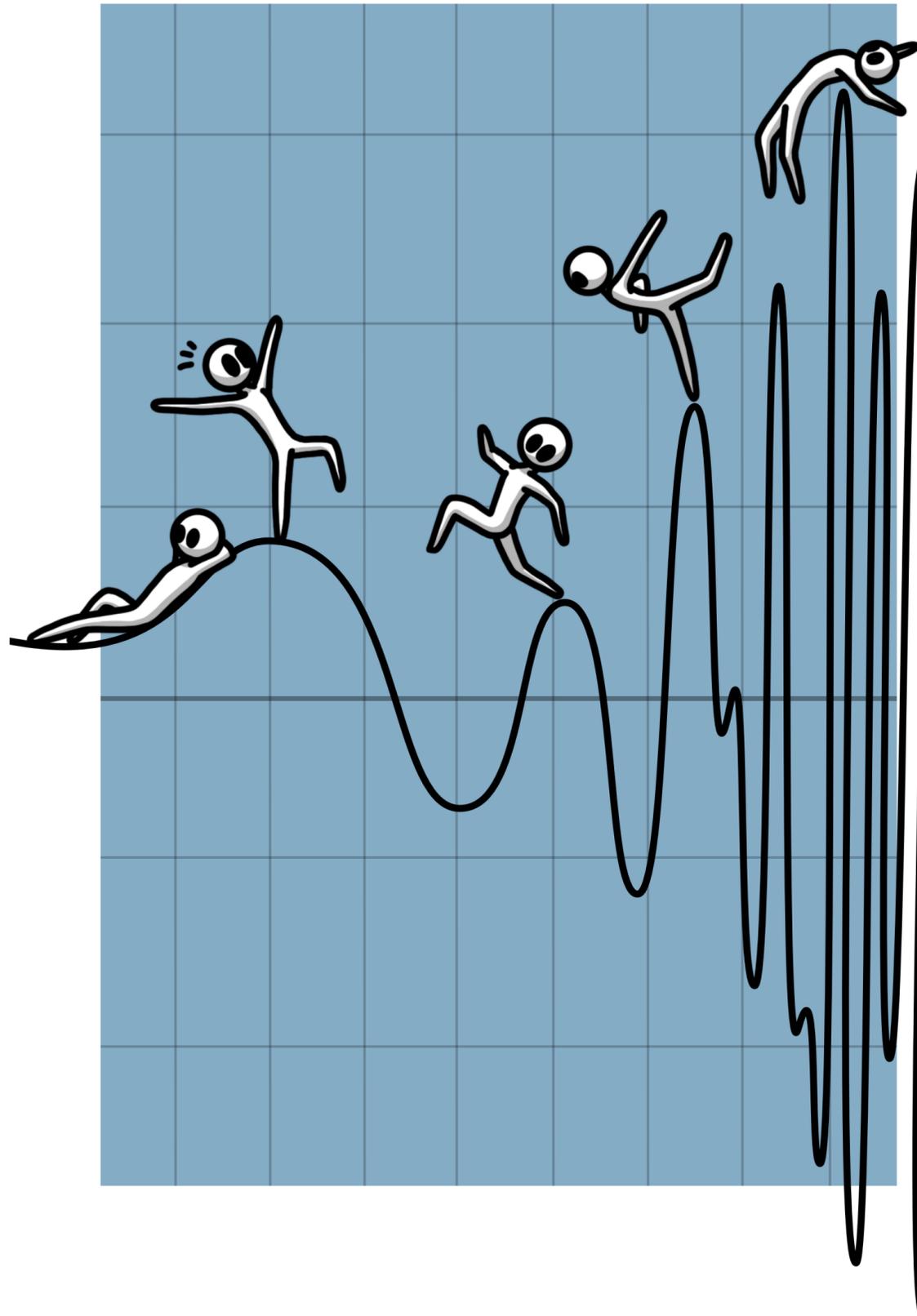


- Lors du cours sur la représentation binaire, nous avons vu comment représenter des nombres avec des suites de 0 et de 1.
- Aujourd'hui, nous allons voir comment représenter des objets plus complexes, comme des *signaux physiques* (sons ou images), avec ces mêmes suites de 0 et de 1.
- Et tout aussi important (voire plus!), nous verrons la semaine prochaine comment *restituer* un signal physique à partir d'une suite de 0 et de 1.



Information, Calcul et Communication

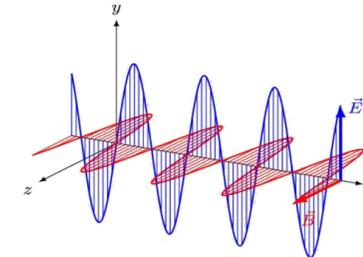
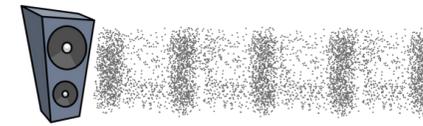
Signaux, fréquences
et bande passante

Olivier Lévêque

Qu'est-ce qu'un signal ? C'est une fonction !

Exemples:

1. Une onde sonore ($X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$)
 - $t = \text{temps}$, $X(t) = \text{pression}$
2. Une onde électromagnétique ($X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$)
3. Une photo noir-blanc ($X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$)
 - $(u, v) = \text{coordonnées}$, $X(u, v) = \text{niveau de gris}$
4. Une photo couleur ($X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$)
 - $(u, v) \rightarrow (X_{\text{rouge}}(u, v), X_{\text{vert}}(u, v), X_{\text{bleu}}(u, v))$
5. Une vidéo ($X : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$)

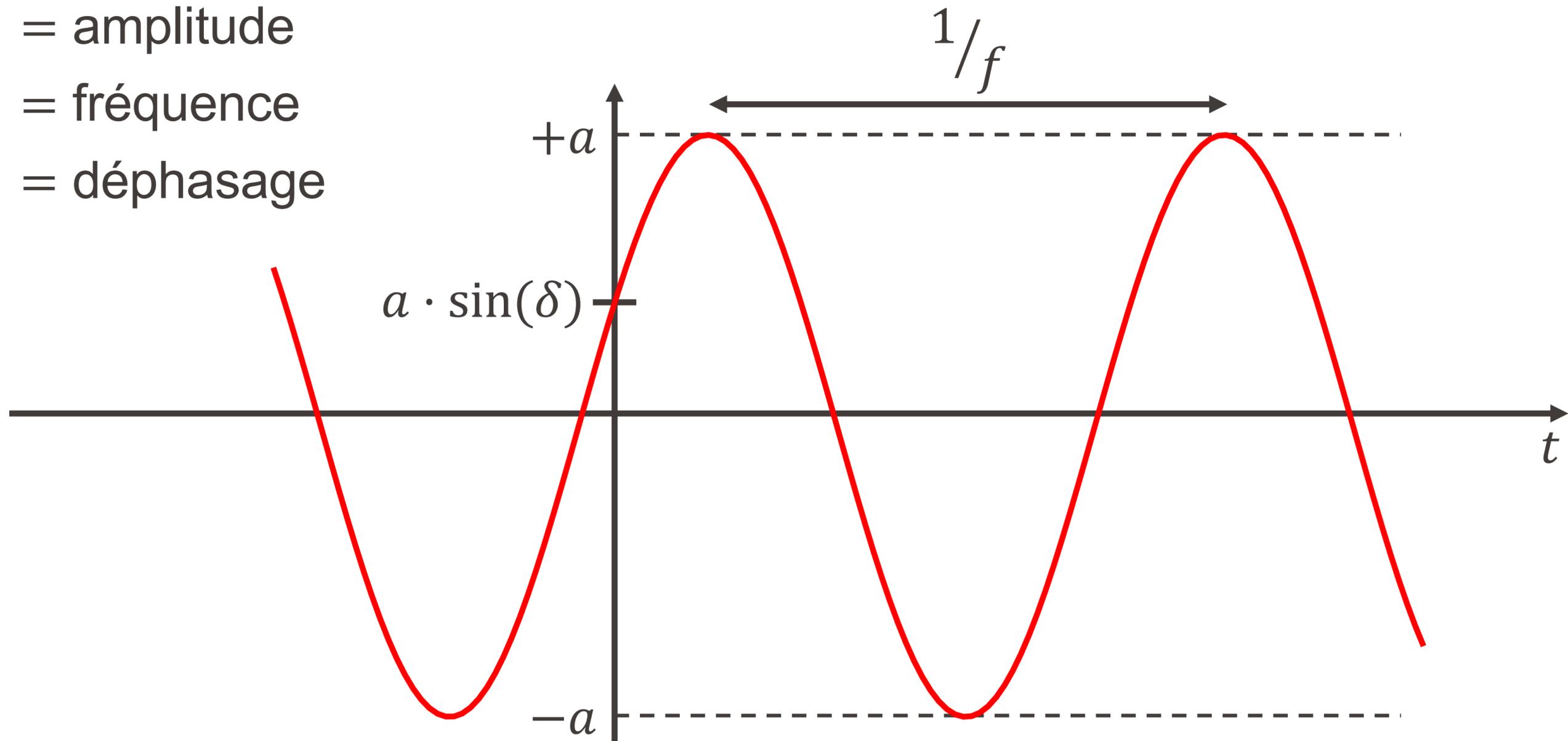


Nous considérerons exclusivement des **signaux unidimensionnels** ($X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$), par souci de clarté et de simplification.

Sinusoïde pure

$$X(t) = a \cdot \sin(2\pi f t + \delta) \quad t \in \mathbb{R}$$

- a = amplitude
- f = fréquence
- δ = déphasage

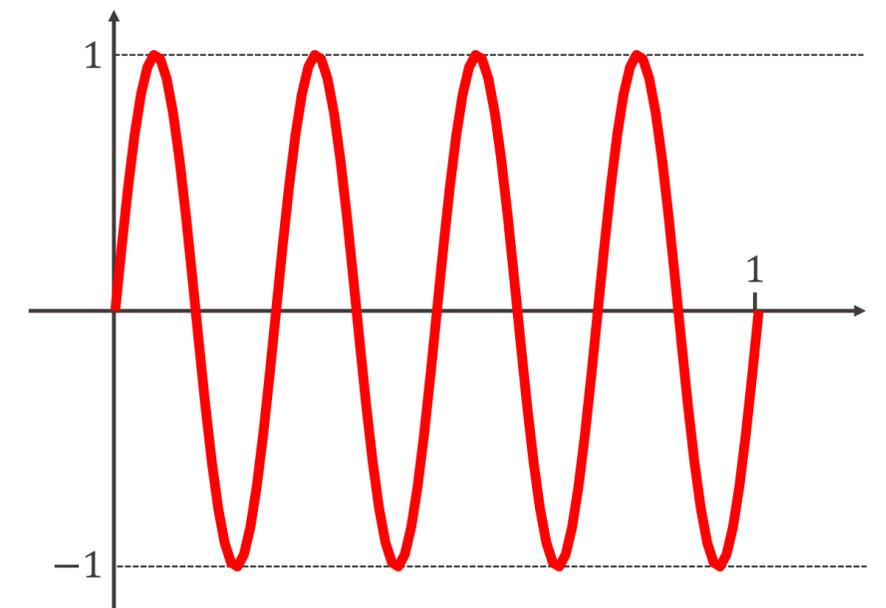
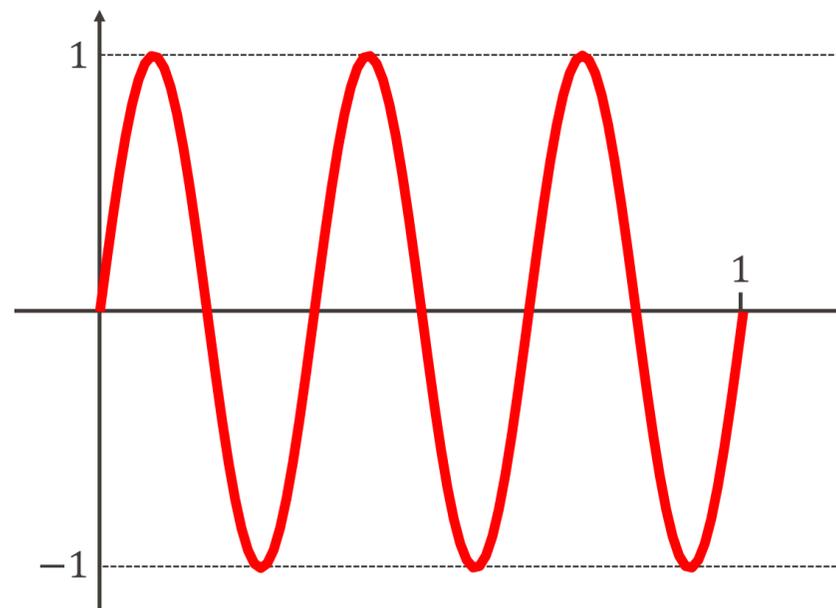
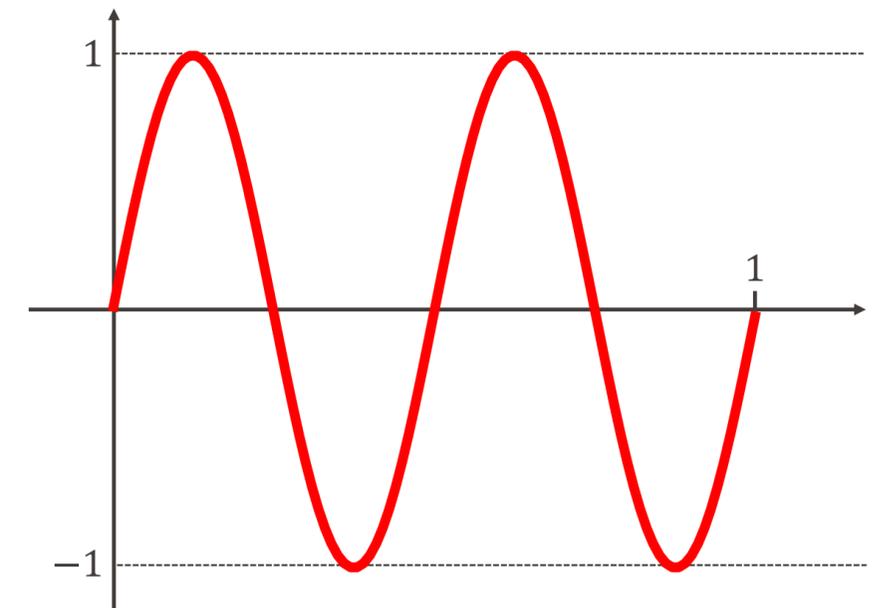
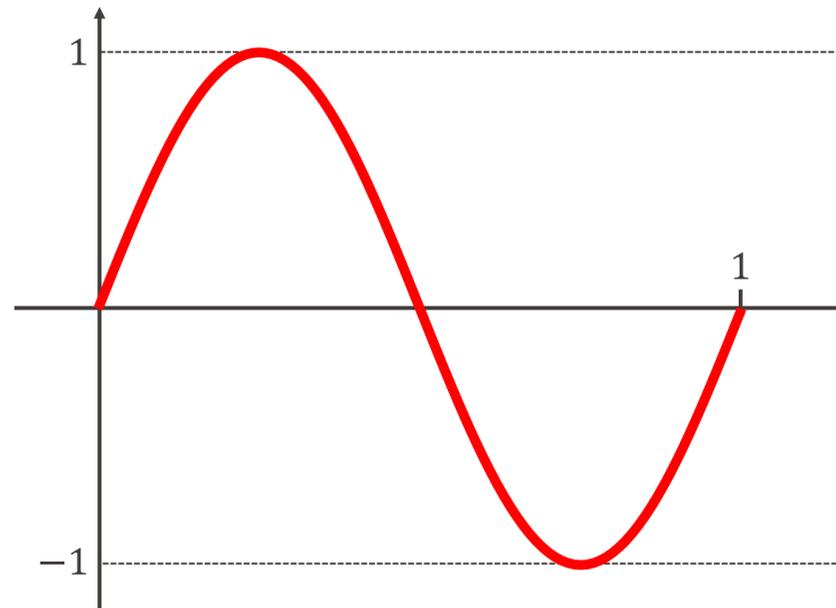


Sinusoïde pure : fréquence

$$X(t) = a \cdot \sin(2\pi f t + \delta) \quad t \in \mathbb{R}$$

- a = amplitude = 1
- f = fréquence
- δ = déphasage = 0

- $f = 1$: $X(t) = \sin(2\pi t)$
- $f = 2$: $X(t) = \sin(4\pi t)$
- $f = 3$: $X(t) = \sin(6\pi t)$
- $f = 4$: $X(t) = \sin(8\pi t)$

