Analyse avancée II

Section : PH

EPFL , printemps 2025

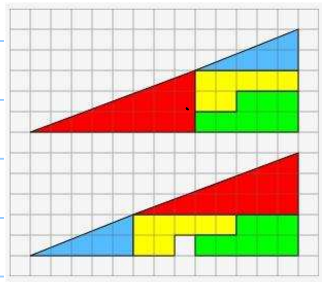
Manuscrit : Peter Wittwer

Prérequis

Analyse avancée I (note suffisante)

Algèbre linéaire avancée I (note suffisante)

\+ esprit critique



Curry's paradox.

\+ logique sans faille.

Mix et Remix

1. Equations différentielles, méthodes de résolution

Prérequis :
- méthodes d'intégration
- fonctions de classe C^1
- restriction d'une fonction

Motivation : physique, économie, biologie

1.1. Introduction, motivation, exemples

Une équation différentielle (ordinaire) est une expression de la forme

$$E(x, y(x), y'(x), \dots, \overset{n\text{-ème dérivée de la fonction } y}{y^{(n)}(x)}) = 0 \qquad (*)$$

La donnée du problème est une fonction

$$E : \mathbb{R}^{n+2} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(\xi_1, \dots, \xi_{n+2}) \longmapsto E(\xi_1, \dots, \xi_{n+2})$$

pour un $n \in \mathbb{N}^*$. On cherche un intervalle ouvert $I =]a, b[$, $a < b$ et une fonction $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^n(I)$, de sorte que l'équation $(*)$ soit satisfaite pour tout $x \in I$.

Notation : pour simplifier la notation on écrit souvent

$$E(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \qquad (**)$$

au lieu de $(*)$ et, par abus de notation, on écrit de même $E(x, y, y', \dots, y^{(n)})$ pour (la valeur de) la fonction E en un point $(x, y, y', \dots, y^{(n)}) \equiv (\xi_1, \dots, \xi_{n+2})$ donné de $\mathbb{R}^{n+2}$.

Remarque: la notion "ordinaire" veut dire que la fonction recherchée est une fonction d'une seule variable réelle. Les équations différentielles aux dérivées partielles font intervenir des fonction inconnues de plusieures variables.

Acronymes: ED ou EDO (ODE en anglais)
EDP (PDE en anglais)

Définition: si la donnée E est une fonction non-constante de ξ_{n+2} ("E dépend de $y^{(n)}$") on dit que <u>l'équation est d'ordre n</u>

Définition: si la donnée E est une fonction constante de ξ_1 ("E ne dépend pas explicitement de x") l'équation est dite <u>autonome</u> sinon <u>non autonome</u>

Exemples

i) $E(\xi_1, \xi_2) = \xi_2$
$y(x) = 0$ — $n=0$, pas une ED

ii) $E(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \xi_3$ — $n=1$ (premier ordre)
$y'(x) = 0$ — autonome.

iii) $E(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \sin(\xi_1)\,\xi_3 - \sin(\xi_2)$ — $n=1$
$\sin(x)\, y'(x) - \sin(y(x)) = 0$ — non autonome

Exemples avec notation simplifiée

iv) $y''' + y'' + y' + y + \sin(x) = 0$ — $n=3$
non autonome

v) $y'' = F(y)$, $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (continue) — équation de Newton
(d'un point de masse dans $\mathbb{R}$)

Exemples de solutions (avec la notation simplifiée)

$y' = 0$ solutions $\forall C \in \mathbb{R}$, $\boxed{y(x) = C \ , \ x \in \mathbb{R} = I}$

$y' - 1 = 0$ solutions $\forall C \in \mathbb{R}$, $\boxed{y(x) = x + C \ , \ x \in \mathbb{R} = I}$

$y' - e^x = 0$ solutions $\forall C \in \mathbb{R}$, $\boxed{y(x) = e^x + C, \ x \in \mathbb{R} = I}$

$y' - f(x) = 0$ solutions $\forall C \in \mathbb{R}$, $\boxed{y(x) = F(x) + C, \ x \in \,]a, b[}$

$\iff$

$y' = f(x)$

une primitive de f
avec f continue sur $]a,b[$.

