Peter Wittwer

Analyse avancée II – Corrigé de la série 1B

Révision Calcul Propositionnel

Une "proposition (logique)" est un énoncé qui peut être vrai ou faux (mais pas les deux à la fois). Soit p et q des propositions. Par les tableaux de vérité suivants, on introduit les opérations $\neg$ ("non" logique), $\wedge$ ("et" logique), $\vee$ ("ou" logique), $\Leftrightarrow$ (l'équivalence logique) et $\Rightarrow$ (l'implication logique), où $V :=$ vrai, et $F :=$ faux.

p	$\neg p$
V	F
F	V

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Exercice 1. (Equivalences logiques)

Tous les propositions de cet exercice se montrent par la construction des tableaux de vérité à partir des tableaux de vérité des définitions :

i)

p	$\neg p$	$\neg(\neg p)$
V	F	**V**
F	V	**F**

ii)

p	p	$p \wedge p$
V	V	**V**
F	F	**F**

et

p	p	$p \vee p$
V	V	**V**
F	F	**F**

iii)

p	q	$p \wedge q$	$q \wedge p$
V	V	**V**	**V**
V	F	**F**	**F**
F	V	**F**	**F**
F	F	**F**	**F**

et

p	q	$p \vee q$	$q \vee p$
V	V	**V**	**V**
V	F	**V**	**V**
F	V	**V**	**V**
F	F	**F**	**F**

iv)

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg p) \vee (\neg q)$
V	V	V	**F**	F	F	**F**
V	F	F	**V**	F	V	**V**
F	V	F	**V**	V	F	**V**
F	F	F	**V**	V	V	**V**

et

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg p) \wedge (\neg q)$
V	V	V	**F**	F	F	**F**
V	F	V	**F**	F	V	**F**
F	V	V	**F**	V	F	**F**
F	F	F	**V**	V	V	**V**

$v)$

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \wedge r$	$q \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$
V	V	V	V	**V**	V	**V**
V	V	F	V	**F**	F	**F**
V	F	V	F	**F**	F	**F**
V	F	F	F	**F**	F	**F**
F	V	V	F	**F**	V	**F**
F	V	F	F	**F**	F	**F**
F	F	V	F	**F**	F	**F**
F	F	F	F	**F**	F	**F**

et

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \vee r$	$q \vee r$	$p \vee (q \vee r)$
V	V	V	V	**V**	V	**V**
V	V	F	V	**V**	V	**V**
V	F	V	V	**V**	V	**V**
V	F	F	V	**V**	F	**V**
F	V	V	V	**V**	V	**V**
F	V	F	V	**V**	V	**V**
F	F	V	F	**V**	V	**V**
F	F	F	F	**F**	F	**F**

$vi)$

p	q	$p \wedge q$	r	$(p \wedge q) \vee r$	$p \vee r$	$q \vee r$	$(p \vee r) \wedge (q \vee r)$
V	V	V	V	**V**	V	V	**V**
V	V	V	F	**V**	V	V	**V**
V	F	F	V	**V**	V	V	**V**
V	F	F	F	**F**	V	F	**F**
F	V	F	V	**V**	V	V	**V**
F	V	F	F	**F**	F	V	**F**
F	F	F	V	**V**	V	V	**V**
F	F	F	F	**F**	F	F	**F**

et

p	q	$p \vee q$	r	$(p \vee q) \wedge r$	$p \wedge r$	$q \wedge r$	$(p \wedge r) \vee (q \wedge r)$
V	V	V	V	**V**	V	V	**V**
V	V	V	F	**F**	F	F	**F**
V	F	V	V	**V**	V	F	**V**
V	F	V	F	**F**	F	F	**F**
F	V	V	V	**V**	F	V	**V**
F	V	V	F	**F**	F	F	**F**
F	F	F	V	**F**	F	F	**F**
F	F	F	F	**F**	F	F	**F**

$vii)$

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg p$	$(\neg p) \vee q$
V	V	**V**	F	**V**
V	F	**F**	F	**F**
F	V	**V**	V	**V**
F	F	**V**	V	**V**

$viii)$

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg (p \Rightarrow q)$	$\neg q$	$p \wedge (\neg q)$
V	V	V	**F**	F	**F**
V	F	F	**V**	V	**V**
F	V	V	**F**	F	**F**
F	F	V	**F**	V	**F**