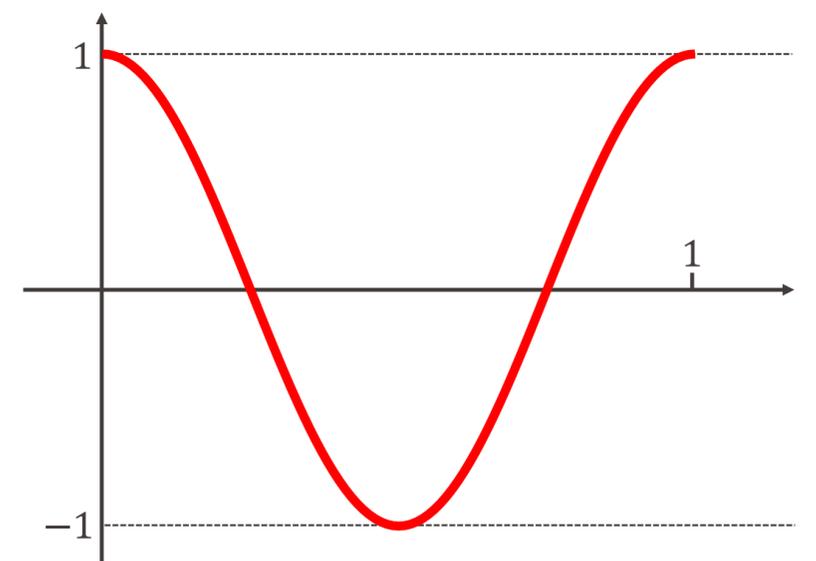
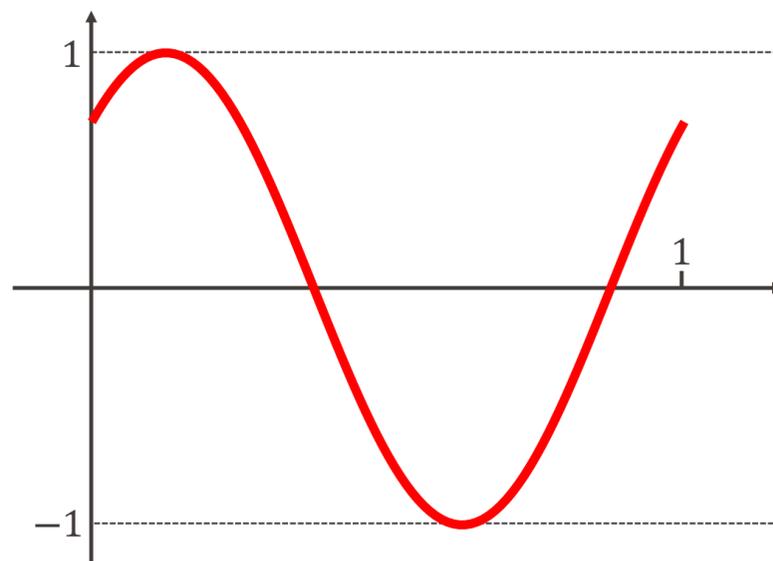
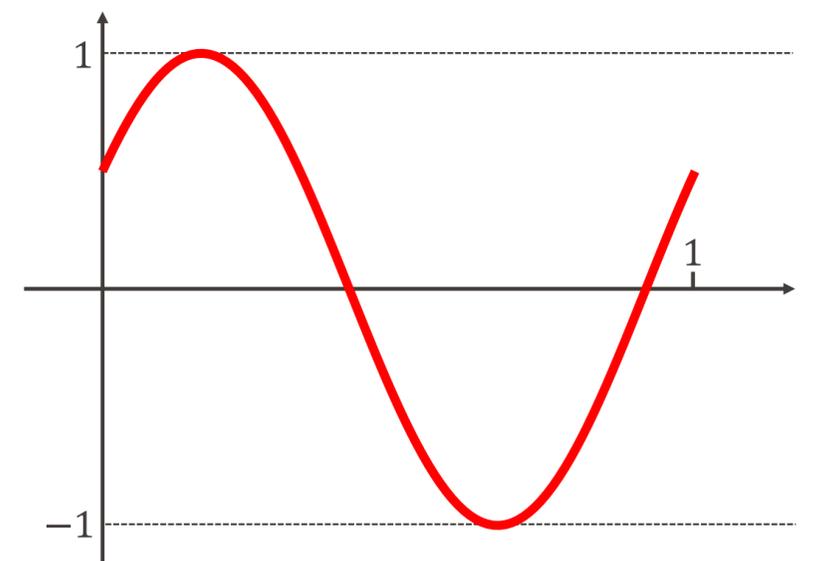
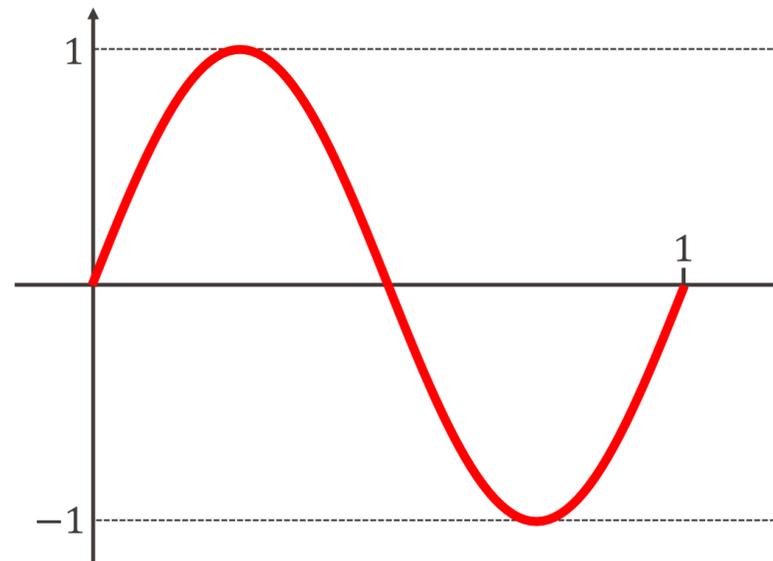


Sinusoïde pure : déphasage

$$X(t) = a \cdot \sin(2\pi f t + \delta) \quad t \in \mathbb{R}$$

- a = amplitude = 1
- f = fréquence = 1
- δ = déphasage

- $\delta = 0$: $X(t) = \sin(2\pi t)$
- $\delta = \frac{\pi}{6}$: $X(t) = \sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$
- $\delta = \frac{\pi}{4}$: $X(t) = \sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$
- $\delta = \frac{\pi}{2}$: $X(t) = \sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$
= $\cos(2\pi t)$



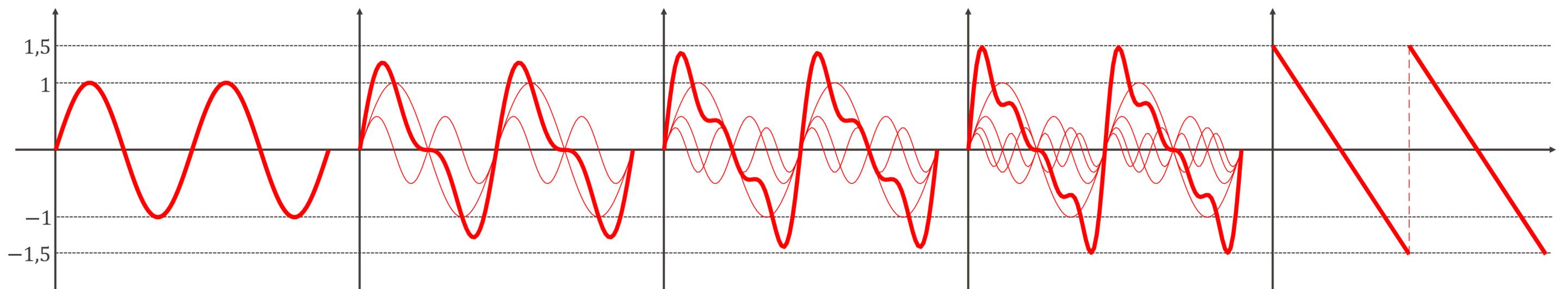
$$X(t) = a_1 \cdot \sin(2\pi f_1 t + \delta_1) + \cdots + a_n \cdot \sin(2\pi f_n t + \delta_n) \quad t \in \mathbb{R}$$

- a_j = amplitudes
- f_j = fréquences
- δ_j = déphasages

Somme de sinusoides

Exemple : $a_j = \frac{1}{j}$, $f_j = 2j$, $\delta_j = 0$, $n = 1, 2, 3, 4, \dots$

- $n = 1 : X(t) = \sin(4\pi t)$
- $n = 2 : X(t) = \sin(4\pi t) + \frac{1}{2} \sin(8\pi t)$
- $n = 3 : X(t) = \sin(4\pi t) + \frac{1}{2} \sin(8\pi t) + \frac{1}{3} \sin(12\pi t)$
- $n = 4 : X(t) = \sin(4\pi t) + \frac{1}{2} \sin(8\pi t) + \frac{1}{3} \sin(12\pi t) + \frac{1}{4} \sin(16\pi t)$
- $n = \infty$



- **Affirmation** : (à prendre avec des pincettes...)

« **Tout signal est une somme de sinusoides !** »

- Par la suite, nous ne considérerons que des signaux qui sont des sommes **finies** de sinusoides.



Joseph Fourier

Mathématicien et physicien

1768 - 1830

Fréquences : unité de mesure

- Un signal dont la fréquence est de f Hz se répète toutes les $T = 1/f$ sec.
- La fréquence f contenue dans la sinusoïde $X(t) = a \cdot \sin(2\pi ft + \delta)$ s'exprime en

$$\text{hertz} = \text{Hz} = \frac{1}{\text{s}}.$$

- Unité de mesure attribuée en l'honneur de H. R. Hertz, à qui on doit:
 - la vérification expérimentale que la lumière est une onde électromagnétique
 - le premier système de transmission et réception d'ondes radio.

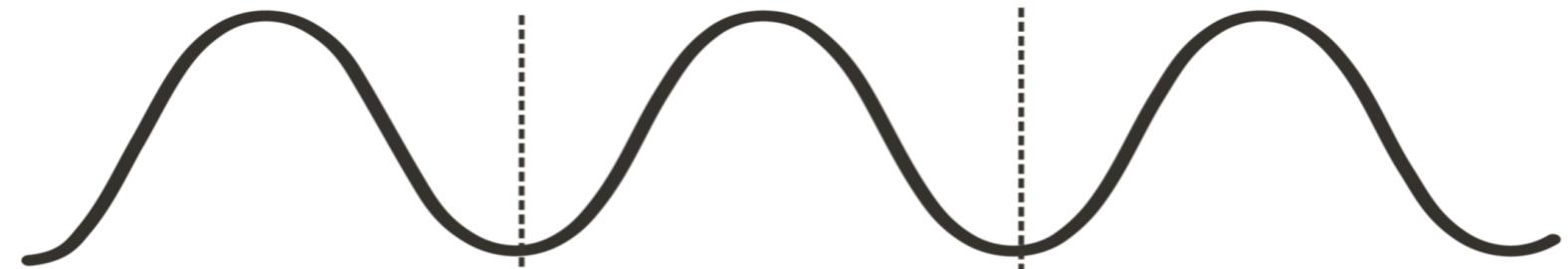


Heinrich Rudolf Hertz
Ingénieur et physicien
1857-1894

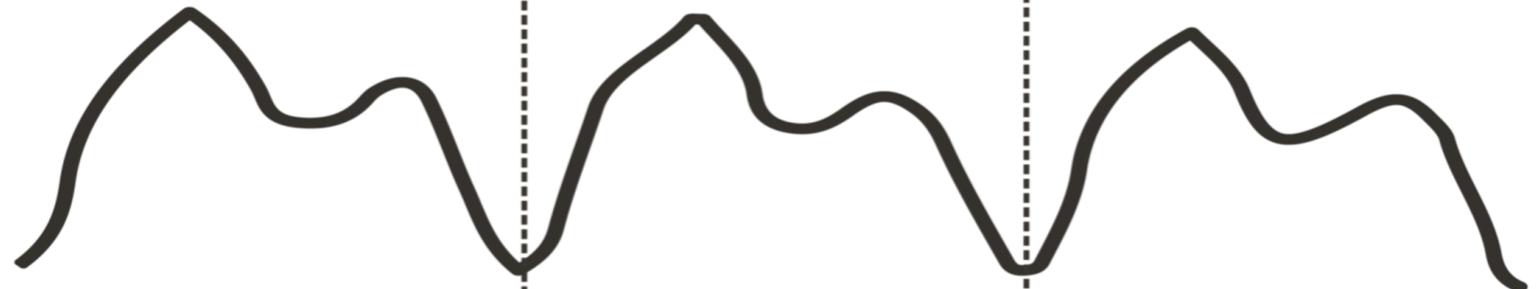
Tous les « La à 440 Hz » ne sont pas les mêmes !

- **Exemple musical:** La note « La » à 440 *Hz* est un signal (onde sonore) qui se répète toutes les $\frac{1}{440} = 2.2727 \dots$ millisecondes.

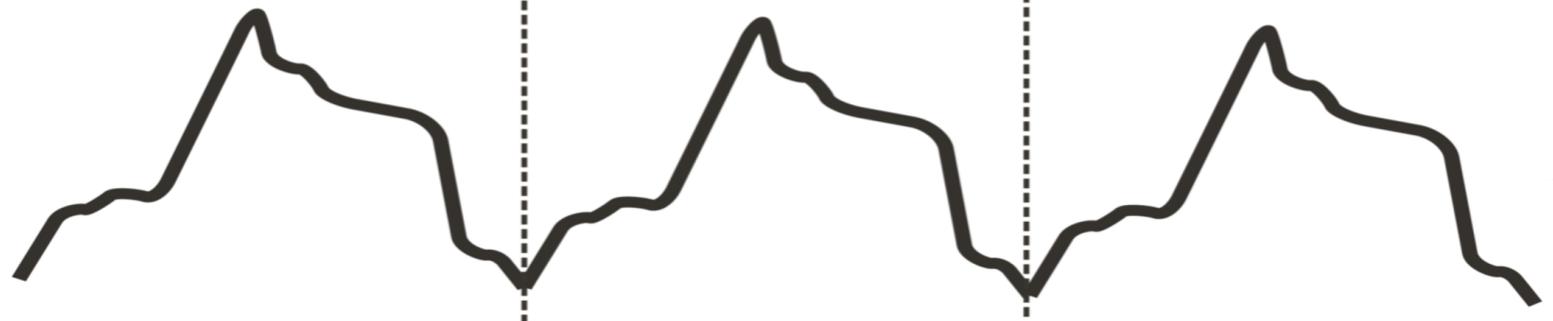
- diapason électronique



- violon

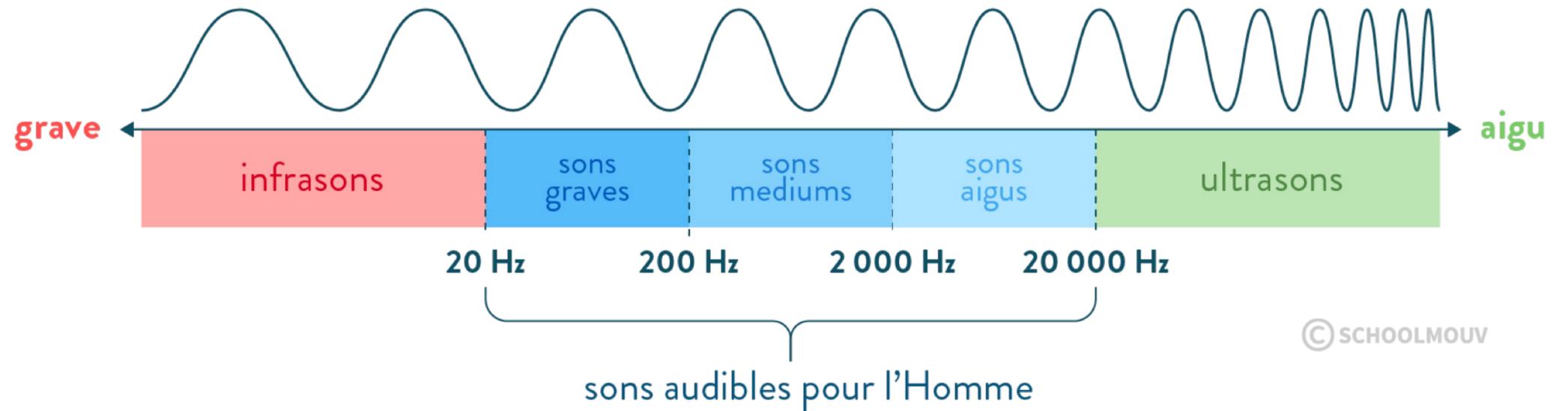


- clarinette



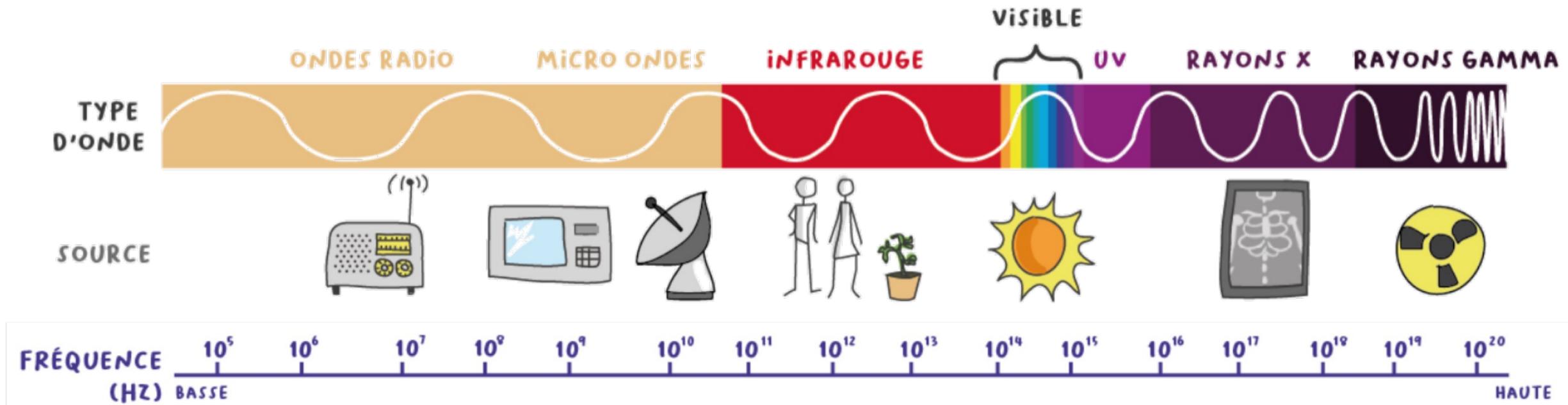
Fréquences : quelques ordres de grandeur

■ Ondes sonores :



© SCHOOLMOUV

■ Ondes électromagnétiques :



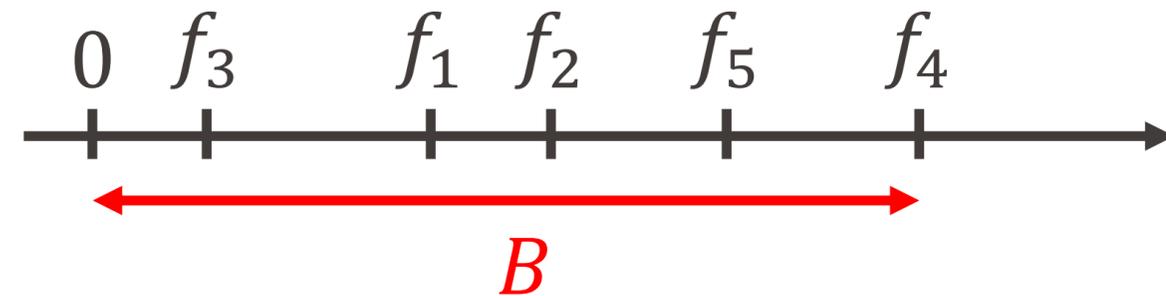
Bande passante

- Revenons à notre somme de sinusoides :

$$X(t) = a_1 \cdot \sin(2\pi f_1 t + \delta_1) + \dots + a_n \cdot \sin(2\pi f_n t + \delta_n)$$

