1.2. Equations différentielles du premier ordre

$$E(x,y,y')=0$$

1.2.1. Séparation des variables

Une ED est dite à variables séparées, si on peut l'écrire sous la forme

$$\boxed{E(x,y,y') = g(x) - f(y)\cdot y' = 0 \quad (*)}$$

pour certaines fonctions f et g.

Résolution de l'équation (on suppose f, g continues sur $\mathbb{R}$)

Soit F une primitive de f et G une primitive de g. Alors toute fonction $y :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 qui satisfait pour une constante $C \in \mathbb{R}$ l'équation

$$\boxed{G(x) - F(y(x)) = C \quad , \; x \in]a,b[\qquad (**)}$$

est une solution de $(*)$.

Remarque: donné une solution sous forme implicite (on a une equation pour $y(x)$) il faut encore (si possible) résoudre pour $y(x)$ (isoler $y(x)$ dans l'équation $(**)$) pour obtenir la (les) solution(s) sous forme explicite (sur $]a,b[$).

Vérification de $(**)$: $\frac{d}{dx}(**) \Rightarrow$

$$G'(x) - F'(y(x))\, y'(x) = 0$$

et donc $g(x) - f(y(x))\, y'(x) = 0$, puisque par définition de F et G on a $F' = f$ et $G' = g$. $\square$

Procédée de résolution pratique (recette de cuisine)

On écrit $y' = \frac{dy}{dx}$ que l'on manipule comme une fraction de "dy" sur "dx". Si

$$g(x) - f(y)\frac{dy}{dx} = 0 \quad , \quad \cdot dx$$

$$g(x)\, dx = f(y)\, dy \quad , \quad \int$$

$$\int g(x)\, dx = \int f(y)\, dy + C \quad , \quad C \in \mathbb{R}$$

ici on traite y comme variable d'intégration

$$G(x) = F(y) + C \quad \Rightarrow (**)$$

ici y est une fonction de x

Exemple 1:

$$\boxed{y' = y} \underset{y \neq 0}{\Longleftrightarrow} 1 - \frac{1}{y} y' = 0 \quad \text{donc } g(x) = 1,\ f(y) = \frac{1}{y}.$$

> **Remarque:** on verra plus loin que puisque $y(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$ est une solution de l'équation $y' = y$, aucune autre solution ne peut s'annuler, c'est-à-dire ou bien $\forall x \in \mathbb{R}, y(x) = 0$ ou $\forall x \in \mathbb{R}, y(x) \neq 0$

$$\boxed{y' = y} \underset{\text{recette}}{\Longrightarrow} \frac{dy}{dx} = y \overset{y \neq 0}{\Longleftrightarrow} \frac{dy}{y} = dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{y}\, dy = \int 1 \cdot dx + C \quad , \quad C \in \mathbb{R}$$

logarithme népérien : $e^{\ln(x)} = x, \ \forall x > 0$

$$\Rightarrow \ln(|y|) = x + C \quad , \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow |y(x)| = e^{x+C} = e^{C} \cdot e^{x} \quad , \ x \in \mathbb{R} \ , \ C \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow |y(x)| = C \cdot e^{x} \quad , \ x \in \mathbb{R} \ , \ C > 0$$

$$\Rightarrow y(x) = \pm C e^{x} \quad , \ x \in \mathbb{R} \ , \ C > 0$$

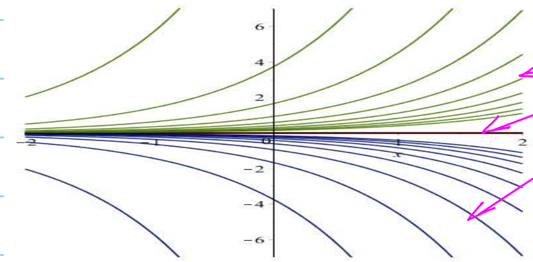
$$\Rightarrow y(x) = C \cdot e^{x} \quad , \ x \in \mathbb{R} \ , \quad C \in \mathbb{R}^*$$

Il manque la solution $y(x) = 0 = C \cdot e^{x}$ pour $C = 0$

La <u>solution générale</u> est donc

en supposant que l'on ait trouvé toutes les solutions.

$$\{ \forall C \in \mathbb{R} , \ y(x) = C \cdot e^{x}, \ x \in \mathbb{R} \}$$



graphes des solutions $\longleftrightarrow$ $\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \cdot e^{-x} = C \}$

<u>Exemple 2</u>

Soit l'ED $\boxed{y' = y^2}$. Déterminer.

a) la solution générale

b) la solution maximale qui satisfait la CI $y(0) = y_0 \in \mathbb{R}$, avec y_0 donné.

a) $y(x) = 0 \ , \ x \in \mathbb{R}$ est une solution

<u>voir Analyse I</u>. ceci veut dire $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto y(x) = 0$

l'équation est à variables séparées.