$ix)$

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$	$p \Rightarrow r$	$((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
V	V	V	V	V	V	V	**V**
V	V	F	V	F	F	F	**V**
V	F	V	F	V	F	V	**V**
V	F	F	F	V	F	F	**V**
F	V	V	V	V	V	V	**V**
F	V	F	V	F	F	V	**V**
F	F	V	V	V	V	V	**V**
F	F	F	V	V	V	V	**V**

$x)$

p	q	$p \Leftrightarrow q$	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
V	V	**V**	V	V	**V**
V	V	**V**	V	V	**V**
V	F	**F**	F	V	**F**
V	F	**F**	F	V	**F**
F	V	**F**	V	F	**F**
F	V	**F**	V	F	**F**
F	F	**V**	V	V	**V**
F	F	**V**	V	V	**V**

$xi)$

p	q	$\neg q$	$\neg p$	$p \Rightarrow q$	$(\neg q) \Rightarrow (\neg p)$
V	V	F	F	**V**	**V**
V	V	F	F	**V**	**V**
V	F	V	F	**F**	**F**
V	F	V	F	**F**	**F**
F	V	F	V	**V**	**V**
F	V	F	V	**V**	**V**
F	F	V	V	**V**	**V**
F	F	V	V	**V**	**V**

Exercice 2. (Les quantificateurs $\forall$ et $\exists$, une variable)

$v)$ Soit $E = \{1, 2\}$ et $p(x)$ et $q(x)$ telles que $p(1)$ et $q(2)$ sont vraies et $p(2)$ et $q(1)$ sont fausses. Alors, on a

$p(1)$	$p(2)$	$q(1)$	$q(2)$	$p(1) \vee q(1)$	$p(2) \vee q(2)$
V	F	F	V	V	V

et par conséquence

$\forall x \in E,\, p(x)$	$\forall x \in E,\, q(x)$	$\forall x \in E$ $p(x) \vee q(x)$	$\forall x \in E,\ p(x)$ $\vee$ $\forall x \in E,\ q(x)$
F	F	V	F

et donc en effet

$\forall x \in E$ $p(x) \vee q(x)$ $\Longleftarrow$ $\forall x \in E,\ p(x)$ $\vee$ $\forall x \in E,\ q(x)$	$\forall x \in E$ $p(x) \vee q(x)$ $\Longrightarrow$ $\forall x \in E,\ p(x)$ $\vee$ $\forall x \in E,\ q(x)$
V	**F**

vi) Similairement on a

$p(1)$	$p(2)$	$q(1)$	$q(2)$	$p(1) \wedge q(1)$	$p(2) \wedge q(2)$
V	F	F	V	F	F

et par conséquence

$\exists x \in E, p(x)$	$\exists x \in E, q(x)$	$\exists x \in E$ $p(x) \wedge q(x)$	$\exists x \in E,\ p(x)$ $\wedge$ $\exists x \in E,\ q(x)$
V	V	F	V

et donc en effet

$\exists x \in E$ $p(x) \wedge q(x)$ $\Longrightarrow$ $\exists x \in E,\ p(x)$ $\wedge$ $\exists x \in E,\ q(x)$	$\exists x \in E$ $p(x) \wedge q(x)$ $\Longleftarrow$ $\exists x \in E,\ p(x)$ $\wedge$ $\exists x \in E,\ q(x)$
V	**F**

Exercice 3. (Les quantificateurs $\forall$ et $\exists$, deux variables)
iii) Soit $E = \{1, 2\}$ et $F = \{1, 2\}$ et $p(x, y)$ telle que $p(1, 1)$ et $p(2, 2)$ sont vraies et $p(1, 2)$ et $p(2, 1)$ sont fausses. Alors

$p(1,1)$	$p(1,2)$	$p(2,1)$	$p(2,2)$	$\exists x \in E,\ \forall y \in F$ $p(x,y)$	$\forall y \in F,\ \exists x \in E$ $p(x,y)$
V	F	F	V	F	V

et donc en effet

$\exists x \in E,\ \forall y \in F$ $p(x,y)$ $\Longrightarrow$ $\forall y \in F,\ \exists x \in E$ $p(x,y)$	$\exists x \in E,\ \forall y \in F$ $p(x,y)$ $\Longleftarrow$ $\forall y \in F,\ \exists x \in E$ $p(x,y)$
V	**F**

<u>Révision Ensembles</u>

Exercice 4. (Notion de couple)

i) On a $X \times Y = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$. Le couple $(3, 2)$ n'est donc pas un élément du produit cartésien $X \times Y$.