- On définit comme suit **la bande passante** de ce signal :

$$B = f_{max} = \max\{f_1, \dots, f_n\}$$



- **La bande passante joue un rôle primordial en traitement du signal.**

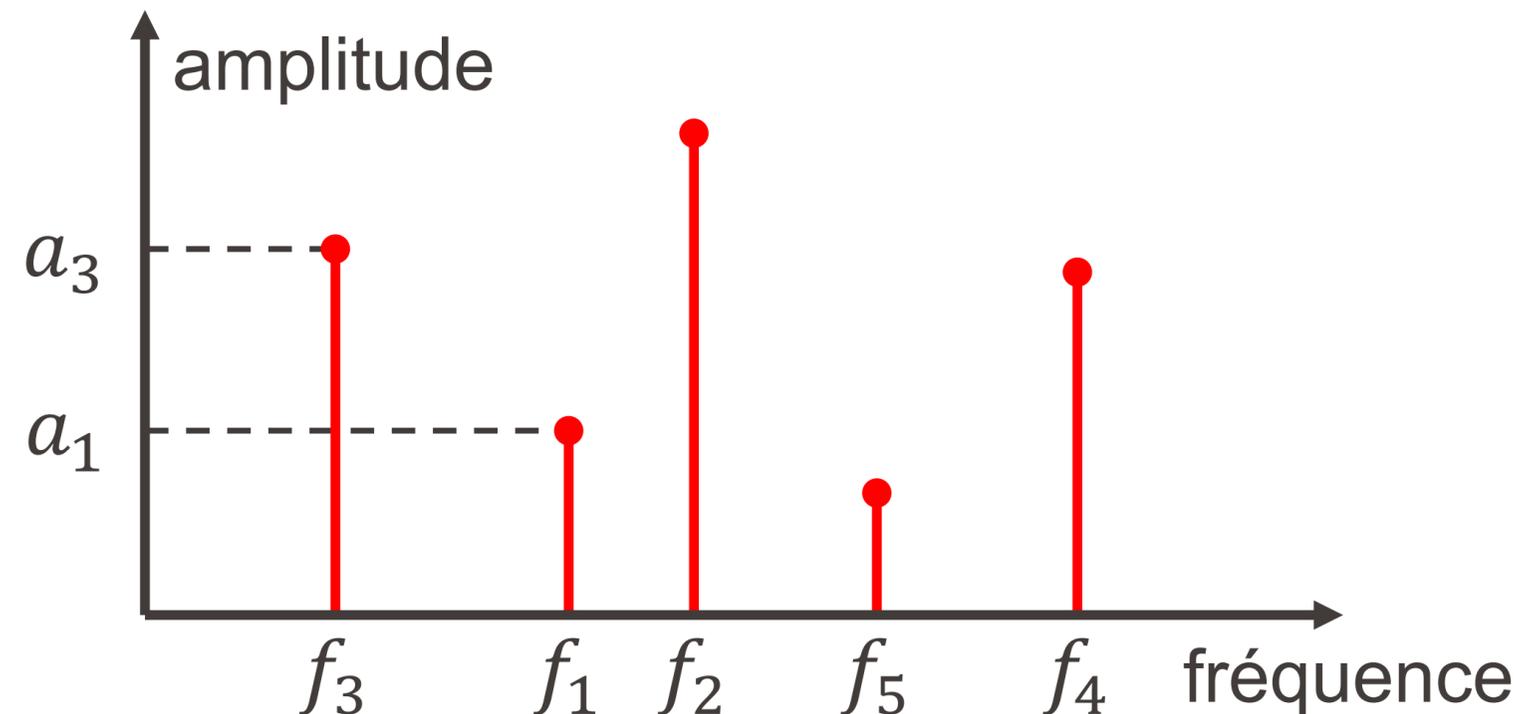
Représentation spectrale du signal (Fourier)

- Toujours avec notre somme de sinusoides :

$$X(t) = a_1 \cdot \sin(2\pi f_1 t + \delta_1) + \dots + a_n \cdot \sin(2\pi f_n t + \delta_n)$$

- axe horizontal = fréquences présentes
- axe vertical = amplitudes correspondantes

- **Le spectre du signal :**





Information, Calcul et Communication

Filtrage de signaux

Olivier Lévêque

Filtrage d'un signal

- De manière générale, lorsqu'un signal ($X(t)$, $t \in \mathbb{R}$) passe par un **filtre**, il en ressort une version déformée ($\hat{X}(t)$, $t \in \mathbb{R}$) :



==== Pourquoi donc vouloir filtrer un signal ? =====

Par exemple, atténuer le bruit !

- Dans ce cours, nous allons voir deux exemples de filtres **passé-bas** :
 - Le filtre **passé-bas idéal**
 - Le filtre à **moyenne mobile**

Filtre passe-bas idéal

Un filtre passe-bas idéal est un filtre qui **supprime** les composantes de fréquences supérieures à une fréquence de coupure f_c .

Exemple :

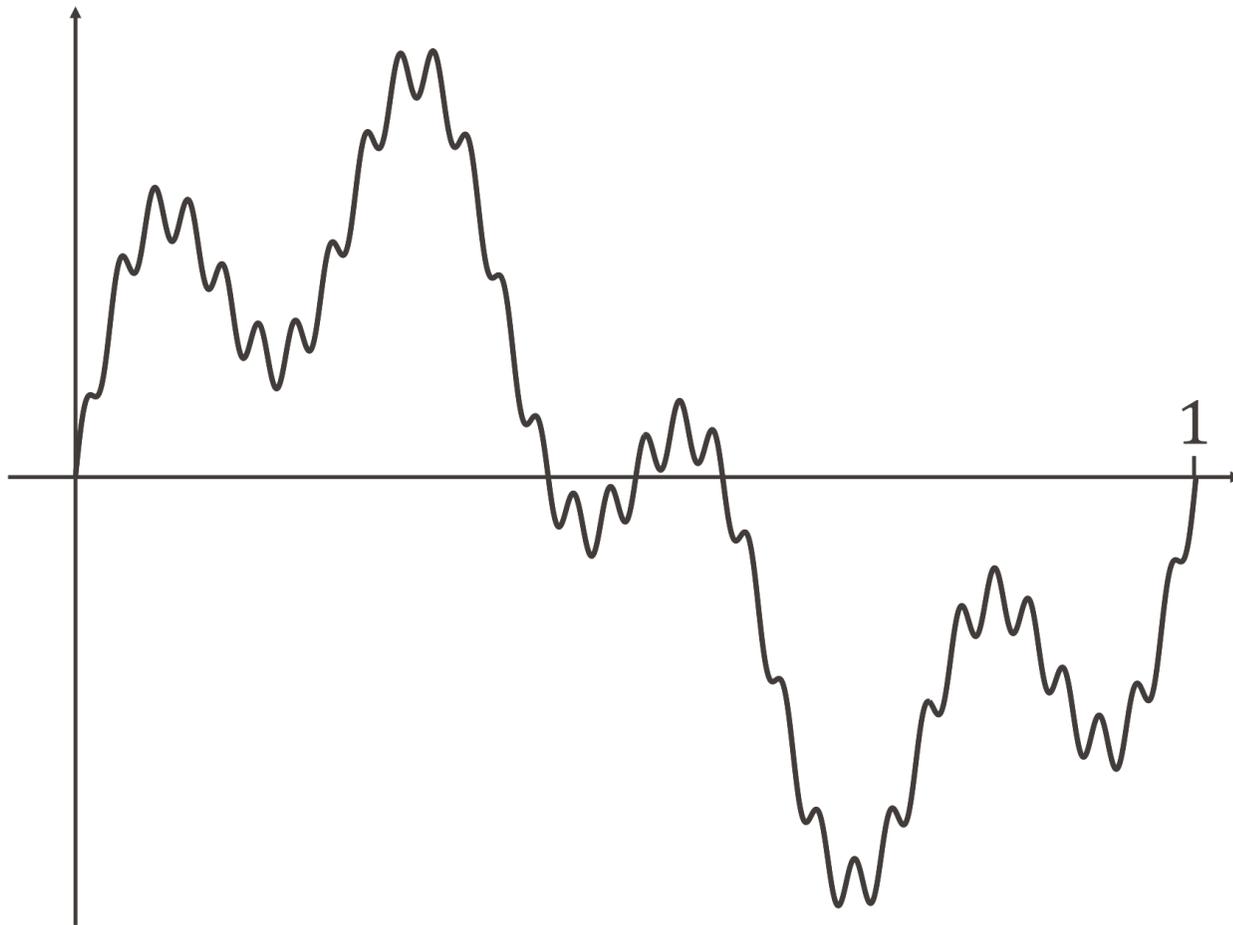
- Considérons le signal (contenant les fréquences $f = 1, 4$ et 32 Hz) :

$$X(t) = \sin(2\pi t) + \frac{1}{2} \sin(8\pi t) + \frac{1}{10} \sin(64\pi t)$$

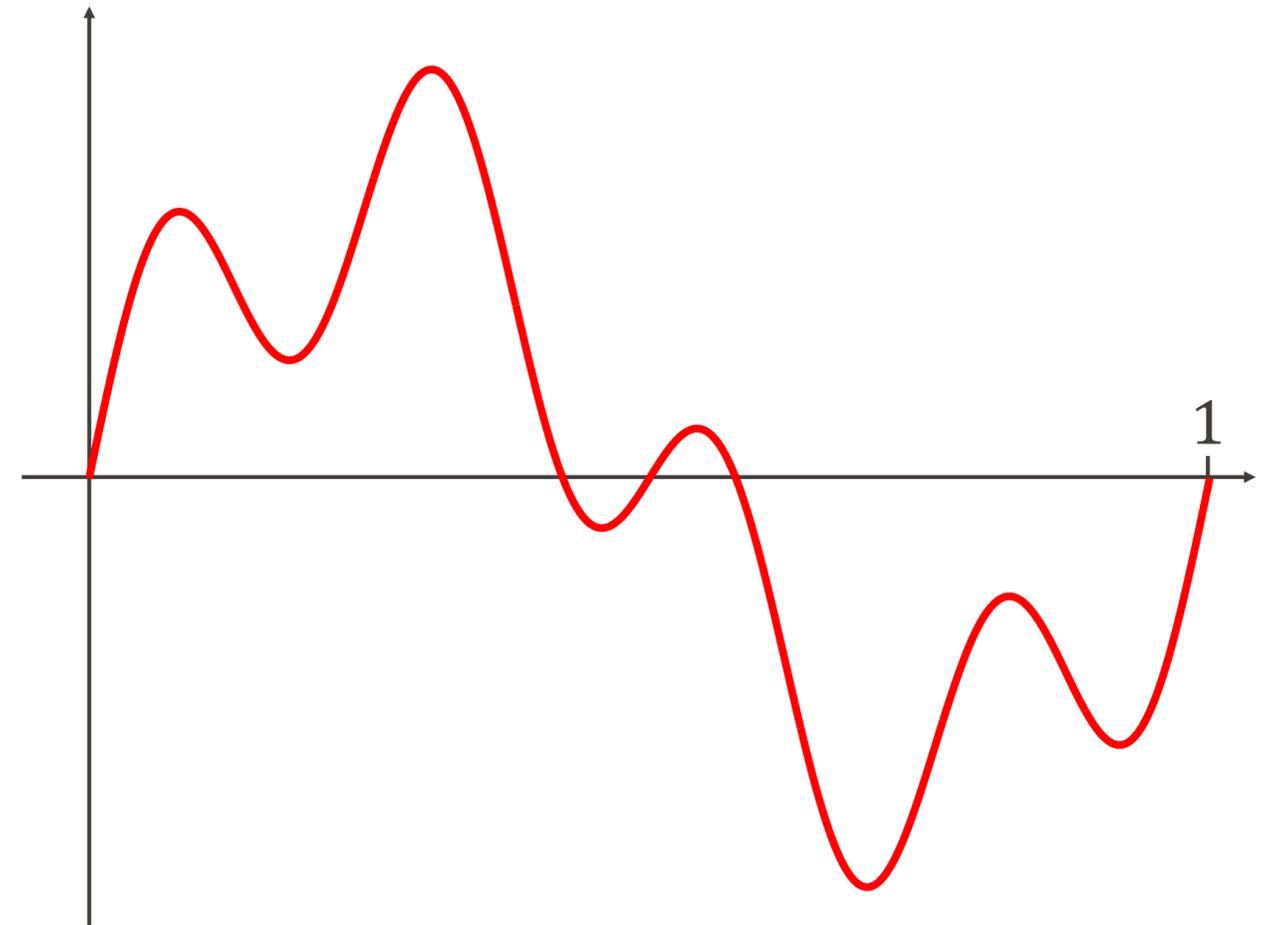
- Après passage au travers d'un **filtre passe-bas avec fréquence de coupure** $f_c = 30 \text{ Hz}$, la composante à 32 Hz disparaît, et le signal devient :

$$\hat{X}(t) = \sin(2\pi t) + \frac{1}{2} \sin(8\pi t)$$

Exemple :



$$X(t) = \sin(2\pi t) + \frac{1}{2} \sin(8\pi t) + \frac{1}{10} \sin(64\pi t) \rightarrow \hat{X}(t) = \sin(2\pi t) + \frac{1}{2} \sin(8\pi t)$$



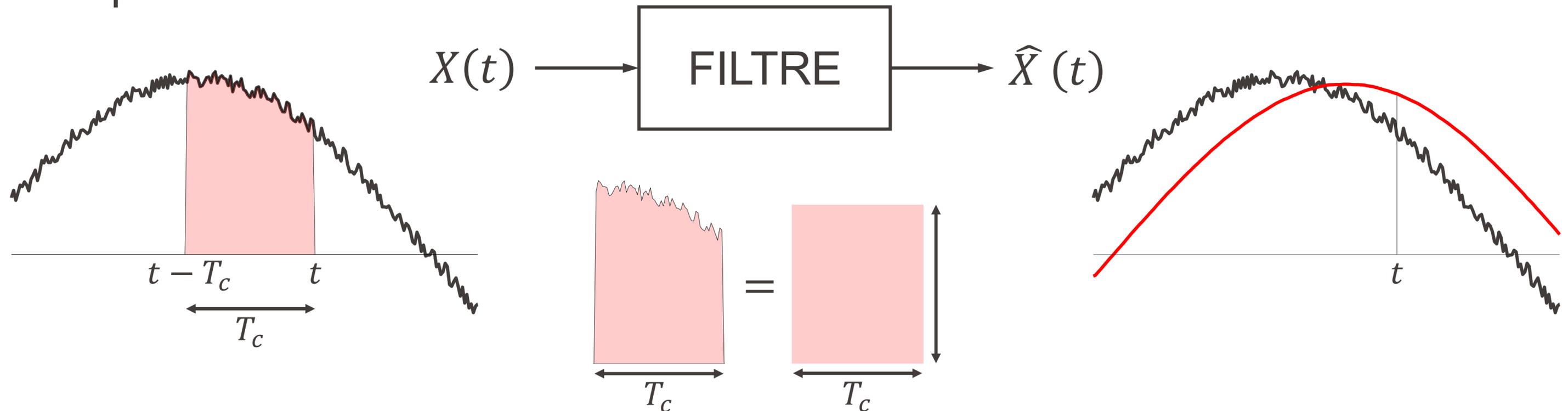
Filtre à moyenne mobile

Le signal $\hat{X}(t)$ sortant à l'instant t d'un filtre à moyenne mobile est donné par :

$$\hat{X}(t) = \frac{1}{T_c} \cdot \int_{t-T_c}^t X(s) \cdot ds$$

où T_c est la période sur laquelle on moyenne le signal.

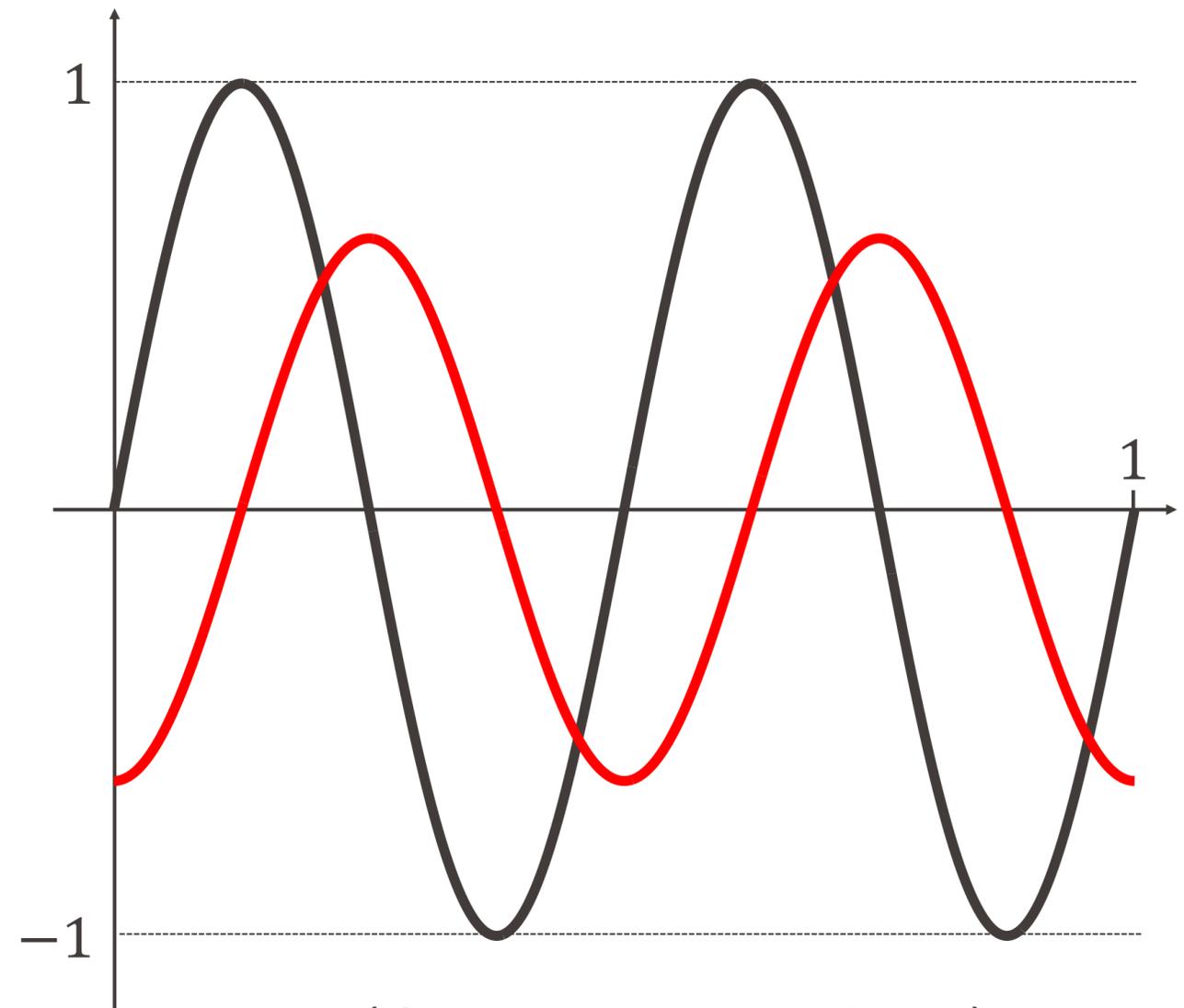
■ Interprétation :