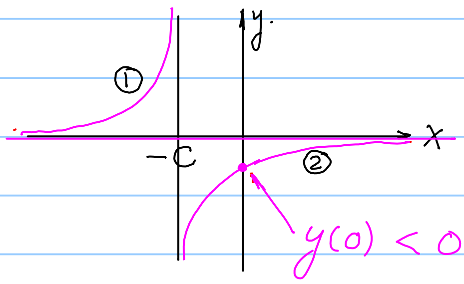
$$\boxed{\frac{dy}{dx} = y^2 \overset{y\neq 0}{\Longleftrightarrow} \frac{dy}{y^2} = dx \Rightarrow -\frac{1}{y} = x + C, \ C\in\mathbb{R}}$$

$$y(x) = -\frac{1}{x+C}$$

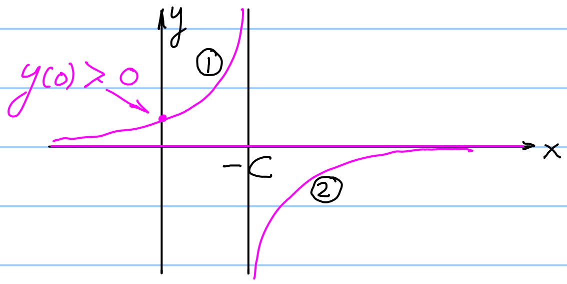
<u>La solution générale est donc :</u>

$$\left\{ \begin{array}{ll} & y(x) = 0, \quad x\in\mathbb{R}; \\ ① & \forall C\in\mathbb{R}, \ y(x) = \dfrac{-1}{x+C}, \quad x\in\,]-\infty, -C[\,; \\ ② & \forall C\in\mathbb{R}, \ y(x) = \dfrac{-1}{x+C}, \quad x\in\,]-C, \infty[\end{array} \right\}$$

<u>pour $C>0$</u>



<u>pour $C<0$</u>



<u>b) CI $y(0) = y_0$, avec $y_0\in\mathbb{R}$ donné</u>

Pour $\boxed{y_0 = 0}$ on obtient la solution $\boxed{y(x) = 0, \ x\in\mathbb{R}}$

Pour $\boxed{y_0 < 0}$ on obtient une solution du type ② (voir le dessin), avec

$$y(0) = -\frac{1}{C} \overset{!}{=} y_0 \Rightarrow C = -\frac{1}{y_0}.$$

Ceci donne : $\boxed{y(x) = \dfrac{-1}{x - \frac{1}{y_0}} = \dfrac{y_0}{1 - xy_0}, \quad x\in\,]\tfrac{1}{y_0}, +\infty[}$

Pour $\boxed{y_0 > 0}$ on obtient une solution du type ① (voir le dessin), avec $y(0) = -\dfrac{1}{C} \overset{!}{=} y_0 \Rightarrow C = -\dfrac{1}{y_0}$

Ceci donne : $\boxed{y(x) = \frac{-1}{x - \frac{1}{y_0}} = \frac{y_0}{1 - x y_0} \quad , x \in]-\infty, \frac{1}{y_0}[}$

La solution maximale avec CI $y(0) = y_0$ est donc:

$$\begin{cases} y(x) = 0 \quad , & x \in \mathbb{R} \quad , \text{ si } y_0 = 0 \\ y(x) = \frac{y_0}{1 - x y_0} \quad , & x \in]-\infty, \frac{1}{y_0}[\quad , \text{ si } y_0 > 0, \\ y(x) = \frac{y_0}{1 - x \cdot y_0} \quad , & x \in]\frac{1}{y_0}, \infty[\quad , \text{ si } y_0 < 0 \end{cases}$$

