Peter Wittwer
21 février 2025

Analyse avancée II – Série 1B

Révision Calcul Propositionnel

Une "proposition (logique)" est un énoncé qui peut être vrai ou faux (mais pas les deux à la fois). Soit p et q des propositions. Par les tableaux de vérité suivants, on introduit les opérations $\neg$ ("non" logique), $\wedge$ ("et" logique), $\vee$ ("ou" logique), $\Leftrightarrow$ (l'équivalence logique) et $\Rightarrow$ (l'implication logique), où $V :=$ vrai, et $F :=$ faux.

p	$\neg p$
V	F
F	V

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Exercice 1. (Équivalences logiques)
Soient p, q et r des propositions. Montrer que :

i) $(\neg(\neg p)) \Leftrightarrow p$ (loi de la double négation).

ii) $(p \wedge p) \Leftrightarrow p$ et $(p \vee p) \Leftrightarrow p$ (idempotence).

iii) $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$ et $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$ (commutativité).

iv) $(\neg(p \wedge q)) \Leftrightarrow ((\neg p) \vee (\neg q))$ et $(\neg(p \vee q)) \Leftrightarrow ((\neg p) \wedge (\neg q))$ (lois de de Morgan).

v) $((p \wedge q) \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge (q \wedge r))$ et $((p \vee q) \vee r) \Leftrightarrow (p \vee (q \vee r))$ (associativité).

vi) $((p \wedge q) \vee r) \Leftrightarrow ((p \vee r) \wedge (q \vee r))$ et $((p \vee q) \wedge r) \Leftrightarrow ((p \wedge r) \vee (q \wedge r))$ (distributivité).

vii) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow ((\neg p) \vee q)$ (définition de l'implication).

viii) $(\neg(p \Rightarrow q)) \Leftrightarrow (p \wedge (\neg q))$ (négation de l'implication).

ix) $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ (transitivité de l'implication).

x) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p))$ (propositions équivalentes).

xi) $((\neg q) \Rightarrow (\neg p)) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$ (contraposé de l'implication).

A noter que la véracité de la réciproque de la proposition $p \Rightarrow q$ c'est-à-dire la proposition $q \Rightarrow p$ n'a aucun rapport avec la véracité de la proposition $p \Rightarrow q$.

Dans la suite, pour économiser des parenthèses, nous utiliserons les priorités habituelles sur les opérations et, si convenable, nous écrirons que $p \Leftarrow q$ au lieu de $q \Rightarrow p$.

Exercice 2. (Les quantificateurs $\forall$ et $\exists$, une variable)
Soit E un ensemble et pour $x \in E$ soit $p(x)$ et $q(x)$ des propositions (dont les valeurs de vérité peuvent dépendre de x). On écrira $\forall x \in E, p(x)$ pour dire que "pour tous les éléments $x \in E$, la proposition $p(x)$ est vraie", et $\exists x \in E, p(x)$ pour dire que "il existe $x \in E$ tel que la proposition $p(x)$ est vraie". Se convaincre que :

i) $(\neg(\forall x \in E, p(x))) \Leftrightarrow (\exists x \in E, \neg(p(x)))$.

ii) $(\neg(\exists x \in E, p(x))) \Leftrightarrow (\forall x \in E, \neg(p(x)))$.

Ex. 3 - 5 au verso.

iii) $(\forall x \in E, p(x) \wedge q(x)) \Leftrightarrow ((\forall x \in E, p(x)) \wedge (\forall x \in E, q(x)))$.

iv) $(\exists x \in E, p(x) \vee q(x)) \Leftrightarrow ((\exists x \in E, p(x)) \vee (\exists x \in E, q(x)))$.

v) $(\forall x \in E, p(x) \vee q(x)) \Leftarrow ((\forall x \in E, p(x)) \vee (\forall x \in E, q(x)))$.

vi) $(\exists x \in E, p(x) \wedge q(x)) \Rightarrow ((\exists x \in E, p(x)) \wedge (\exists x \in E, q(x)))$.

Pour les deux cas où il n'y a pas équivalence, trouver un contre-exemple à la proposition réciproque.

Exercice 3. (Les quantificateurs $\forall$ et $\exists$, deux variables)
Soit E et F des ensembles et pour $x \in E$ et $y \in F$ soit $p(x, y)$ des propositions (dont les valeurs de vérité peuvent dépendre de x et de y). Se convaincre que :

i) $((\forall x \in E), (\forall y \in F), p(x, y)) \Leftrightarrow ((\forall y \in F), (\forall x \in E), p(x, y))$.

ii) $((\exists x \in E), (\exists y \in F), p(x, y)) \Leftrightarrow ((\exists y \in F), (\exists x \in E), p(x, y))$.

iii) $((\exists x \in E), (\forall y \in F), p(x, y)) \Rightarrow ((\forall y \in F), (\exists x \in E), p(x, y))$.

Pour le cas où il n'y a pas équivalence, trouver un contre-exemple à la proposition réciproque.

Révision Ensembles

Exercice 4. (Notion de couple)
Soient les ensembles $X = \{1, 2\}$, $Y = \{3, 4\}$, $Z = \{5, 6\}$.

i) Est-ce que le couple $(3, 2)$ est un élément du produit cartésien $X \times Y$?

ii) Montrer que le produit cartésien n'est pas associatif, c'est-à-dire que $(X \times Y) \times Z \neq X \times (Y \times Z)$.

Exercice 5. (Relation d'équivalence)
Soit X un ensemble. Un sous-ensmble $R \subset X \times X$ est appelé une relation sur X. Un sous-ensemble $R \subset X \times X$ est appelé une relation d'équivalence sur X (et on utilise la notation $x \sim y$ pour dire que $(x, y) \in R$) si :

i) $\forall x \in X, x \sim x$ (la relation est réflexive).

ii) $\forall x, y \in X, (x \sim y) \Rightarrow (y \sim x)$ (la relation est symétrique).

iii) $\forall x, y, z \in X, ((x \sim y) \wedge (y \sim z)) \Rightarrow (x \sim z)$ (la relation est transitive).

Donné $x \in X$ on définit l'ensemble $C_x := \{y \in X : y \sim x\} \subset X$ qui est appelé la classe d'équivalence de $x \in X$, et l'ensemble de tous les classes d'équivalences distinctes de X est appelé l'ensemble quotient de X et il est noté par $X/_\sim$.

i) Montrer que $\forall x \in X$, $C_x \neq \phi$, que $\forall x, y \in X$, $C_x = C_y$ si $x \sim y$ et $C_x \cap C_y = \phi$ sinon.

ii) Montrer que les relations "$\forall x, y \in X$, si $x = y$ alors $x \sim y$", ainsi que "$\forall x, y \in X$, $x \sim y$", sont des relations d'équivalence sur X. Quel est l'ensemble quotient $X/_\sim$ dans les deux cas ?

iii) Montrer que la relation "$\forall x, y \in \mathbb{Z}^*$, si $xy > 0$, alors $x \sim y$" , définit une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}^*$. Quel est l'ensemble quotient ?

iv) Montrer que la relation "$\forall x, y \in \mathbb{Z}$, si $x - y$ est pair, alors $x \sim y$" définit une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$. Quel est l'ensemble quotient ?

v) Est-ce que "$\forall x, y \in \mathbb{Z}$, si $x - y$ est impair, alors $x \sim y$" , définit une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$?