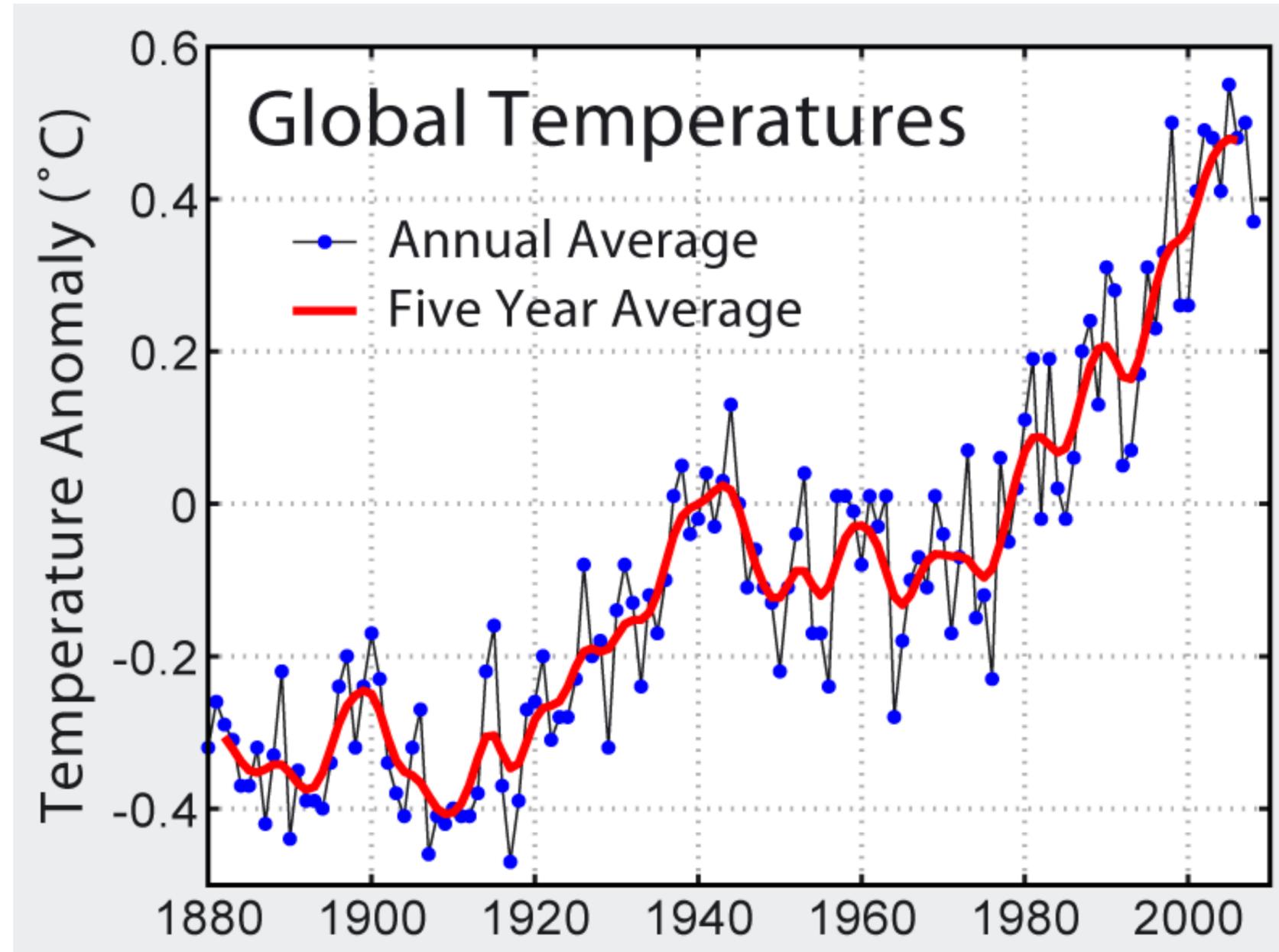
Filtre à moyenne mobile

Exemple : Que devient le signal $X(t) = \sin(2\pi ft)$ passant par un tel filtre?

$$\begin{aligned}
 \hat{X}(t) &= \frac{1}{T_c} \cdot \int_{t-T_c}^t X(s) \cdot ds \\
 &= \frac{1}{T_c} \cdot \int_{t-T_c}^t \sin(2\pi fs) \cdot ds \\
 &= \frac{\cos(2\pi f(t - T_c)) - \cos(2\pi ft)}{2\pi f \cdot T_c} \\
 &= \frac{\sin(\pi f T_c)}{\pi f T_c} \cdot \sin(2\pi ft - \pi f T_c)
 \end{aligned}$$



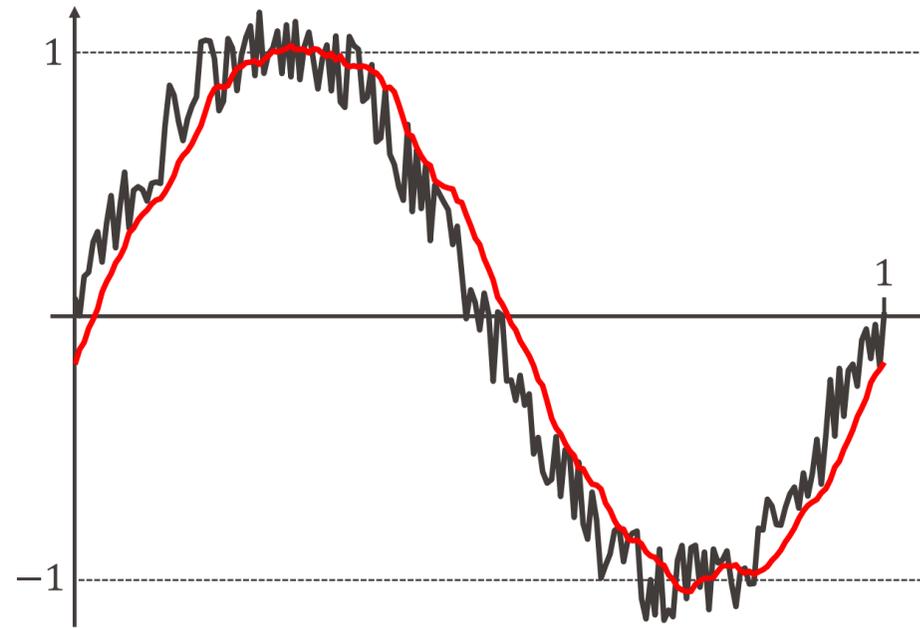
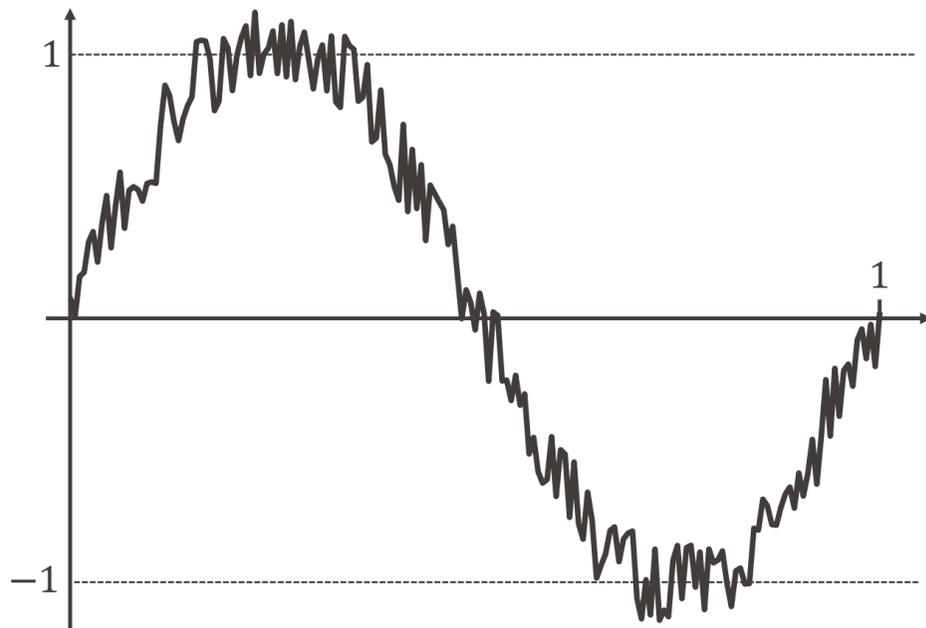
$(f = 2 \text{ Hz}, T_c = 0.25 \text{ sec})$



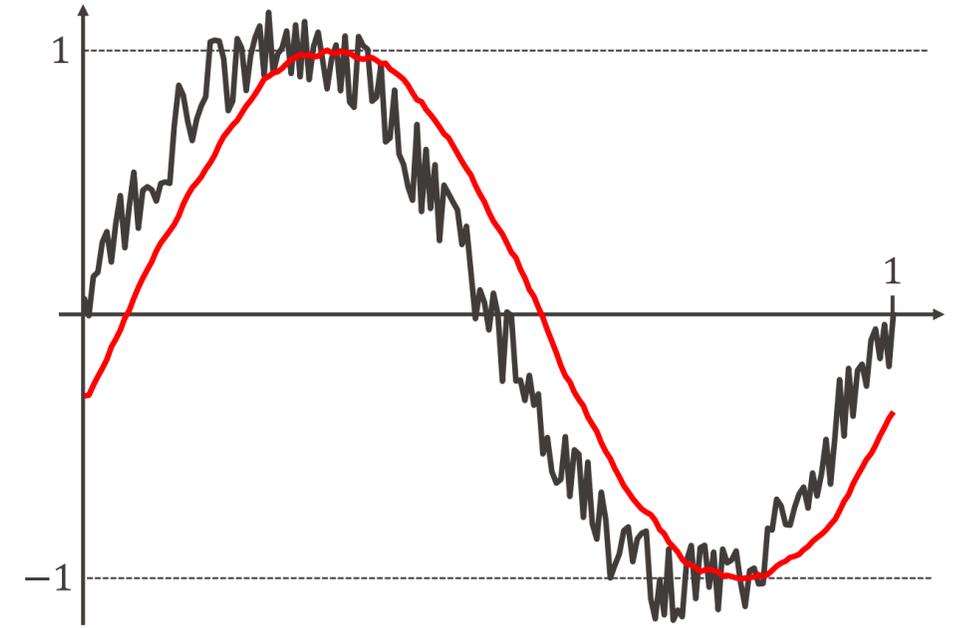
Source: Global Warming Art

Effet de la période T_c

$$X(t) \rightarrow \hat{X}(t) :$$



$T_c = 0.05$ sec



$T_c = 0.1$ sec

Plus T_c augmente :

- plus le signal sortant est **lisse**,
- mais plus le **décalage** est grand également.

Effet de la période T_c

- Revenons à la sinusoïde pure $X(t) = \sin(2\pi f t)$:

$$\hat{X}(t) = \frac{\sin(\pi f T_c)}{\pi f T_c} \cdot \sin(2\pi f t - \pi f T_c)$$

- De cette expression, on déduit que :

$$\max_{t \in \mathbb{R}} |\hat{X}(t)| = \left| \frac{\sin(\pi f T_c)}{\pi f T_c} \right| \leq \frac{1}{\pi f T_c}$$

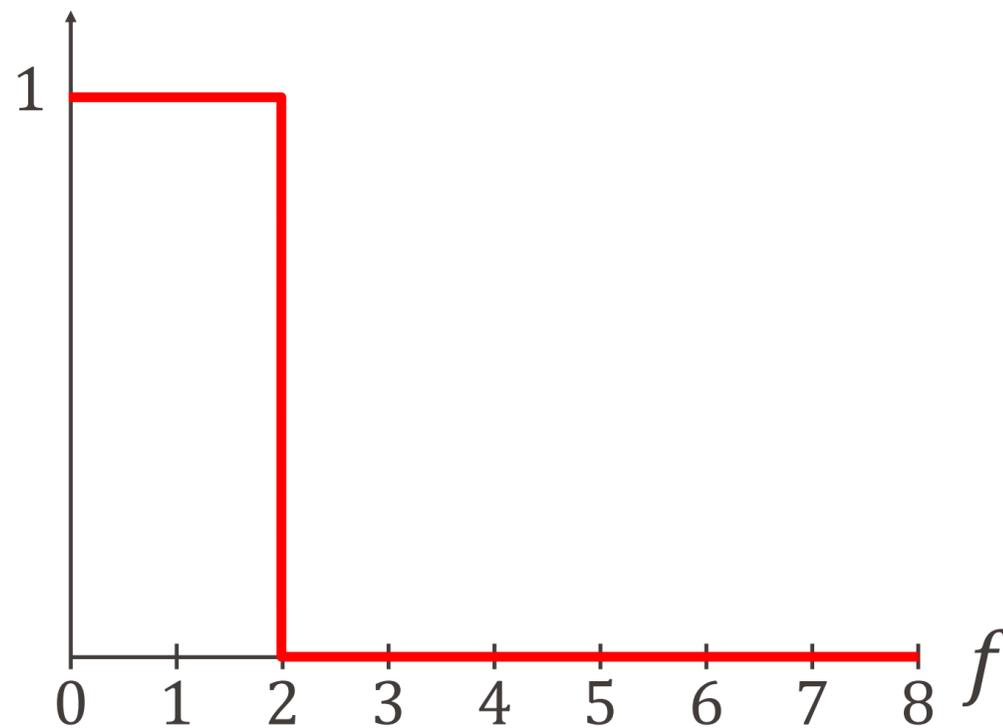
- On voit que si $f T_c$ est grand, alors le signal $\hat{X}(t)$ est de faible amplitude.

Après le passage à travers un filtre à moyenne mobile, les **hautes fréquences** d'un signal sont donc **fortement atténuées**.

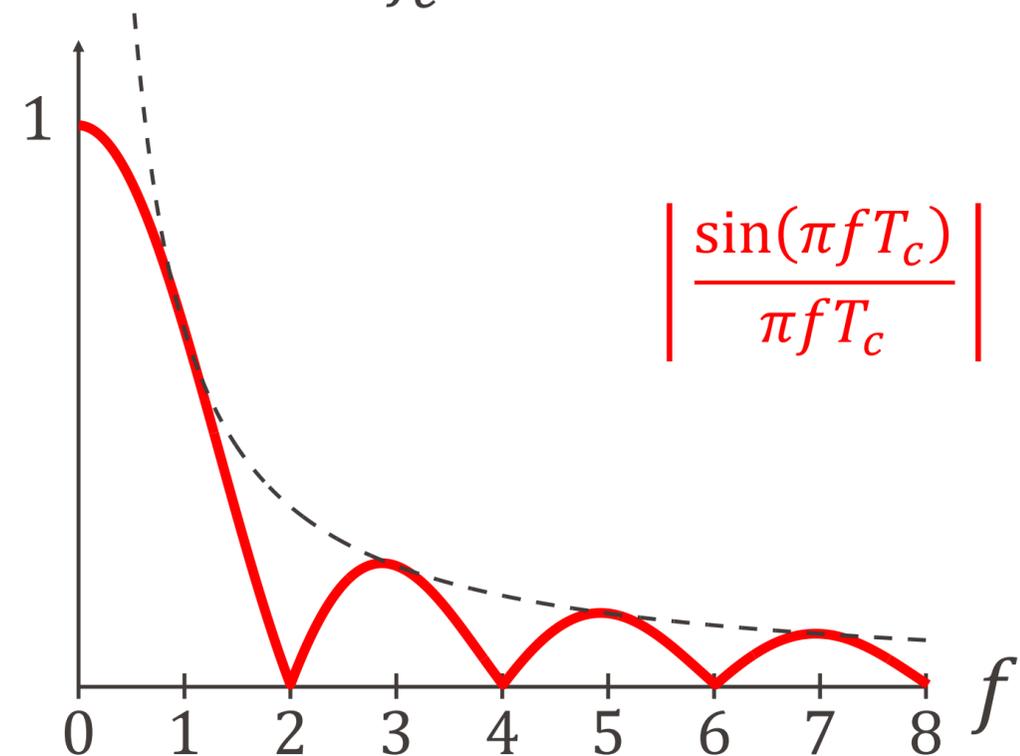
Comparaison de ces deux filtres passe-bas

Atténuation des fréquences dans la **représentation spectrale** :

- un **filtre passe-bas idéal** avec fréquence de coupure $f_c = 2 \text{ Hz}$



- un **filtre à moyenne mobile** de période $T_c = \frac{1}{f_c} = 0.5 \text{ sec}$.



Sur ce dernier graphe apparaît en traitillé la borne supérieure $\frac{1}{\pi f T_c}$ qu'on vient de calculer

Filtrage : conclusion

- Un filtre passe-bas sert donc à supprimer ou atténuer les hautes fréquences dans un signal.
- Par la suite, nous verrons une autre application importante des filtres passe-bas.



Information, Calcul et Communication

Échantillonnage
de signaux

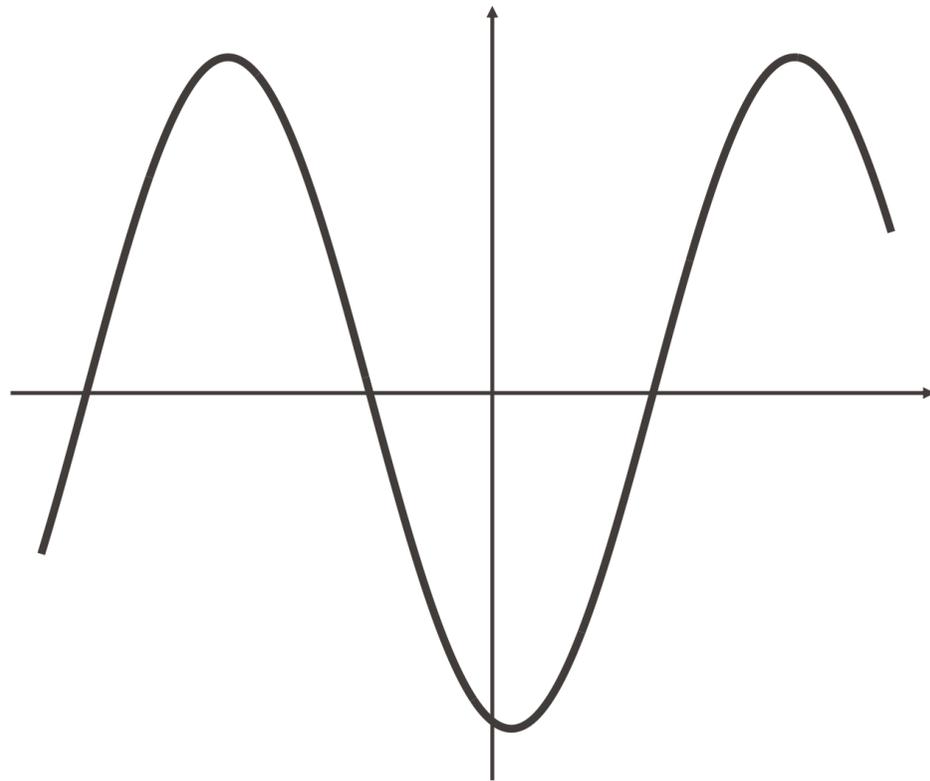
Olivier Lévêque

Échantillonnage d'un signal

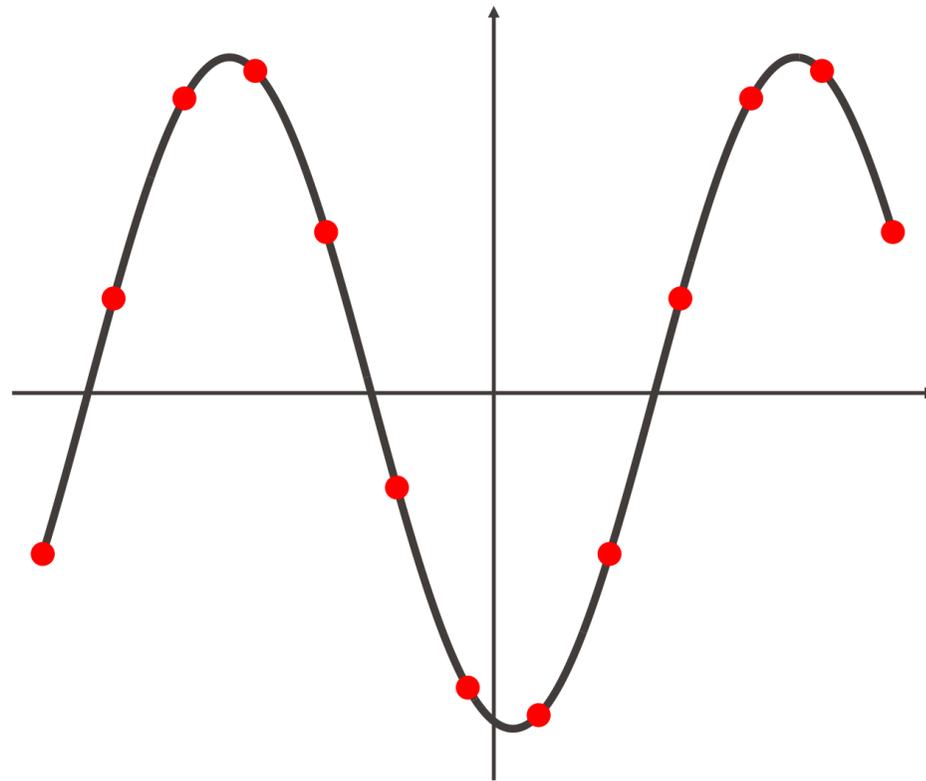
- Comment représenter un signal physique de nature analogique (par exemple, une onde sonore ou électromagnétique) sous forme numérique, c'est-à-dire sous la forme d'une suite de 0 et de 1 ?
- Pour pouvoir **traiter l'information** contenue dans un signal $(X(t), t \in \mathbb{R})$, il faut :
 - 1. échantillonner** le signal à des instants discrets
 - 2. quantifier** les valeurs du signal à ces instants
- **Question naturelle** : Que perd-on du signal d'origine à travers ces deux opérations successives?