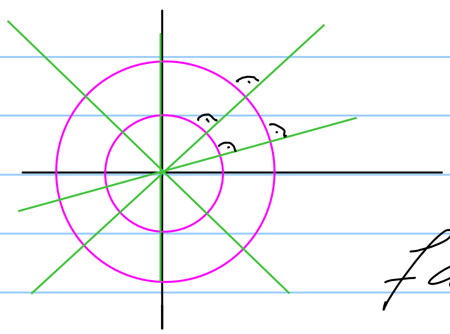
Exemple 3 voir la série B2, Ex. 1 (type Examen)

1.2.2. Familles de courbes orthogonales

But: donné une famille de courbes, trouver la famille des courbes orthogonales. (voir série B2, Ex. 2)

Exemple: famille donnée, cercles cocentriques, $x^2 + y^2 = C \quad , C > 0$

à lire $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = C\}$.



famille recherchée, demi-droites par l'origine

Lien avec les équations différentielles: localement on a (à des exceptions près, voir théorème des fonctions implicites plus loin dans le cours) pour un membre de la famille des cercles:

$$x^2 + y(x)^2 = C \quad , \quad C > 0$$

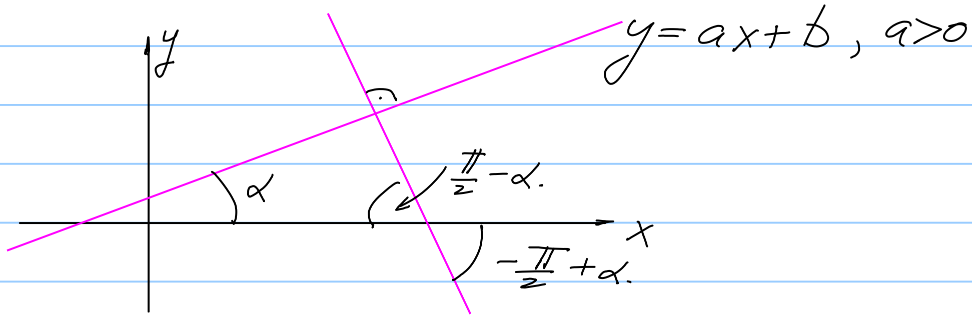
et donc, en dérivant par rapport à x :

$$\boxed{2x + 2\cdot y(x)\cdot y'(x) = 0} \qquad (*)$$

C'est une équation différentielle qui a des familles de demi-cercles comme solution générale (résoudre l'équation $x + y y' = 0$!)

Quelle est l'équation différentielle qui correspond à la famille des courbes orthogonales ?

<u>Rappel:</u> condition d'orthogonalité pour deux droites :



$$\tan\left(-\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \frac{\sin\left(-\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos\left(-\frac{\pi}{2}+\alpha\right)} = \frac{-\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = -\frac{1}{\tan(\alpha)}$$

(produit des pentes $= -1$).

remplacer y' par $\frac{-1}{y'}$ dans $(*)$

$$(*) \Rightarrow 2x + 2\cdot y(x)\,\frac{-1}{y'(x)} = 0 \quad \text{c'est-à-dire}$$

$$\boxed{y' - \frac{y}{x} = 0}$$ (ED de la famille orthogonale)

séparation des variables :

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \qquad (y \neq 0,\ x \neq 0)$$

$\ln : \mathbb{R}^+ \xrightarrow{\text{bijective}} \mathbb{R}$

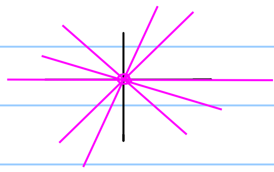
$$\ln(|y|) = \ln(|x|) + \ln(C), \quad C > 0$$

et on trouve la solution générale

$$\left\{ \forall C \in \mathbb{R},\ y(x) = C \cdot x \ , \quad x \in \mathbb{R}_*^+ \right.$$
$$\left. \forall C \in \mathbb{R},\ y(x) = C x \ , \quad x \in \mathbb{R}_*^- \right\}$$

Comme équation pour la famille des courbes orthogonales on a donc finalement

$$\frac{y}{x} = C \ , \quad C \in \mathbb{R}.$$



à lire $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{y}{x} = C\}$

Ils manquent les demi-droites verticales (voir plus loin)

1.2.3. Applications

- modélisation de populations
- modélisation de certaines situations économiques
- modélisation du climat.