ii) En utilisant la définition du produit cartésien, on trouve que les deux ensembles sont

$$\begin{aligned}(X \times Y) \times Z &= \{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4)\} \times \{5,6\} \\ &= \big\{((1,3),5),((1,4),5),((2,3),5),((2,4),5),((1,3),6), \\ &\qquad ((1,4),6),((2,3),6),((2,4),6)\big\}\ ,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}X \times (Y \times Z) &= \{1,2\} \times \{(3,5),(3,6),(4,5),(4,6)\} \\ &= \big\{(1,(3,5)),(1,(3,6)),(1,(4,5)),(1,(4,6)),(2,(3,5)), \\ &\qquad (2,(3,6)),(2,(4,5)),(2,(4,6))\big\}\ .\end{aligned}$$

Ils ne sont donc pas égaux.

Remarque:
Les deux ensembles $(X \times Y) \times Z$ et $X \times (Y \times Z)$ sont équivalents dans le sens que la fonction qui associe à $((a, b), c) \in (X \times Y) \times Z$ l'élément $(a, (b, c)) \in X \times (Y \times Z)$ est bijective. On écrit donc souvent simplement $X \times Y \times Z$ au lieu de $(X \times Y) \times Z$ ou $X \times (Y \times Z)$, et (a, b, c) au lieu de $((a, b), c)$ ou $(a, (b, c))$.

Exercice 5. (Relation d'équivalence)

i) Par définition de la refelxivité d'une relation d'équivalence on a $x \sim x$ et donc $x \in C_x$. De même, si $x \sim y$, alors si $z \sim x$ on a par la transitivité d'une relation d'équivalence aussi $z \sim y$ et donc $z \in C_y$ si $z \in C_x$ et vice versa. Finalement, par l'absurde, supposons que x et y ne sont pas équivalents alors z ne peu pas être à la fois dans C_x et C_y, car sinon à la fois $z \sim x$ et $z \sim y$ et donc $x \sim y$ par la transitivité ce qui est une contradiction.

ii) On a $x \sim x$ car $x = x$; $x \sim y$ implique $y \sim x$ car $x = y$ implique $y = x$; et $x \sim y$ et $y \sim z$ impliquent que $x \sim z$ car $x = y$ et $y = z$ impliquent que $x = z$. L'égalité $=$ est donc un cas particulier d'une relation d'équivalence. Les classes d'équivalences, c'est-à-dire les ensembles qui sont les éléments de $X/_\sim$, contiennent chacune exactement un élément de X. Similairement, dans le deuxième cas, puisque $x \sim y$ pour tout $x, y \in X$, les conditions d'une relation d'équivalence sont trivialement satisfaite. L'ensemble quotient $X/_\sim$ contient l'ensemble X comme unique élément.

iii) Pour tout $x \in \mathbb{Z}^*$ on a $x^2 > 0$ et donc $x \sim x$. Si $xy > 0$ on a aussi $yx > 0$, si bien que $x \sim y$ implique $y \sim x$. Finalement, si $xy > 0$ et $yz > 0$ on a que $0 < (xy)(yz) = xzy^2$. Il s'en suit que $xz > 0$ si bien que $x \sim y$ et $y \sim z$ impliquent $x \sim z$. Il s'agit donc bien d'une relation d'équivalence. L'ensemble quotient contient deux éléments, l'ensemble des entiers positifs et l'ensemble des entiers négatifs.

iv) Pour tout $x \in \mathbb{Z}$ on a $x - x = 0$. Puisque 0 est un nombre pair il s'en suit que $x \sim x$. Si $x - y$ est un nombre pair, $y - x$ est aussi un nombre pair et $x \sim y$ implique donc $y \sim x$. Finalement, si $x - y$ est pair et $y - z$ est pair, il s'en suit que $x - z = (x - y) + (y - z)$ est pair, et $x \sim y$ et $y \sim z$ impliquent donc que $x \sim z$. Il s'agit donc bien d'une relation d'équivalence. L'ensemble quotient contient deux éléments, l'ensemble des entiers pairs et l'ensemble des entiers impairs.

v) La relation $x \sim y$ si $x - y$ impair ne définit pas une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$. Pour tout x on a que $x - x = 0$, et puisque 0 est un nombre pair il en suit que x n'est pas en relation avec x ce qui viole la condition de réflexivité. (La relation est symétrique, mais la transitivité est aussi compromise.)