Échantillonnage d'un signal

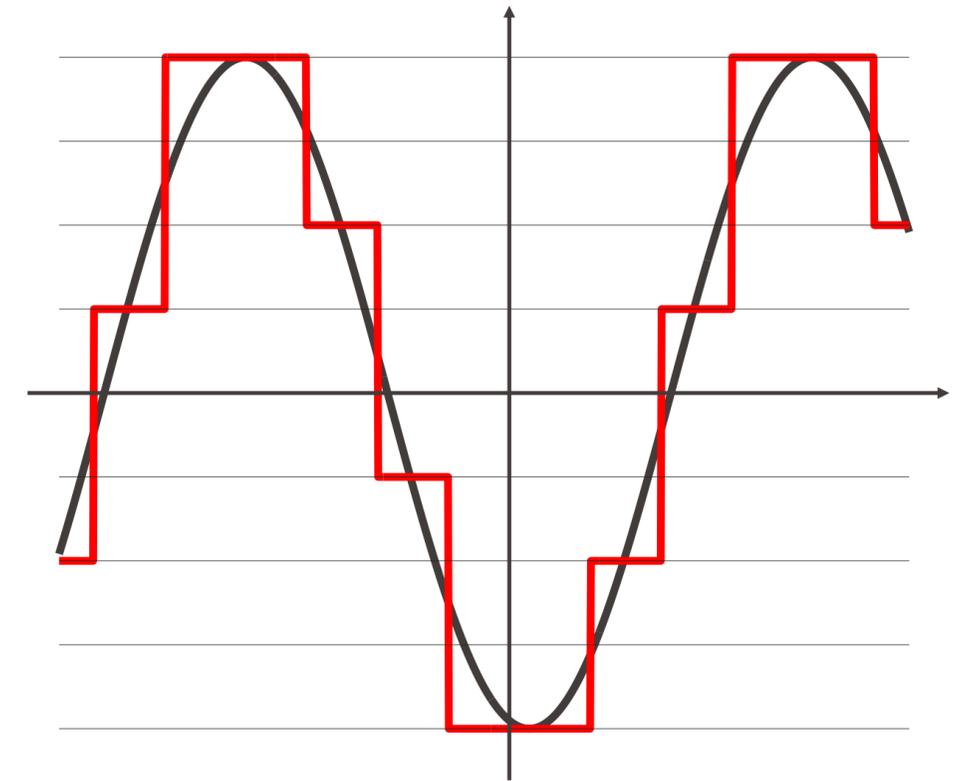
■ signal d'origine



■ signal échantillonné

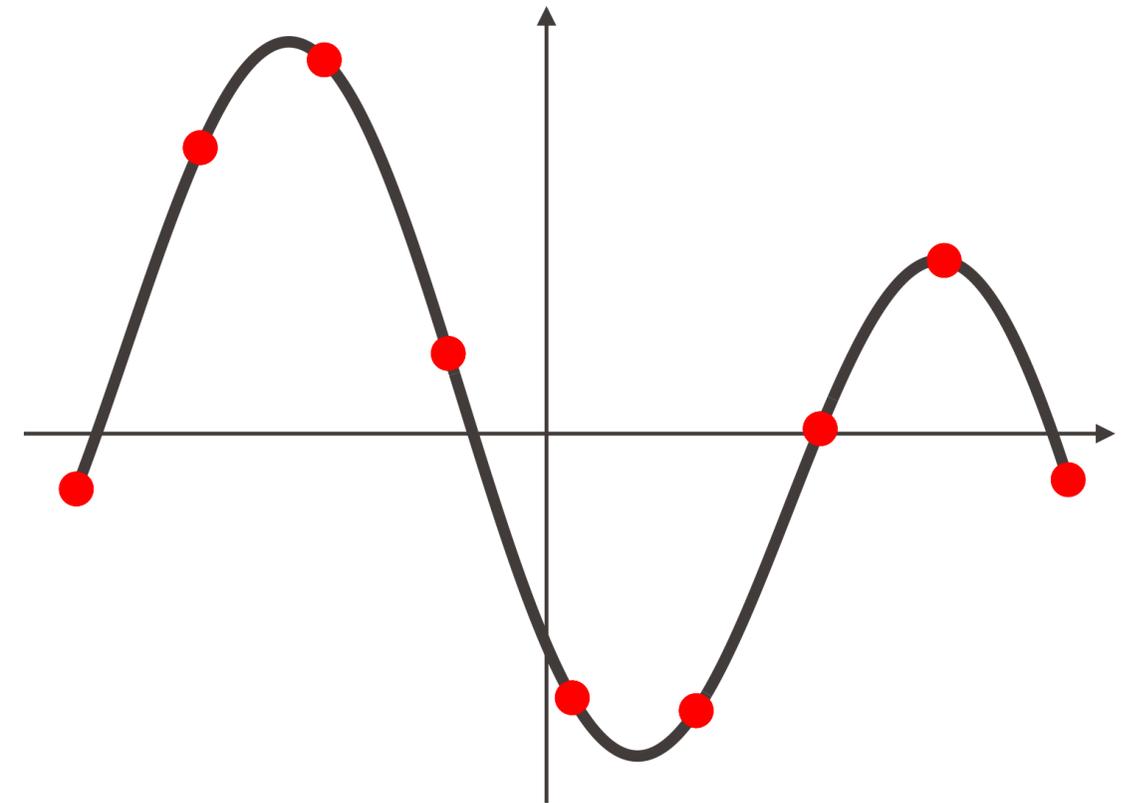
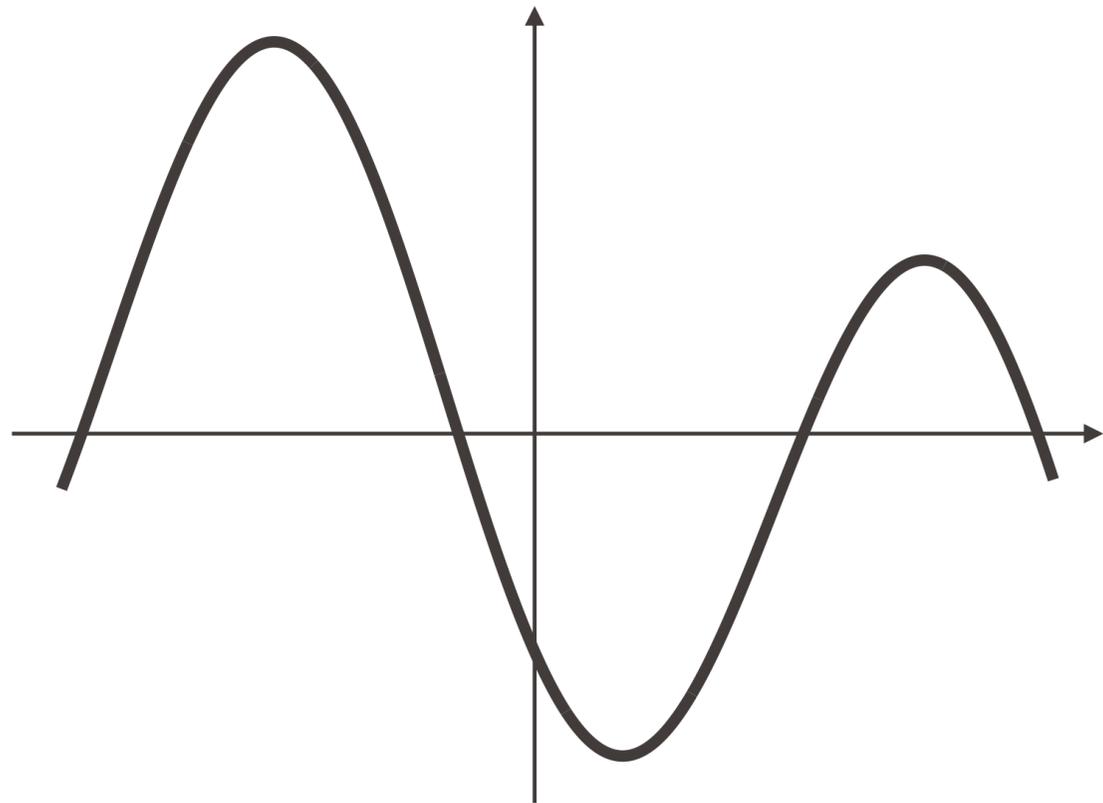


■ signal échantillonné et quantifié



Échantillonnage d'un signal

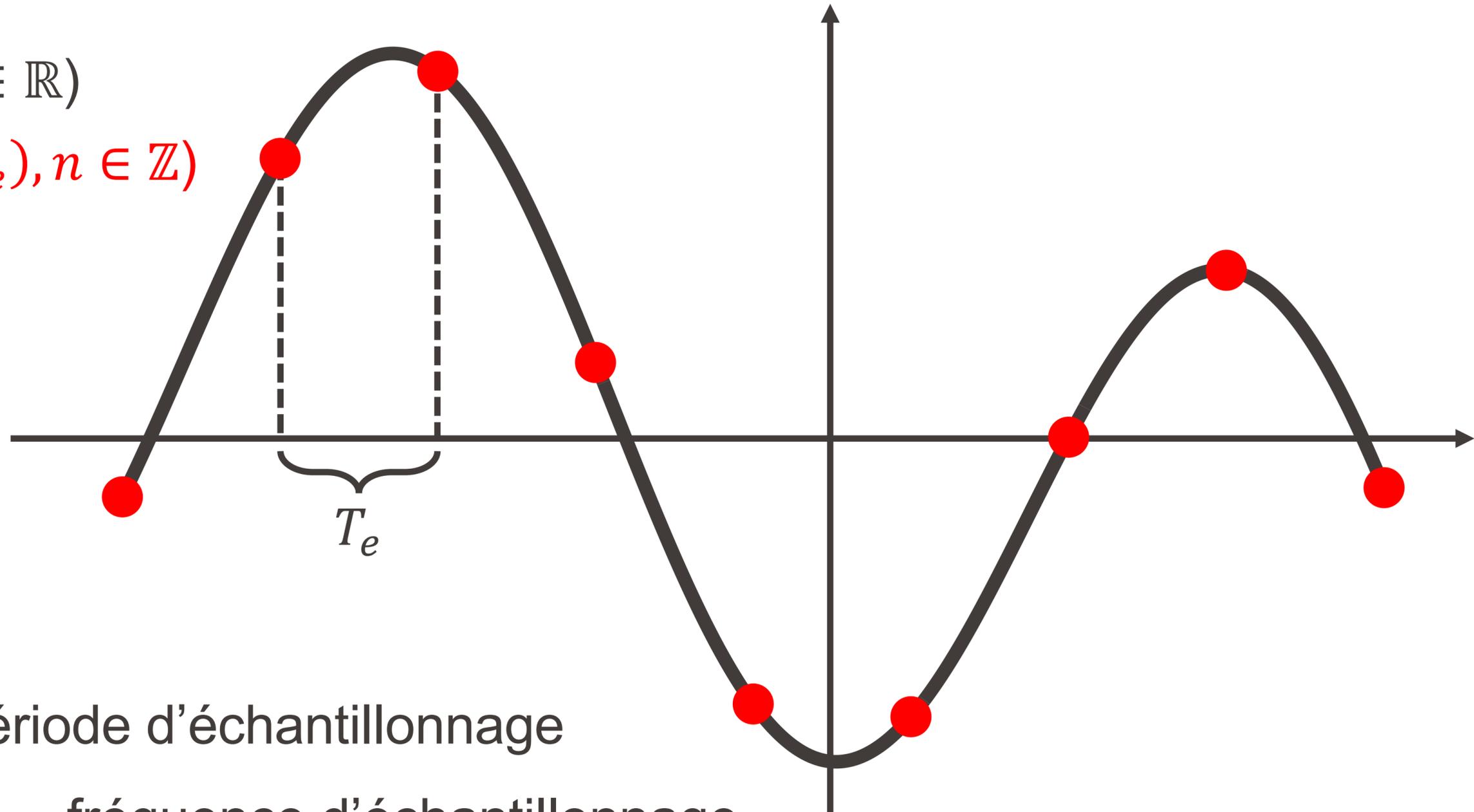
- Nous nous concentrerons ici sur la partie « échantillonnage » :



Période et fréquence d'échantillonnage

$(X(t), t \in \mathbb{R})$

$\rightarrow (X(nT_e), n \in \mathbb{Z})$



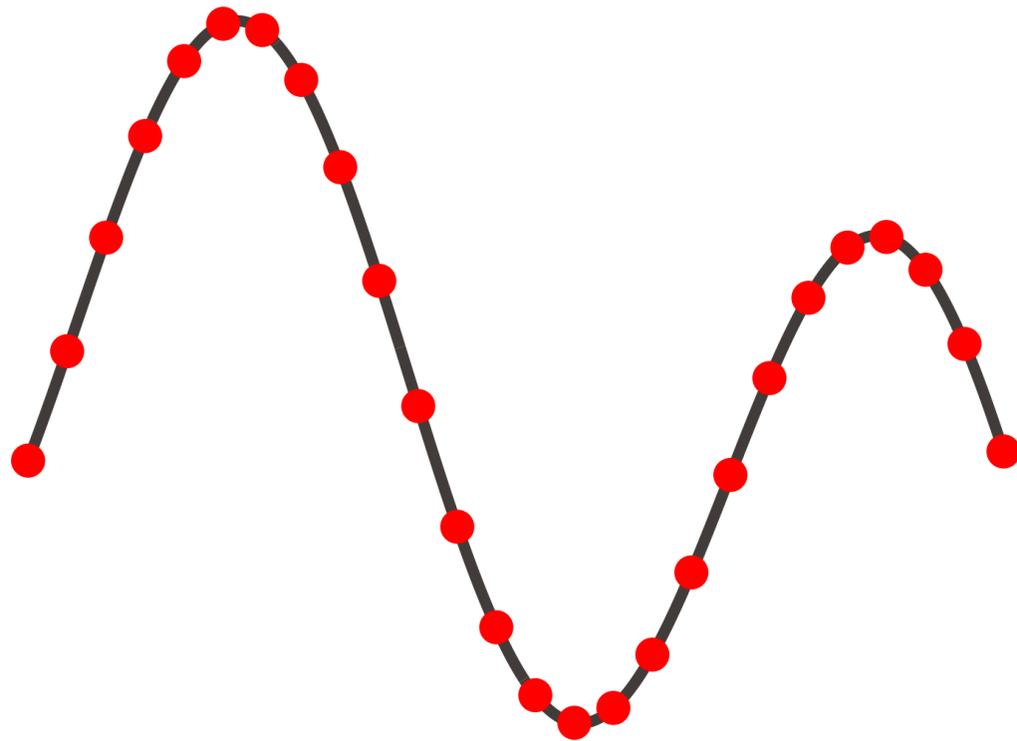
- T_e = période d'échantillonnage
- $f_e = \frac{1}{T_e}$ = fréquence d'échantillonnage

Période d'échantillonnage T_e

==== Quelle période d'échantillonnage T_e est la «bonne» ? =====

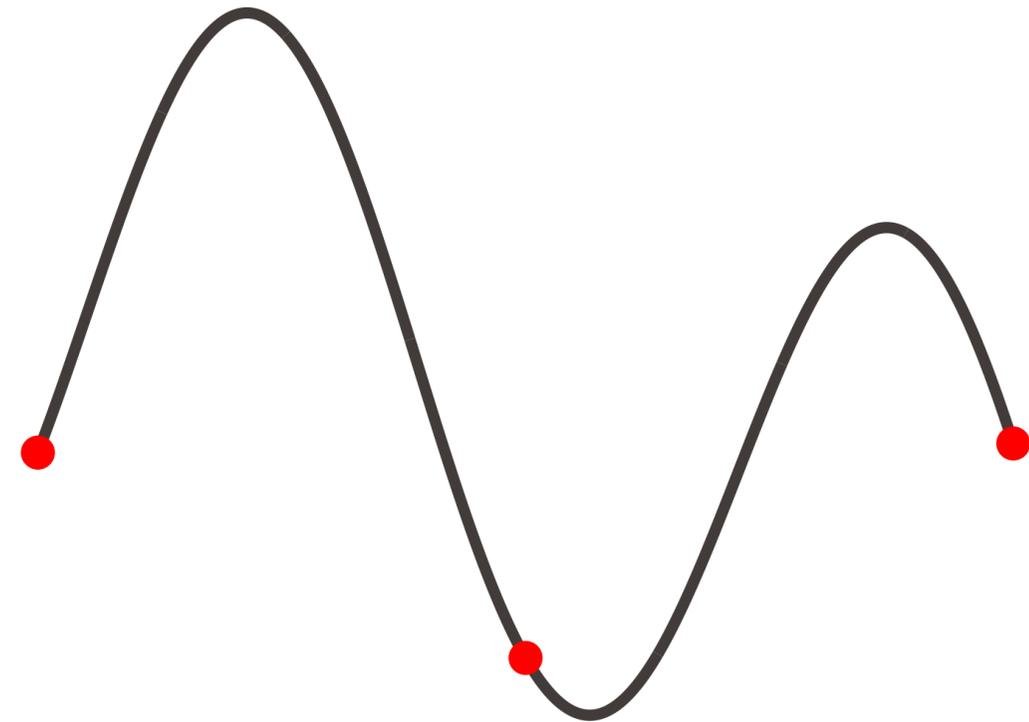
- T_e trop petite:

trop d'information à traiter...



