, sauf si on connaît déjà une solution $y_1(x)$. Dans ce cas on pose

$$y_R(x) = y_1(x) + \frac{1}{u(x)}$$

avec $u(x)$ une nouvelle fonction inconnue et on substitue dans $(*)$.

1.4.4. Equation de Clairaut (série 3B, Ex. 4)

Soit l'ED

$$y = xy' + f(y')$$

avec $f \in C^1(\mathbb{R})$. Alors on pose $y' = p$ et donc

$$y = x \cdot p + f(p) \qquad (*)$$

La dérivée de $(*)$ par rapport à x donne l'équation

$$p = p + xp' + f'(p)\,p'$$

ou encore

$$(x + f'(p))\,p' = 0$$

i) $p' = 0$: $\Rightarrow p(x) = C \underset{(*)}{\Longrightarrow} y = C \cdot x + f(C)$

(une famille de droites)

ii) $x + f'(p) = 0$: donc, et en utilisant (*).

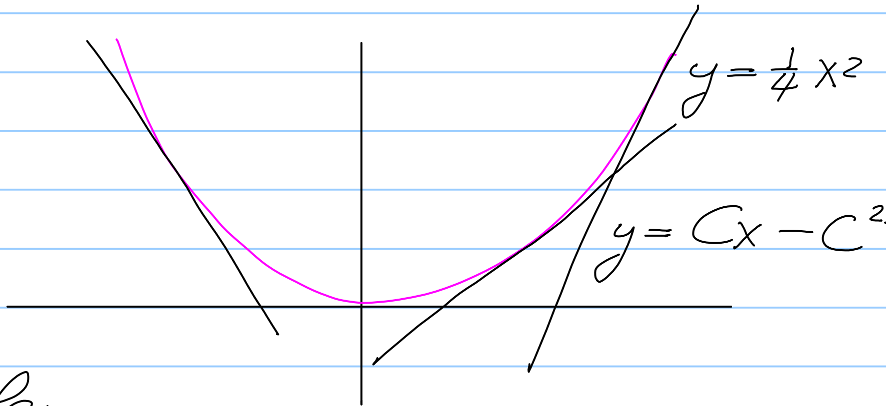
$$x = -f'(p) \qquad \equiv x_p$$

$$y = -p \cdot f'(p) + f(p) \qquad \equiv y_p$$

Ces deux équations définissent une courbe (voir plus loin) dans le plan, paramétrisée par $p \in \mathbb{R}$ (voir la note de bas de page).

Exemple

$$y'^2 - xy' + y = 0$$



solution générale:

$$\left\{ y(x) = \frac{1}{4}x^2,\ x \in \mathbb{R};\ \forall C \in \mathbb{R},\ y(x) = Cx - C^2,\ x \in \mathbb{R} \right\}.$$

La solution $\frac{1}{4}x^2$ est appelée "l'enveloppe". Pour les points de l'enveloppe il y a violation du théorème d'unicité (deux solutions passent par le même point).

Si la courbe paramétrisée par p est de sorte que l'on puisse aussi la voir comme le graphe d'une fonction $y(x)$, i.e., telle que $y(x_p) = y_p$, alors on aura que $y'(x_p) = p$.