Peter Wittwer

20 février 2025

Analyse avancée II – Corrigé de la série 0A

Échauffement.

Les solutions sont :

i) $y(x) = x^2 + C$ pour $x, C \in \mathbb{R}$ (obtenue par intégration)

ii) $y(x) = \dfrac{1}{2}ax^2 + C_1x + C_2$ pour $x, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ (obtenue par intégration)

iii) $y(x) = Ce^x - 1$ pour $x, C \in \mathbb{R}$ (exemple du cours)

iv) $y(x) = \dfrac{C}{x}$ pour $C \in \mathbb{R}$ et $x \in]-\infty, 0[$ ou $x \in]0, \infty[$ (exemple du cours)

Exercice 1.

i) ordre 3, autonome
ii) ordre 1, non autonome
iii) ordre 1, non autonome
iv) ordre 1, non autonome
v) ordre 2, non autonome
vi) ordre 2, non autonome
vii) ordre 3, non autonome

Exercice 2.

i) Pour $\omega \neq 0$ on vérifie la proposition par un calcul explicite. En effet, on a

$$\begin{aligned} y'(x) &= -C_1\omega\sin(\omega x) + C_2\omega\cos(\omega x)\,, \\ y''(x) &= -C_1\omega^2\cos(\omega x) - C_2\omega^2\sin(\omega x) = -\omega^2\, y(x)\,, \end{aligned}$$

et donc on a bien $y'' + \omega^2 y = 0\,.$

ii) Si $\omega = 0$, l'équation différentielle se réduit à $y'' = 0\,.$ En intégrant deux fois, on obtient la solution générale de cette équation qui est $y(x) = C_1x + C_2$ pour $x \in \mathbb{R}$, où $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ sont des constantes.

iii) Pour $\omega = \frac{\pi}{2}$, on a

$$\begin{aligned} y(1) &= C_1\cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right) + C_2\sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = C_2 = 3\,, \\ y'(1) &= -C_1\tfrac{\pi}{2}\sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right) + C_2\tfrac{\pi}{2}\cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = -C_1\tfrac{\pi}{2} = 2\,. \end{aligned}$$

Ainsi on doit avoir $C_1 = -\frac{4}{\pi}$ et $C_2 = 3$.

Exercice 3.

i) La dérivée de y est

$$y'(x) = \tan(x) + \frac{x}{\cos(x)^2} + C\frac{\sin(x)}{\cos(x)^2}\,.$$

En utilisant la définition de $\tan(x)$, on trouve que

$$\begin{aligned} y'(x) - \tan(x)\, y(x) &= \tan(x) + \frac{x}{\cos(x)^2} + C\frac{\sin(x)}{\cos(x)^2} - \tan(x)\left(1 + x\tan(x) + \frac{C}{\cos(x)}\right) \\ &= x\left(\frac{1}{\cos(x)^2} - \tan(x)^2\right) = x\,\frac{1-\sin(x)^2}{\cos(x)^2} = x\,. \end{aligned}$$

Les fonctions $y(x)$ satisfont donc l'équation différentielle donnée.

Remarque: On peut aussi utiliser directement que $\big(\tan(x)\big)' = 1 + \tan(x)^2$.

ii) On procède de la même manière qu'au point précédent. On a

$$y'(x) = 2\cos(x) - \sin(2x) - C\cos(x)\, e^{-\sin(x)}\,,$$

et donc, avec un peu de trigonométrie,

$$\begin{aligned} y'(x) + \cos(x)\, y(x) &= 2\cos(x) - \sin(2x) - C\cos(x)e^{-\sin(x)} \\ &\quad + \cos(x)\left(2\sin(x) + \frac{1}{2}\cos(2x) - \frac{3}{2} + Ce^{-\sin(x)}\right) \\ &= \frac{1}{2}\cos(x) + \frac{1}{2}\cos(x)\cos(2x) \\ &= \frac{1}{2}\cos(x)\,\underbrace{\big(1+\cos(2x)\big)}_{=2\cos(x)^2} = \cos(x)^3\,. \end{aligned}$$

Les fonctions $y(x)$ satisfont donc l'équation différentielle donnée.

Exercice 4.

i) Vérification immédiate par un calcul direct.

ii) On a

$$y'(x) = \frac{1}{2y(x)}\,\frac{-C}{(x-1)^2}\, e^{\left(\frac{C}{x-1}\right)}\,,$$

et

$$y(x)^2 + 1 = e^{\left(\frac{C}{x-1}\right)}\,.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} y'(x)\frac{2y(x)(x-1)}{y(x)^2+1} + \ln\big(y(x)^2+1\big) &= \frac{1}{2y(x)}\,\frac{-C}{(x-1)^2}\, e^{\left(\frac{C}{x-1}\right)}\,\frac{2y(x)(x-1)}{e^{\left(\frac{C}{x-1}\right)}} + \ln\left(e^{\left(\frac{C}{x-1}\right)}\right) \\ &= \frac{-C}{x-1} + \ln\left(e^{\left(\frac{C}{x-1}\right)}\right) = \frac{-C}{x-1} + \frac{C}{x-1} = 0\,, \end{aligned}$$

c'est-à-dire les fonctions $y(x)$ satisfont l'équation différentielle donnée.