- T_e trop grande:

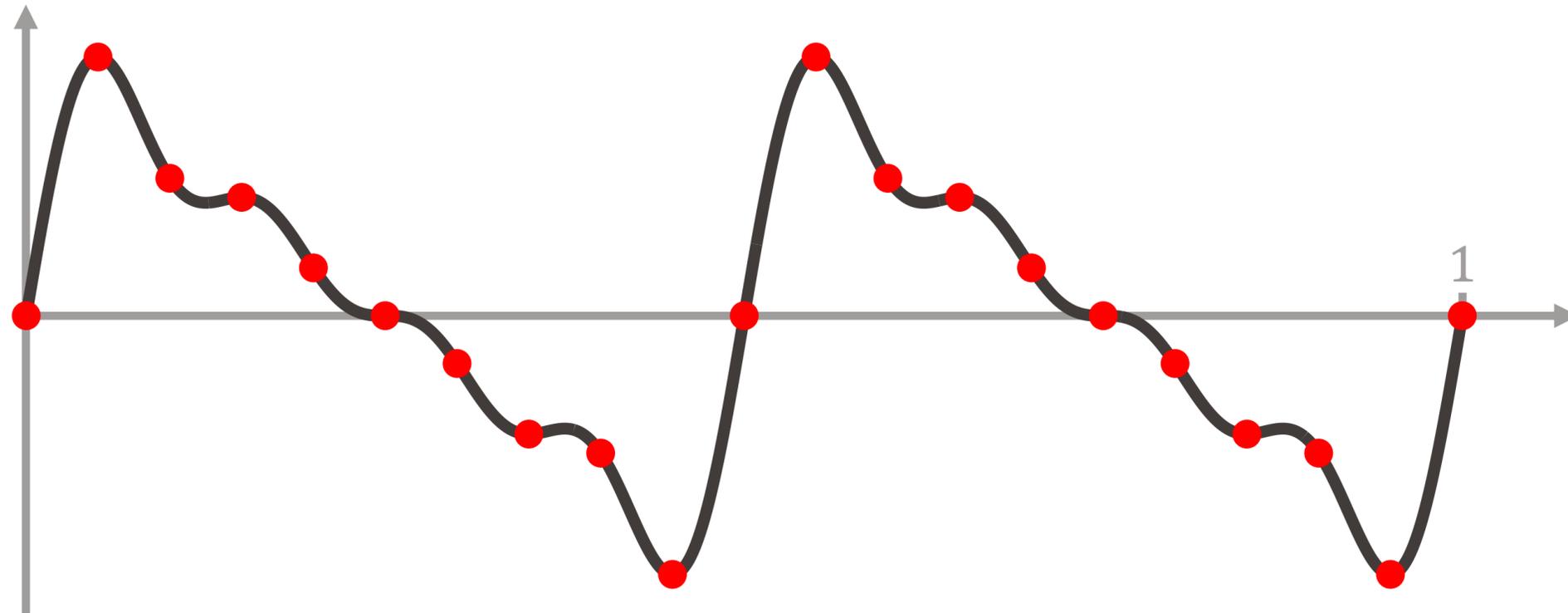
de l'information est perdue...



T_e ne peut pas être aussi grande qu'on veut

Exemple: reprenons le signal vu précédemment :

$$X(t) = \sin(4\pi t) + \frac{1}{2}\sin(8\pi t) + \frac{1}{3}\sin(12\pi t) + \frac{1}{4}\sin(16\pi t)$$

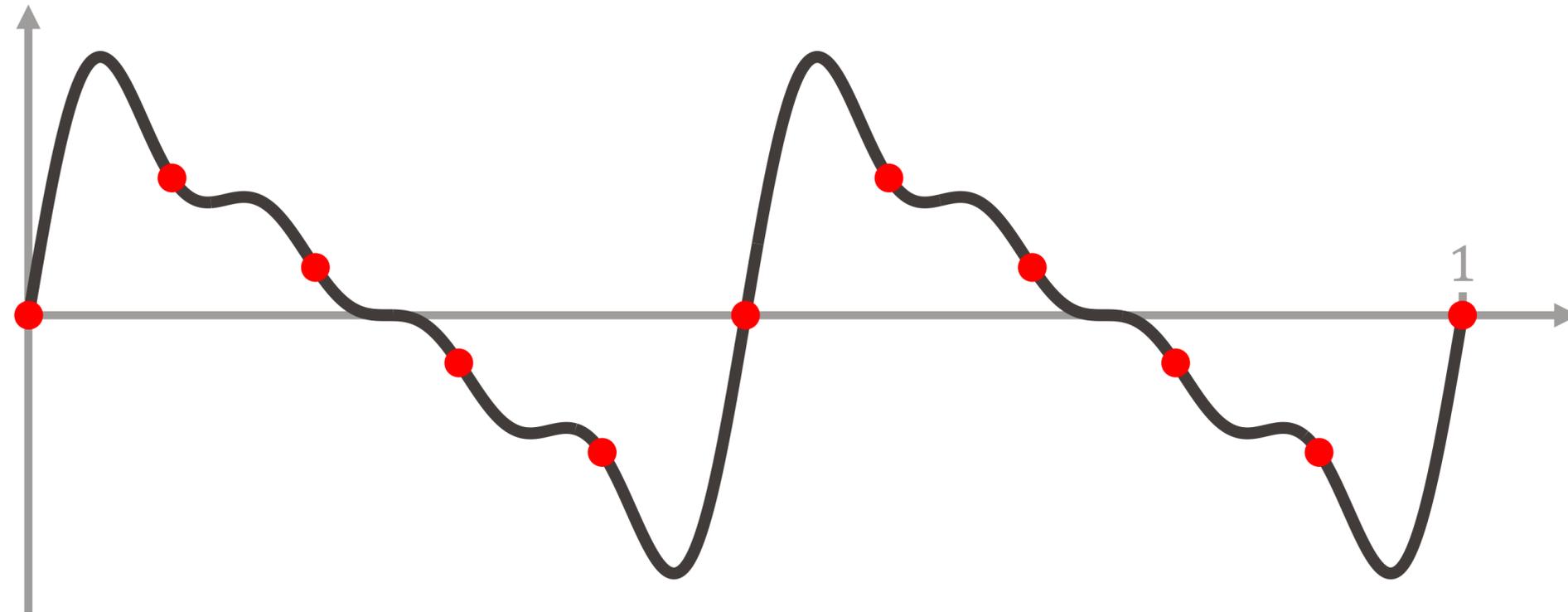


- Période d'échantillonnage $T_e = 0.05 \text{ sec}$ ($f_e = 20 \text{ Hz}$)

T_e ne peut pas être aussi grande qu'on veut

Exemple: reprenons le signal vu précédemment :

$$X(t) = \sin(4\pi t) + \frac{1}{2}\sin(8\pi t) + \frac{1}{3}\sin(12\pi t) + \frac{1}{4}\sin(16\pi t)$$

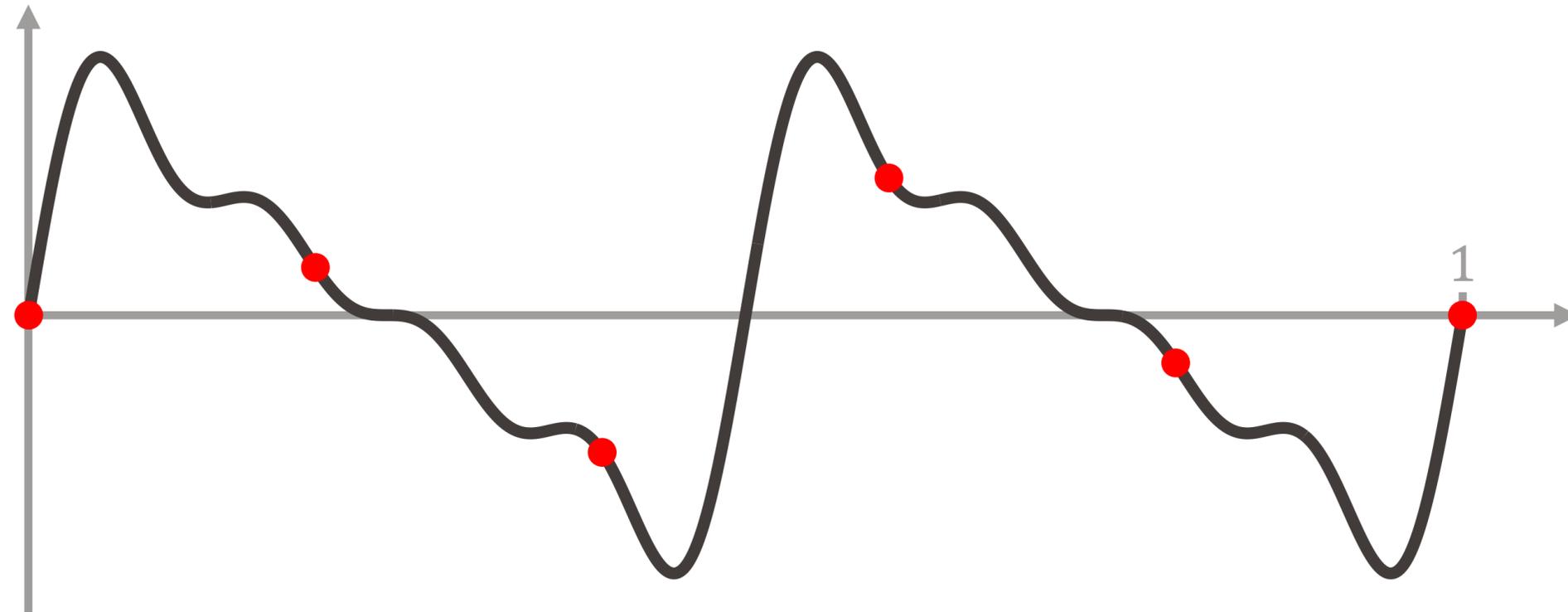


- Période d'échantillonnage $T_e = 0.1 \text{ sec}$ ($f_e = 10 \text{ Hz}$)

T_e ne peut pas être aussi grande qu'on veut

Exemple: reprenons le signal vu précédemment :

$$X(t) = \sin(4\pi t) + \frac{1}{2}\sin(8\pi t) + \frac{1}{3}\sin(12\pi t) + \frac{1}{4}\sin(16\pi t)$$

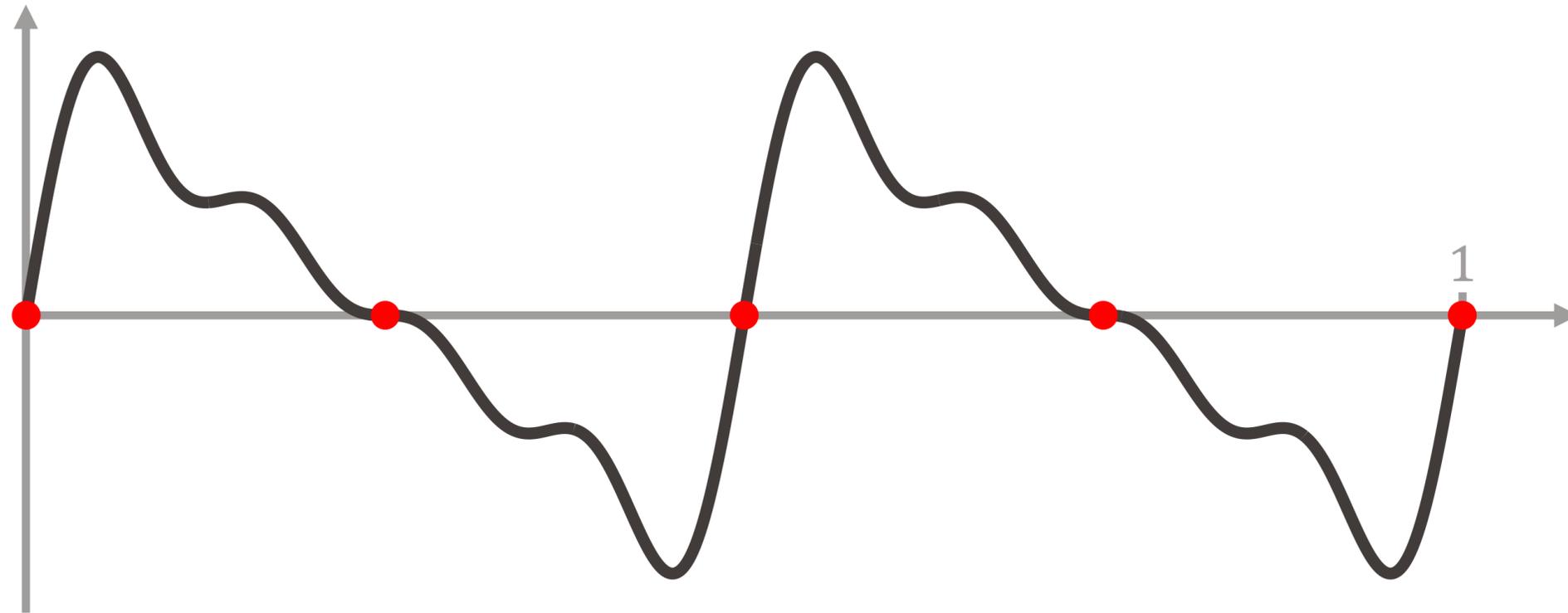


- Période d'échantillonnage $T_e = 0.2 \text{ sec}$ ($f_e = 5 \text{ Hz}$)

T_e ne peut pas être aussi grande qu'on veut

Exemple: reprenons le signal vu précédemment :

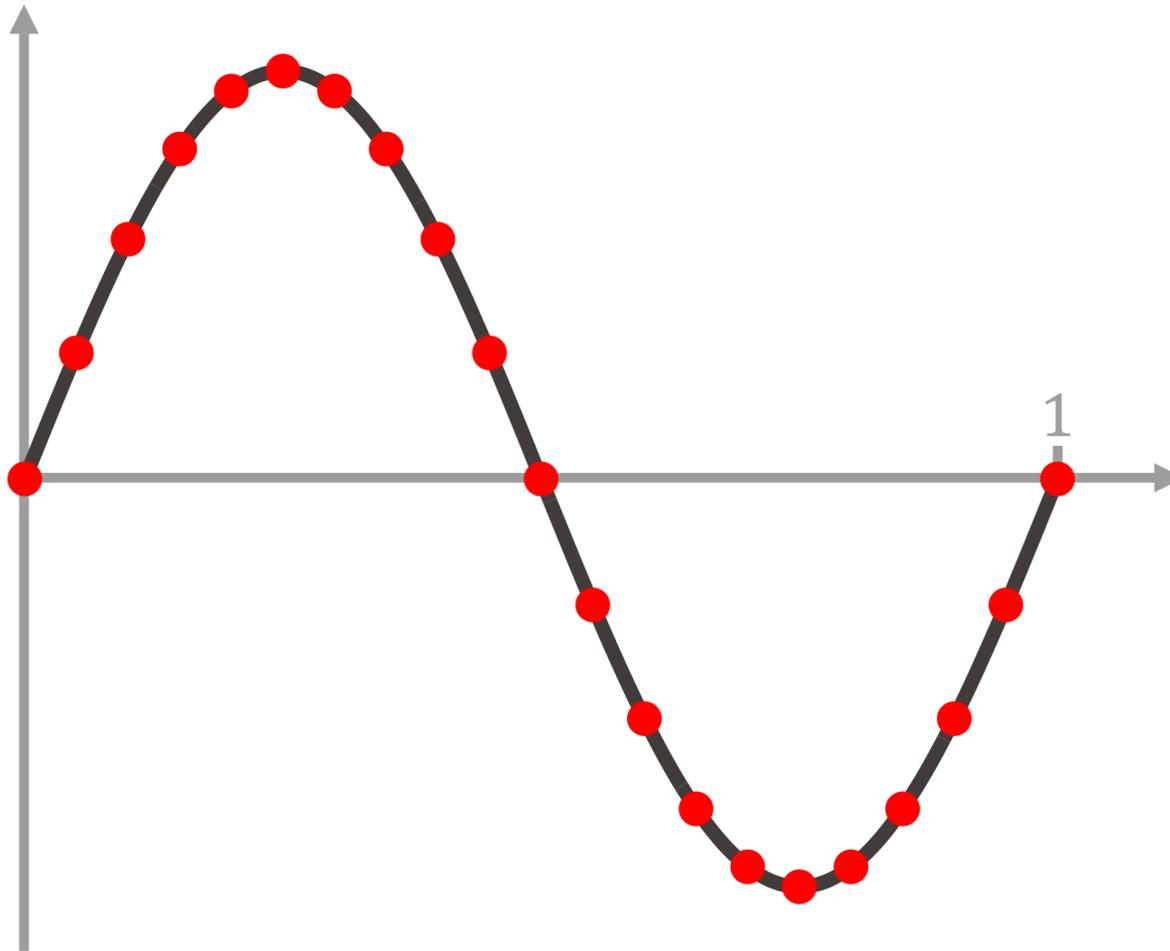
$$X(t) = \sin(4\pi t) + \frac{1}{2}\sin(8\pi t) + \frac{1}{3}\sin(12\pi t) + \frac{1}{4}\sin(16\pi t)$$



- Période d'échantillonnage $T_e = 0.25 \text{ sec}$ ($f_e = 4 \text{ Hz}$)

Échantillonnage d'une sinusoïde pure

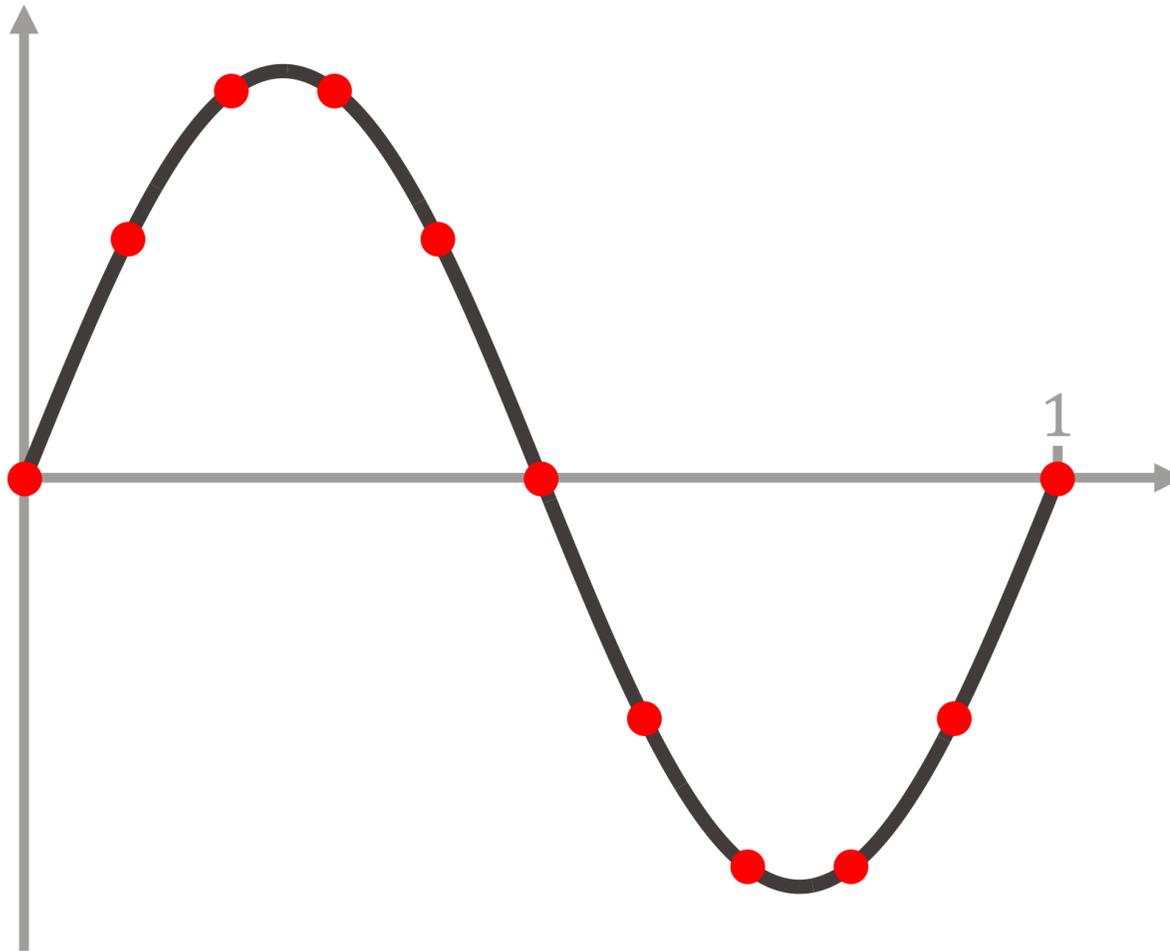
Autre exemple : sinusoïde pure $X(t) = \sin(2\pi t)$ ($f = 1\text{Hz}$)