Modélisation

$y(t) \in \mathbb{R}$:
- la taille d'une population
- la quantité d'argent
- la quantité de CO_2 dans l'atmosphère

choix de la modélisation

$t \geqslant 0$ le temps , $y_0 \in \mathbb{R}$, la quantité initiale

<u>modèle:</u> $y' = k \cdot y \ , \ y(0) = y_0$ (problème de Cauchy)

<u>motivation pour ce modèle:</u> soit $\delta > 0$, petit.

$$y(t+\delta) = y(t) + y(t)\cdot k\cdot \delta + \underbrace{\text{"petit"}}_{=\mathcal{O}(\delta)}$$

correction
proportionnelle à $y(t)$

donc

$$\boxed{y'(t) =} \lim_{\delta\to 0} \frac{y(t+\delta)-y(t)}{\delta} = \boxed{y(t)\cdot k}$$

Interprétation de k : $k>0$ accroissement proportionnel à $y(t)$

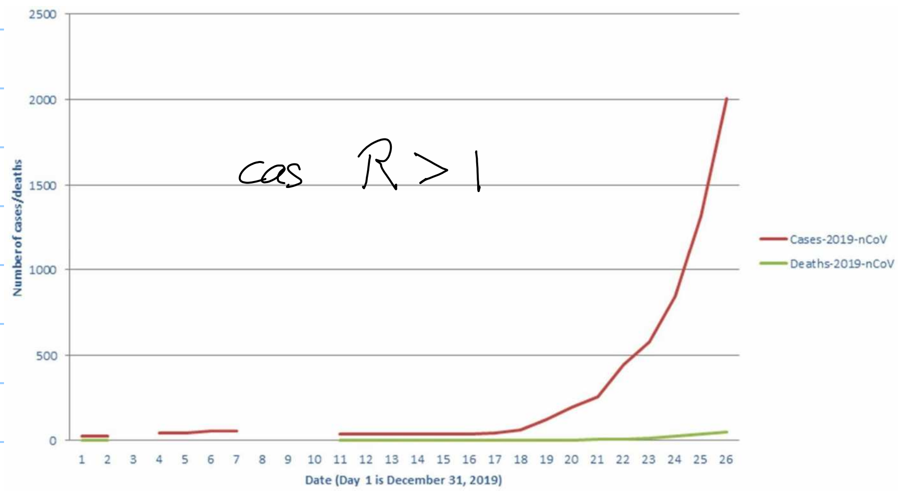
$k<0$ "taux négatif" décroissement proportionnel à $y(t)$.

$$\boxed{\text{épidémiologie: } \quad R := e^{k} > 1 \quad \text{si } k>0}$$

Solution du problème de Cauchy

$$\boxed{y(t) = y_0 \cdot e^{kt}, \quad t \geq 0 \quad \text{croissance exponentielle (si } k>0).}$$

Exemple: croissance exponentielle des cas covid-19, printemps 2020 en CH



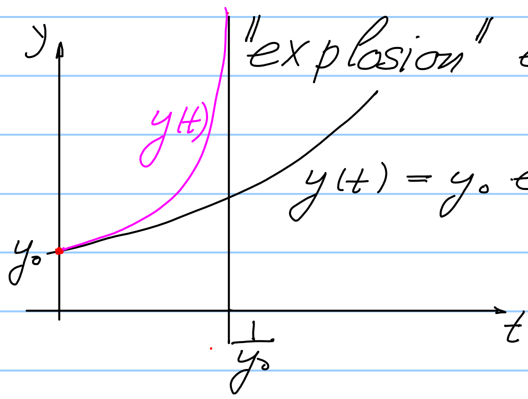
A comparer avec : $y' = y^2$, $y(0) = y_0 > 0$

accroissement plus
important que proportionnel
(pour $y > 1$)

choix de la modélisation

Solution : $y(t) = \dfrac{y_0}{1 - y_0 t}$, $t \in [0, \frac{1}{y_0}[\subset]-\infty, \frac{1}{y_0}[$