Avec $y(2) = -3$, on se trouve dans le cas où $x > 1$ et $y(x)$ est donnée par la racine négative. On a

$$y(2) = -\sqrt{e^C - 1} = -3 \qquad \Leftrightarrow \qquad e^C - 1 = 9 \qquad \Leftrightarrow \qquad C = \ln(10) > 0.$$

Quand $y\left(-\frac{3}{2}\right) = 2$, on est dans le cas où $x < 1$ et $y(x)$ est la racine positive. On a

$$y\left(-\tfrac{3}{2}\right) = \sqrt{e^{\left(-\frac{2C}{5}\right)} - 1} = 2 \qquad \Leftrightarrow \qquad e^{\left(-\frac{2C}{5}\right)} = 5 \qquad \Leftrightarrow \qquad C = -\tfrac{5}{2}\ln(5) < 0.$$

Remarque (digression): On parle ici d'une équation différentielle *exacte* parce qu'elle est de la forme $\frac{d}{dx}F(y(x),x) = 0$ où $F(y,x) = (x-1)\ln(y^2+1)$.

Exercice 5.

i) Pour $x > 0$ on a

$$y'(x) = 1 - \frac{2(1+xe^{-x}) - 2x(e^{-x} - xe^{-x})}{(1+xe^{-x})^2} = \underbrace{1 - \frac{2}{1+xe^{-x}}}_{=\frac{y(x)}{x}} + \frac{2xe^{-x}(1-x)}{(1+xe^{-x})^2} \ ,$$

et

$$y(x)^2 - x^2 = \left(x - \frac{2x}{1+xe^{-x}}\right)^2 - x^2 = -\frac{4x^2}{1+xe^{-x}} + \frac{4x^2}{(1+xe^{-x})^2}$$
$$= \frac{-4x^2(1+xe^{-x}) + 4x^2}{(1+xe^{-x})^2} = \frac{-4x^3e^{-x}}{(1+xe^{-x})^2} \ .$$

Ainsi

$$2x^2\, y'(x) = 2x\, y(x) - \frac{4x^3e^{-x}(x-1)}{(1+xe^{-x})^2} \ ,$$

et donc

$$2x^2\, y'(x) - (x-1)(y(x)^2 - x^2) - 2x\, y(x) = -\frac{4x^3e^{-x}(x-1)}{(1+xe^{-x})^2} - (x-1)\frac{-4x^3e^{-x}}{(1+xe^{-x})^2} = 0\,.$$

La fonction $y\colon\ ]0,+\infty[\ \to \mathbb{R}$,

$$y(x) = x - \frac{2x}{1+xe^{-x}} \ ,$$

est donc une solution de l'équation différentielle. On a en plus

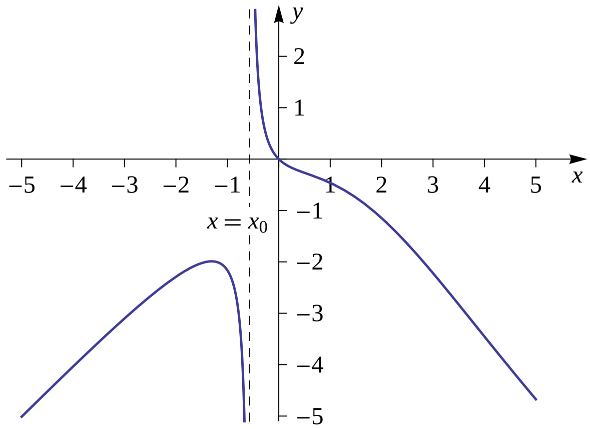
$$y(1) = 1 - \frac{2}{1+e^{-1}} = 1 - \frac{2e}{e+1} = \frac{1-e}{1+e} \, ,$$

et y est donc une solution pour la condition initiale donnée.

ii) La solution n'est pas maximale, car l'expression qui définit la fonction y satisfait l'équation pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $g(x) = 1 + xe^{-x} \neq 0$, c'est-à-dire pour $x \neq x_0 = -0.5671432904\ldots$. (On peut calculer x_0 par la méthode de bissection en utilisant que la fonction g est continue et que $g(-1) = 1 - e < 0$ et $g(0) = 1 > 0$. Mais pour cet exercice, il suffit de constater que $x_0 \in]-1, 0[$ par ce même raisonnement.)
La solution maximale $y_{\max}$ pour la condition initiale $y_{\max}(1) = \dfrac{1-e}{1+e}$ est donc donnée par la même expression pour $y(x)$ mais interprétée comme fonction sur l'intervalle $]x_0, +\infty[$.

iii) Soit $x_1 > x_0$ et soit $y_1 = y(x_1)$. L'expression pour $y(x)$, interprétée comme fonction sur l'intervalle $]x_0, +\infty[$ est alors aussi une solution (maximale) de l'équation différentielle pour la condition initiale $y(x_1) = y_1$. De même si $x_1 < x_0$ l'expression pour $y(x)$, interprétée comme fonction sur l'intervalle $]-\infty, x_0[$ est une solution (maximale) de l'équation différentielle pour la condition initiale $y(x_1) = y_1$.

Illustration :
L'expression qui définit $y(x)$ peut aussi être utilisée pour définir une solution pour $x < x_0$. Voici le graphe des solutions maximales pour $x > x_0$ et $x < x_0$, telles que $y(1) = \dfrac{1-e}{1+e}$ et $y(-1) = \dfrac{1+e}{1-e}$.



Exercice 6. (V/F : Équations différentielles)

Q1 : Soit $y(x)$ une solution d'une équation différentielle sur un intervalle ouvert I. Alors $y(x)$ est solution de cette même équation différentielle sur tout intervalle ouvert non-vide $J \subset I$.

Réponse : vrai. *Si la fonction $y(x)$ est une solution d'une équation différentielle d'ordre n sur un intervalle ouvert I, elle est par définition (voir le cours) de classe C^n sur I et satisfait l'équation pour tout $x \in I$. Puisque $J \subset I$, la fonction $y(x)$ est donc aussi de classe C^n sur J et satisfait l'équation pour $x \in J$.*