Voir aussi la série OA, échauffement.

> <u>A propos la série OA</u>: "typologie" des équations ; les solutions sont données. Vérifier que les fonctions données satisfont l'équation

> <u>Remarque</u>: soit y une solution d'une ED sur $]a,b[$, et $]c,d[\subset]a,b[$, $c < d$. Alors la restriction de y à $]c,d[$ est aussi une solution

> <u>Définition</u>: on dit qu'une solution est maximale si elle n'est pas la restriction d'une solution définie sur un intervalle plus grand

> <u>Définition</u>: la <u>solution générale</u> d'une ED est l'ensemble des solutions maximales de l'équation. Resoudre une ED revient à trouver la solution générale

merci de regarder !

Plus d'exemples

$A: y' = y$ $\quad$ $B: y' = -y$

$C: y'' = y$ $\quad$ $\boxed{D: y'' = -y}$

$F: y' = y+1$

$G: y' = -xy$ $\quad$ $H: y' + \frac{1}{x}y = 0$, $x \in \mathbb{R}^*$

<u>Solutions</u> (dans ce qui suit $I = \mathbb{R}$ sauf si indiqué autrement et $C, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.)

$A: y(x) = C \cdot e^{x}$

$B: y(x) = C \cdot e^{-x}$

$C: y(x) = C_1 \cdot e^{x} + C_2 \cdot e^{-x}$ ou $C_1 \sinh(x) + C_2 \cosh(x)$

$$\boxed{D: y(x) = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)}$$

$F: y(x) = -1 + C \cdot e^{x}$

$G: y(x) = C e^{-\frac{1}{2}x^2}$

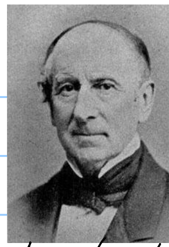
notations équivalentes

$H: y(x) = \frac{C}{x}$, $x \in]-\infty, 0[\equiv (-\infty, 0)$

$y(x) = \frac{C}{x}$, $x \in]0, \infty[\equiv (0, \infty)$

<u>Constat:</u> la solution d'une ED d'ordre n n'est typiquement pas unique. Elle dépend typiquement de n paramètres.

Le problème de Cauchy



Augustin-Louis Cauchy
1789 — 1857

Exemple 1

$$\underbrace{\underbrace{y' = y}_{\text{ED}} \qquad \underbrace{y(0) = 1}_{\text{CI}} \quad \text{(condition initiale)}}_{\text{problème de Cauchy}}$$

Solution générale de l'ED: $\forall C \in \mathbb{R},\ y(x) = C \cdot e^{x},\ x \in \mathbb{R}$

La solution du problème de Cauchy, c'est-à-dire la solution qui satisfait $y(0) = 1$ est celle avec $C = 1$

$$y(0) = C \cdot e^{0} = C \overset{!}{=} 1 \Rightarrow C = 1$$

Exemple 2:

$$\underbrace{\underbrace{y'' = -y}_{\text{ED}} \qquad \underbrace{y(0) = 1,\ y'(0) = 0}_{\text{CI}}}_{\text{problème de Cauchy}}$$

le même point x !

Solution générale: $\forall C_1, C_2 \in \mathbb{R},\ y(x) = C_1 \sin(x) + C_2 \cos(x),\ x \in \mathbb{R}$

$$y(0) = C_2 \overset{!}{=} 1 \Rightarrow C_2 = 1$$

$$y'(0) = C_1 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

La solution du problème de Cauchy donné est: $y(x) = \cos(x)$

1.2. Equations différentielles du premier ordre

$$E(x, y, y') = 0$$

1.2.1. Séparation des variables

Une ED est dite à variables séparées, si on peut l'écrire sous la forme

$$\boxed{E(x, y, y') = g(x) - f(y) \cdot y' = 0 \quad (*)}$$

pour certaines fonctions f et g.