solution maximale

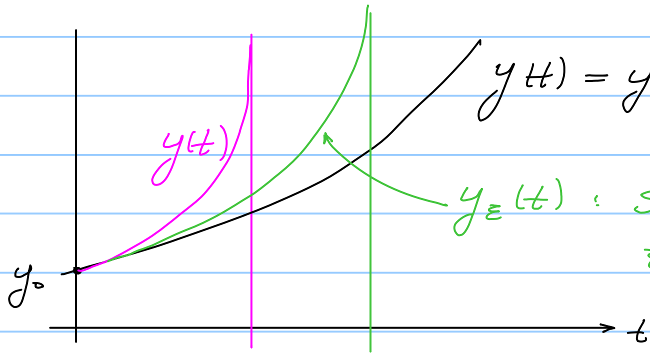


"explosion" en temps fini

$y(t) = y_0 e^{kt}$, $t \geq 0$, $k > 0$

Remarque : (voir la série A1 , exercice 3)

A comparer avec la solution de $y' = k \cdot y^{1+\varepsilon}$, $k > 0$, $y(0) = y_0 > 0$, $\varepsilon > 0$:

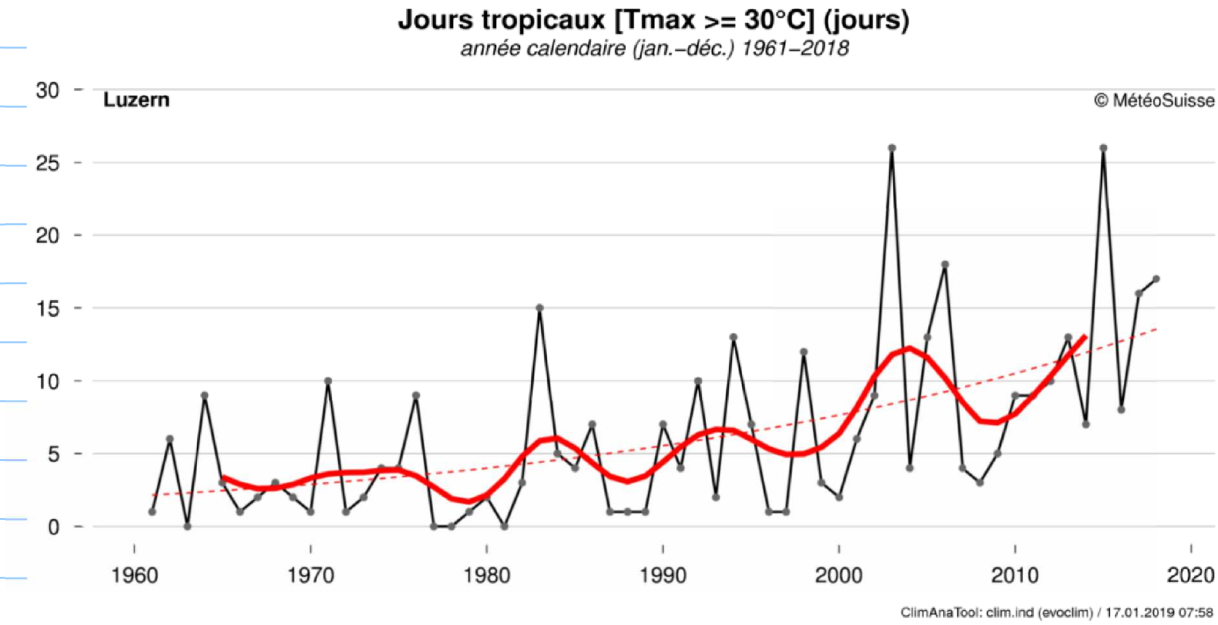


$y(t) = y_0 \cdot e^{kt}$

$y_\varepsilon(t)$: solution de $y' = k \cdot y^{1+\varepsilon}$, $k > 0$, $\varepsilon > 0$. Explosion en temps fini.

On a $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} y_\varepsilon(t) = y_0 e^{kt}$ pour tout $t \geq 0$

Exemple : nombre de jours tropicaux qui est considéré comme un indicateur des effets du réchauffement climatique


Jours tropicaux [Tmax >= 30°C] (jours)
année calendaire (jan.–déc.) 1961–2018
Luzern
© MétéoSuisse
30
25
20
15
10
5
0
1960
1970
1980
1990
2000
2010
2020
ClimAnaTool: clim.ind (evoclim) / 17.01.2019 07:58