- Période d'échantillonnage $T_e = 0.05$ sec ($f_e = 20$ Hz)

Échantillonnage d'une sinusoïde pure

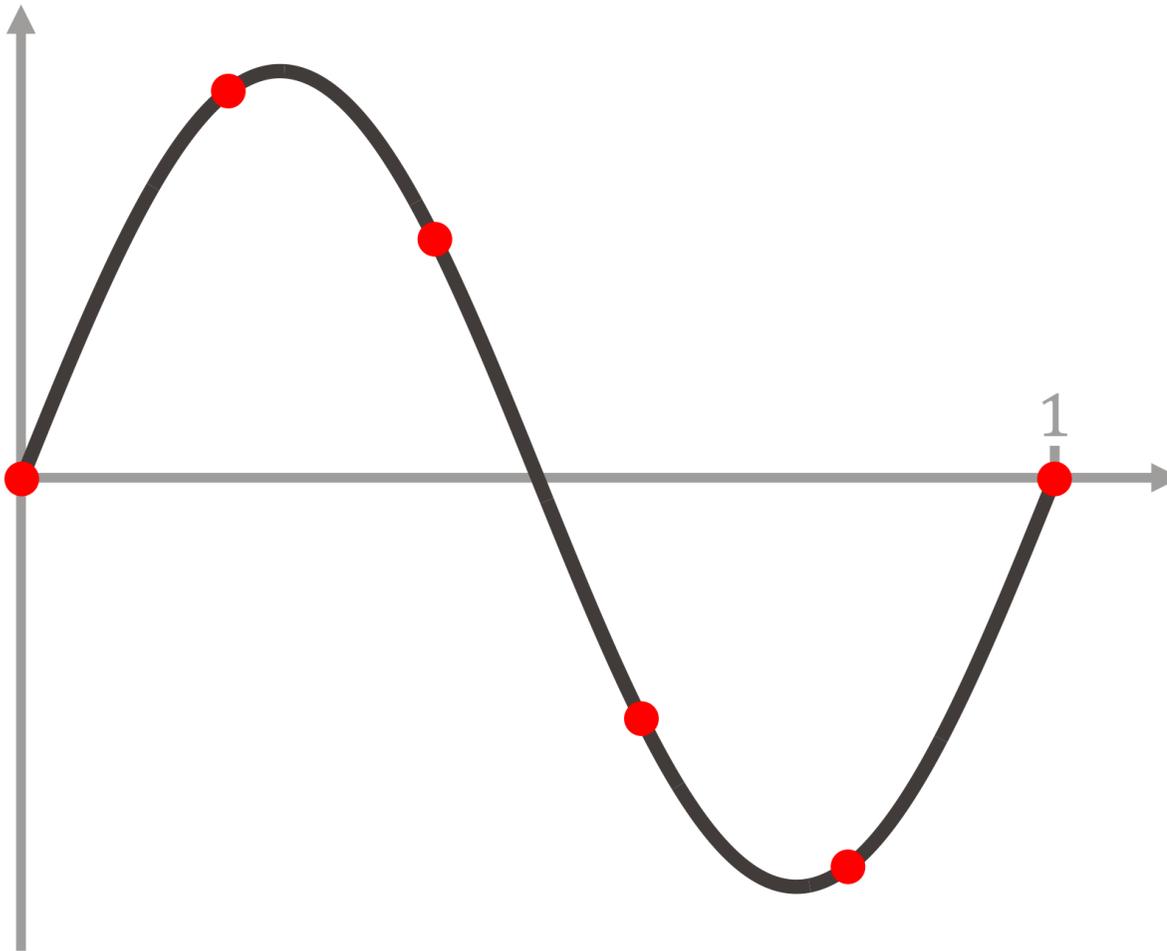
Autre exemple : sinusoïde pure $X(t) = \sin(2\pi t)$ ($f = 1\text{Hz}$)



- Période d'échantillonnage $T_e = 0.1 \text{ sec}$ ($f_e = 10 \text{ Hz}$)

Échantillonnage d'une sinusoïde pure

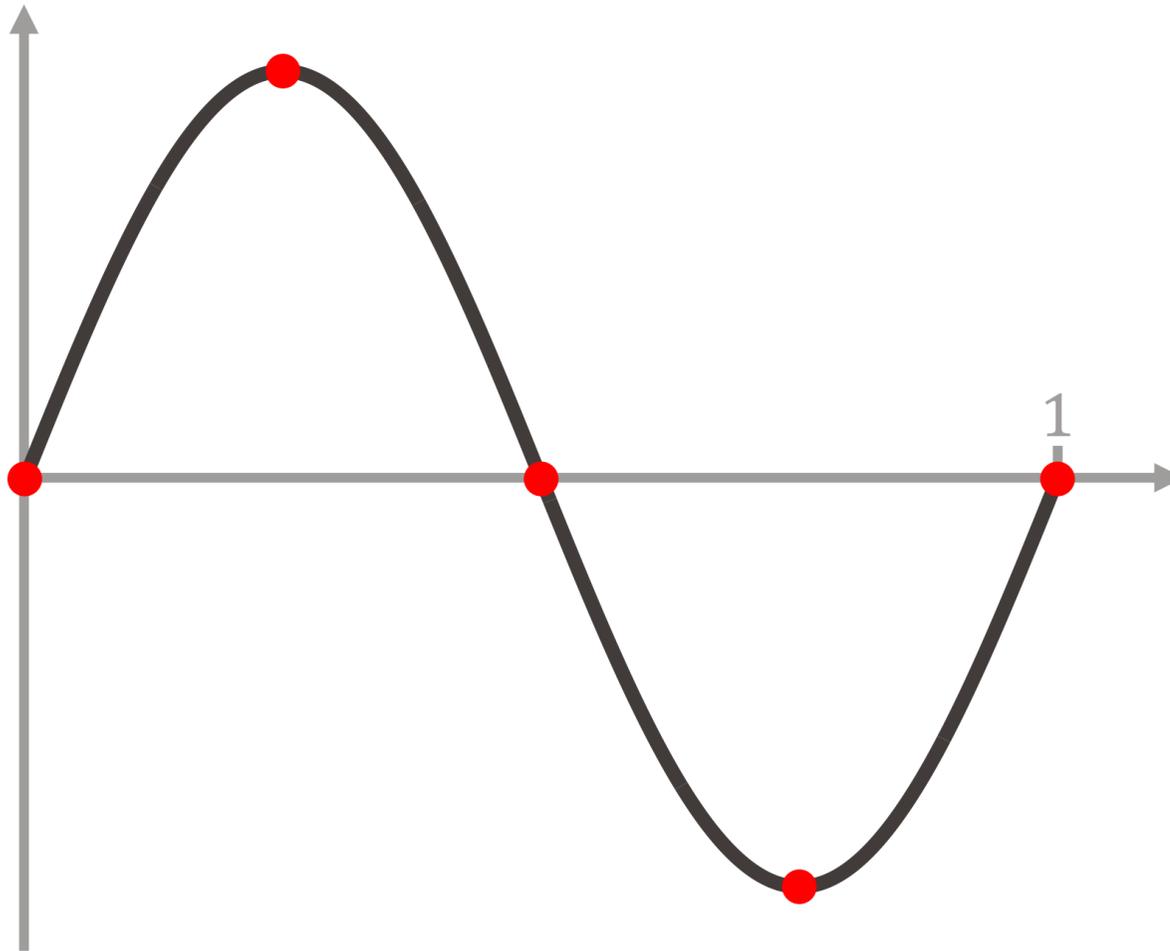
Autre exemple : sinusoïde pure $X(t) = \sin(2\pi t)$ ($f = 1\text{Hz}$)



- Période d'échantillonnage $T_e = 0.2\text{ sec}$ ($f_e = 5\text{ Hz}$)

Échantillonnage d'une sinusoïde pure

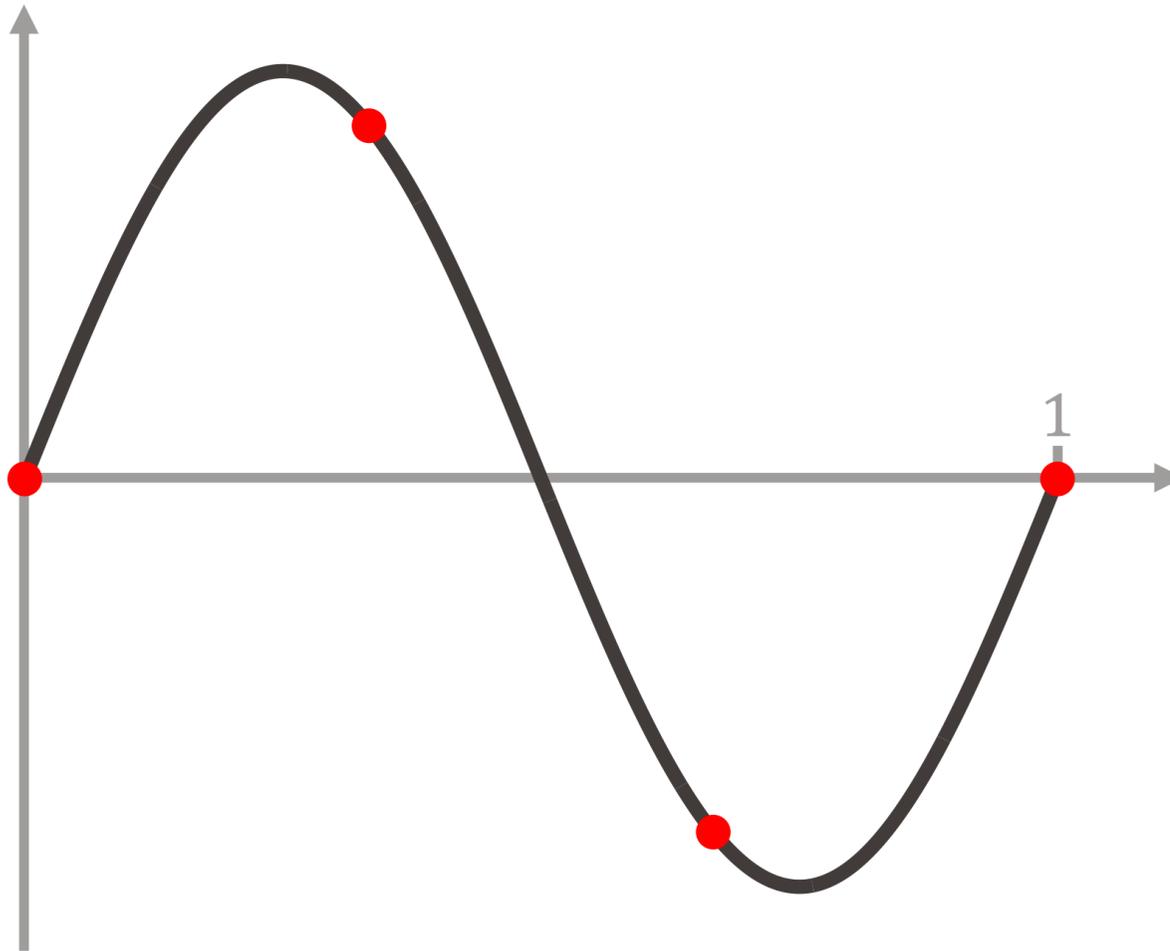
Autre exemple : sinusoïde pure $X(t) = \sin(2\pi t)$ ($f = 1\text{Hz}$)



- Période d'échantillonnage $T_e = 0.25\text{ sec}$ ($f_e = 4\text{ Hz}$)

Échantillonnage d'une sinusoïde pure

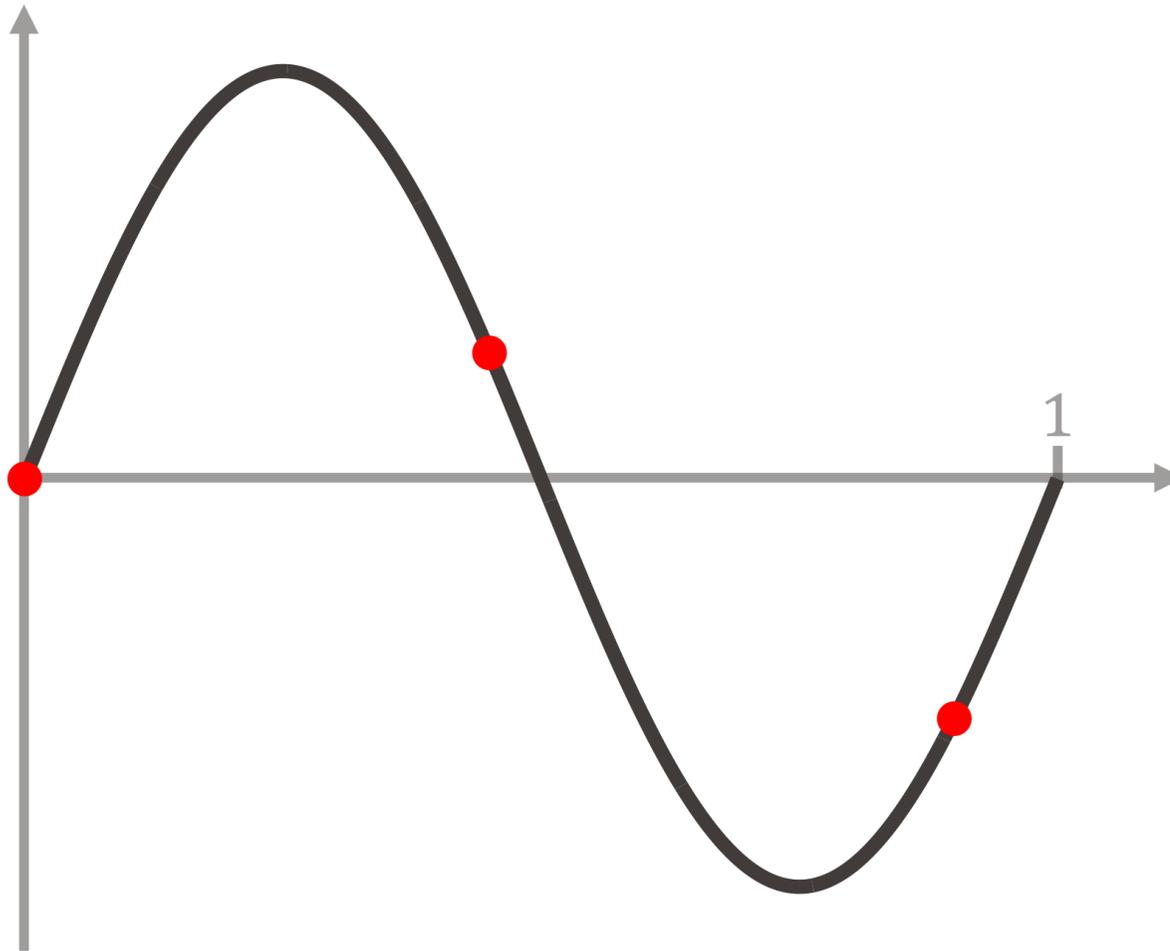
Autre exemple : sinusoïde pure $X(t) = \sin(2\pi t)$ ($f = 1\text{Hz}$)



- Période d'échantillonnage $T_e = 0.\bar{3}$ sec ($f_e = 3\text{ Hz}$)

Échantillonnage d'une sinusoïde pure

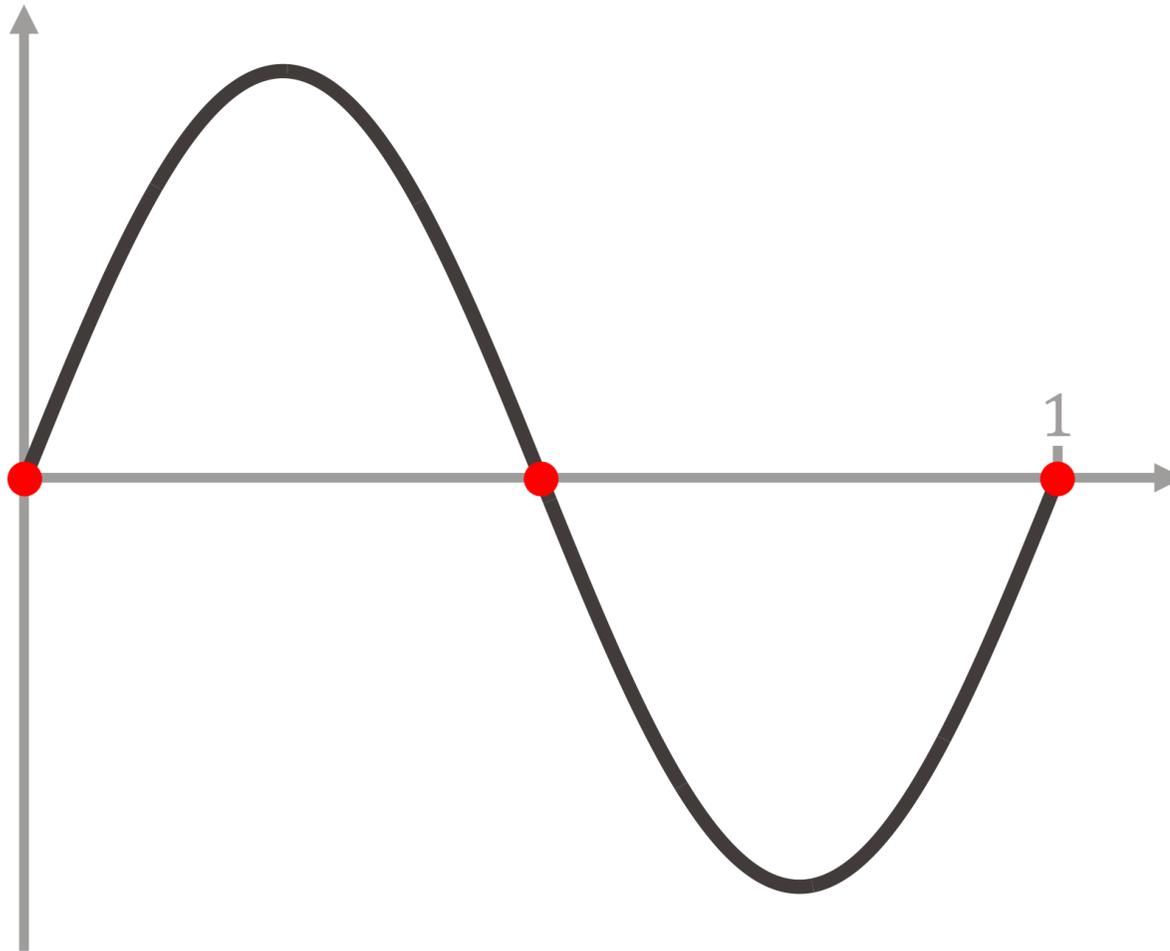
Autre exemple : sinusoïde pure $X(t) = \sin(2\pi t)$ ($f = 1\text{Hz}$)



- Période d'échantillonnage $T_e = 0.45 \text{ sec}$ ($f_e = 2.2 \text{ Hz}$)

Échantillonnage d'une sinusoïde pure

Autre exemple : sinusoïde pure $X(t) = \sin(2\pi t)$ ($f = 1\text{Hz}$)

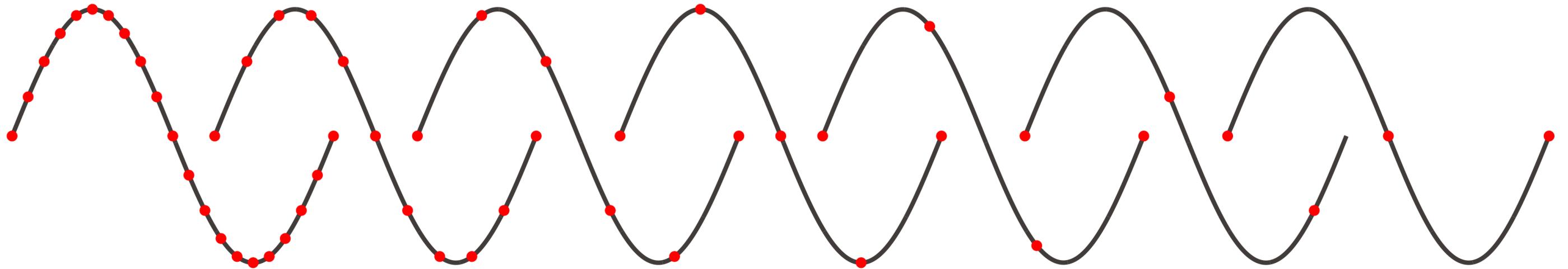


- Période d'échantillonnage $T_e = 0.5 \text{ sec}$ ($f_e = 2 \text{ Hz}$)

Échantillonnage d'une sinusoïde pure

Autre exemple : sinusoïde pure

$$X(t) = \sin(2\pi t) \quad (f = 1 \text{ Hz})$$



Pour pouvoir reconstruire la sinusoïde à partir de l'échantillon, il est nécessaire que $T_e < 0.5 \text{ sec}$, autrement dit, que $f_e = \frac{1}{T_e} > 2 \text{ Hz}$.

Échantillonnage d'une sinusoïde pure

- De manière plus générale, on peut dire la chose suivante :

Soit $X(t)$ une sinusoïde pure dont la fréquence est plus petite ou égale à f .

Pour pouvoir reconstruire cette sinusoïde à partir de sa version échantillonnée à la fréquence f_e , il est nécessaire que :

$$f_e > 2f$$

- Le **théorème d'échantillonnage** que nous verrons prochainement dit (essentiellement) que cette condition est non seulement **nécessaire** mais aussi **suffisante**.
- Nous verrons également que **ce théorème s'applique à tous les signaux**, et pas seulement aux sinusoïdes.

Et si $f_e < 2f$, que se passe-t-il ?

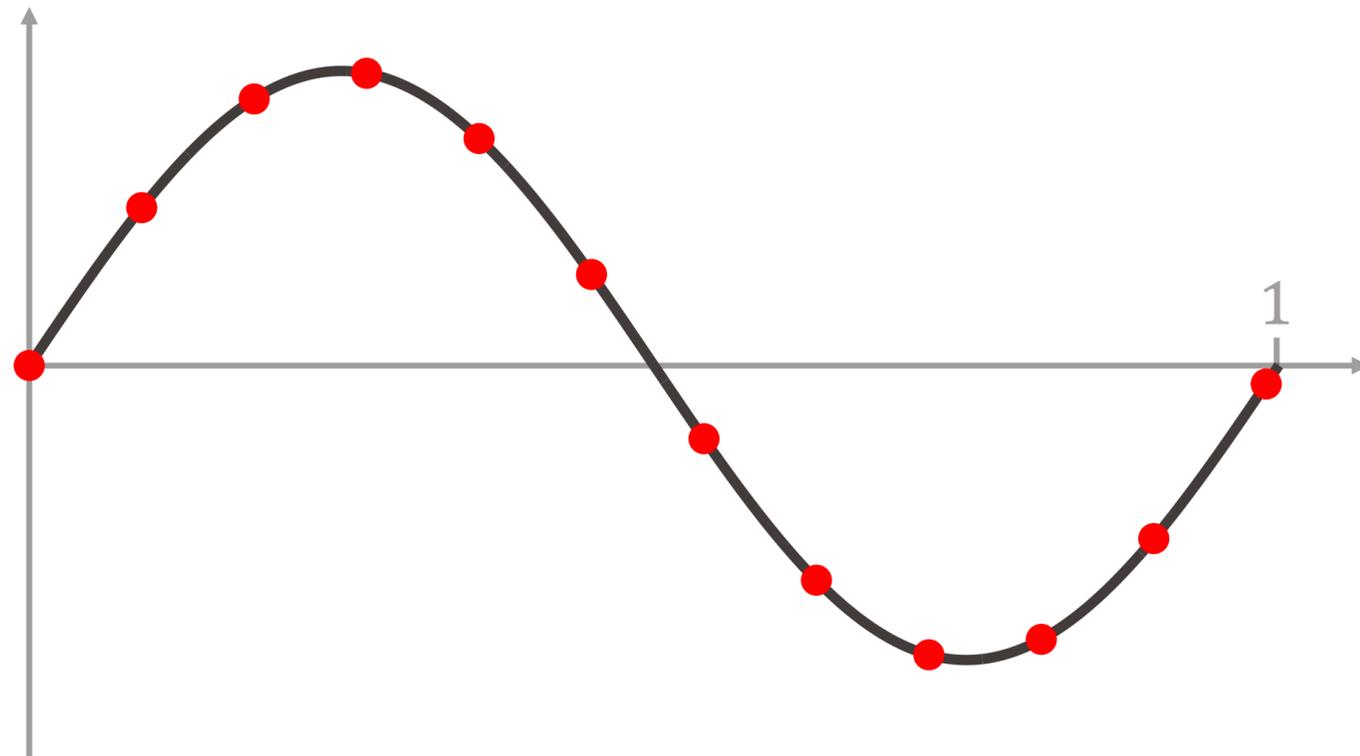
Que se passe-t-il lorsque la fréquence d'échantillonnage f_e est trop basse, i.e. lorsque le signal est **sous-échantillonné** ?

- Nous poursuivons avec l'exemple d'une sinusoïde pure :

$$X(t) = \sin(2\pi f \cdot t),$$

échantillonnée avec une période $T_e = 0.09$ sec, donc $f_e = \frac{1}{0.09} = 11.\overline{11} \text{ Hz}$.

- $f = 1 \text{ Hz}$



Et si $f_e < 2f$, que se passe-t-il ?

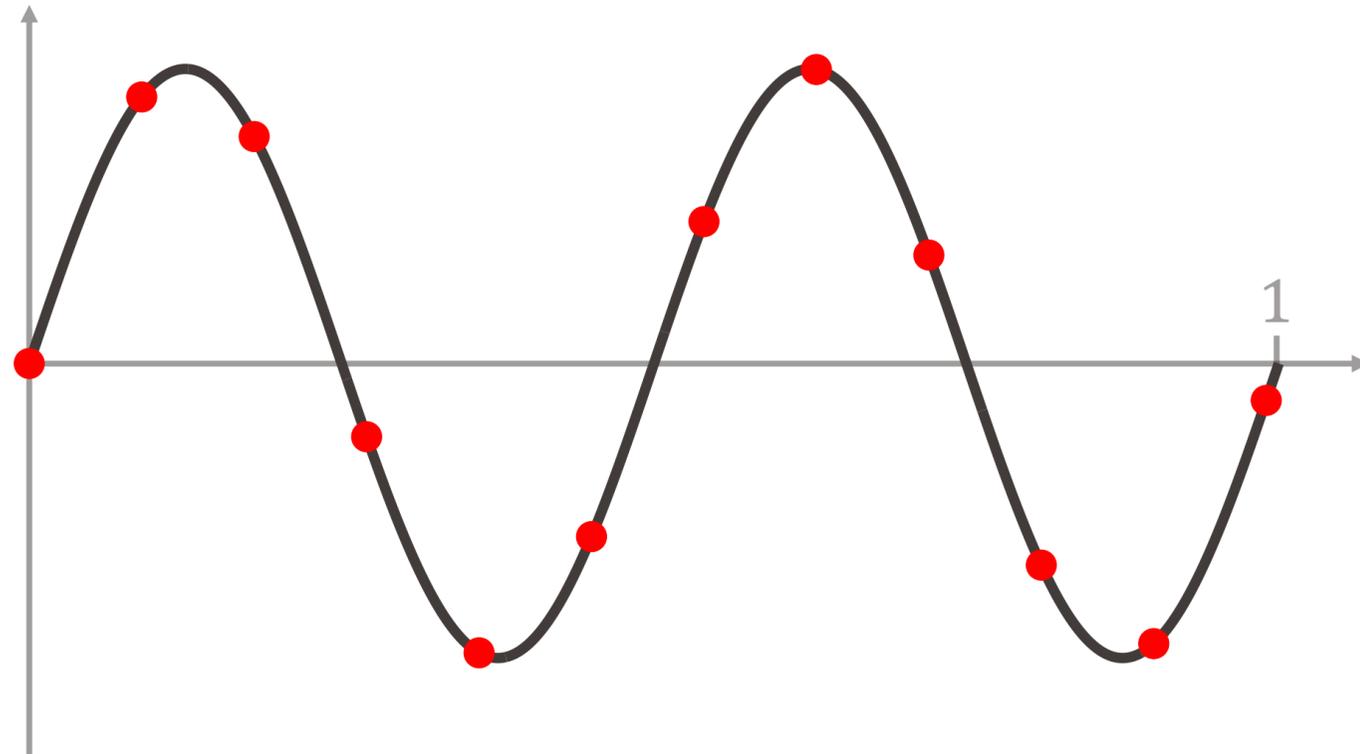
Que se passe-t-il lorsque la fréquence d'échantillonnage f_e est trop basse, i.e. lorsque le signal est **sous-échantillonné** ?

- Nous poursuivons avec l'exemple d'une sinusoïde pure :

$$X(t) = \sin(2\pi f \cdot t),$$

échantillonnée avec une période $T_e = 0.09$ sec, donc $f_e = \frac{1}{0.09} = 11.\overline{11} \text{ Hz}$.

- $f = 1 \text{ Hz}$
- $f = 2 \text{ Hz}$



Et si $f_e < 2f$, que se passe-t-il ?

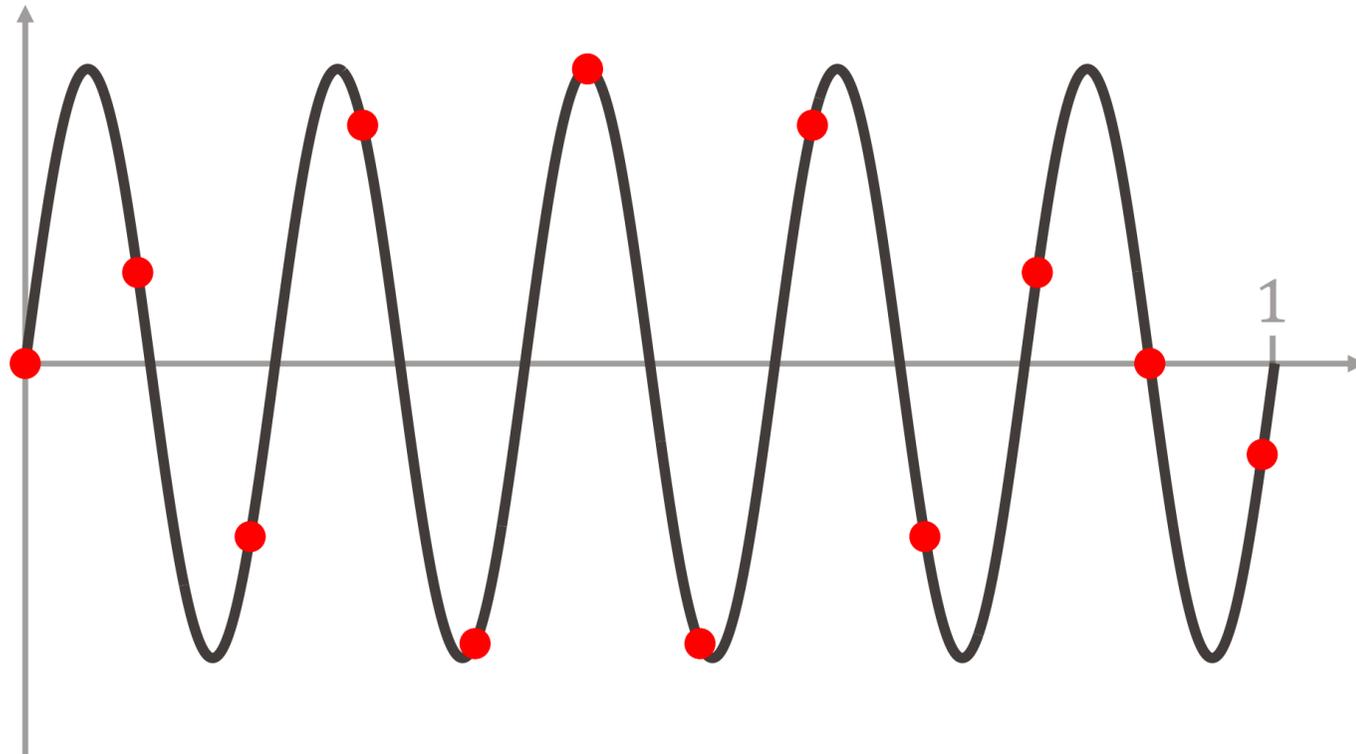
Que se passe-t-il lorsque la fréquence d'échantillonnage f_e est trop basse, i.e. lorsque le signal est **sous-échantillonné** ?

- Nous poursuivons avec l'exemple d'une sinusoïde pure :

$$X(t) = \sin(2\pi f \cdot t),$$

échantillonnée avec une période $T_e = 0.09$ sec, donc $f_e = \frac{1}{0.09} = 11.\overline{11} \text{ Hz}$.

- $f = 1 \text{ Hz}$
- $f = 2 \text{ Hz}$
- $f = 5 \text{ Hz}$



Et si $f_e < 2f$, que se passe-t-il ?

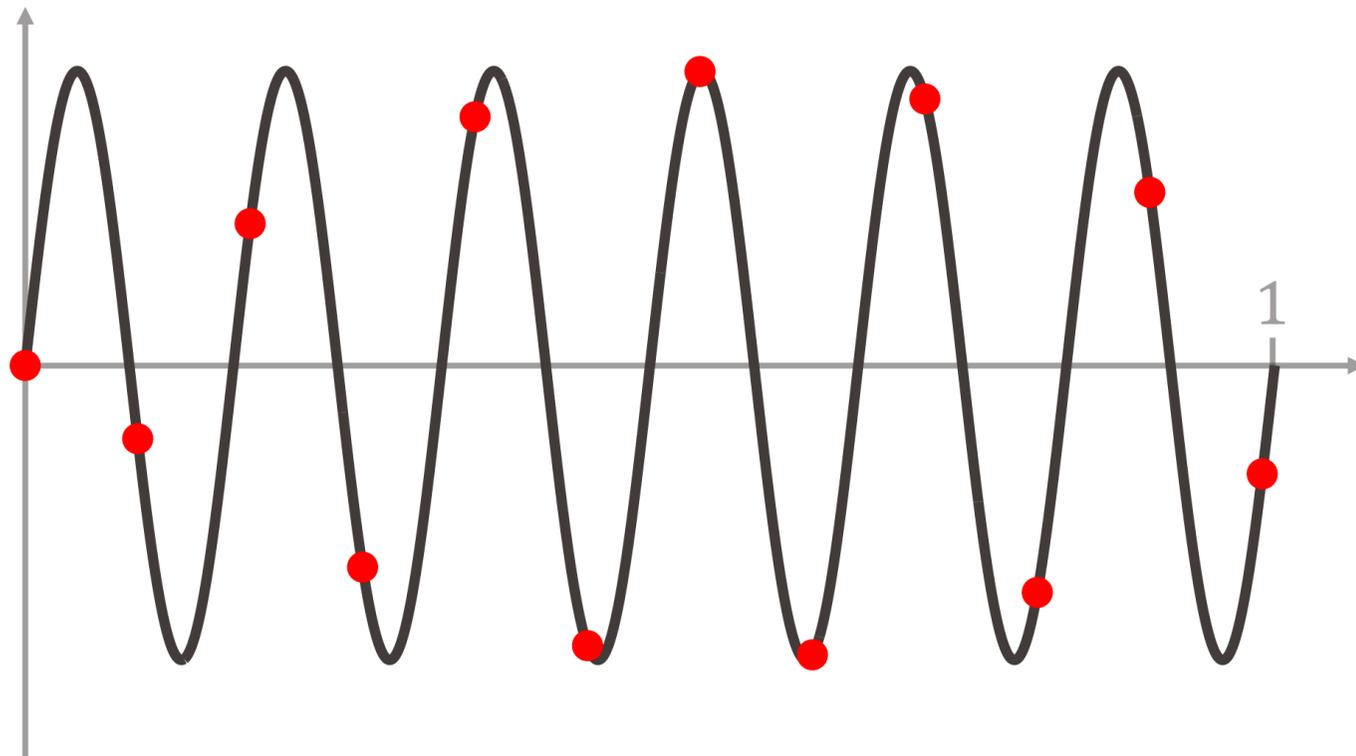
Que se passe-t-il lorsque la fréquence d'échantillonnage f_e est trop basse, i.e. lorsque le signal est **sous-échantillonné** ?

- Nous poursuivons avec l'exemple d'une sinusoïde pure :

$$X(t) = \sin(2\pi f \cdot t),$$

échantillonnée avec une période $T_e = 0.09$ sec, donc $f_e = \frac{1}{0.09} = 11.\overline{11} \text{ Hz}$.

- $f = 1 \text{ Hz}$
- $f = 2 \text{ Hz}$
- $f = 5 \text{ Hz}$
- $f = 6 \text{ Hz}$



Et si $f_e < 2f$, que se passe-t-il ?

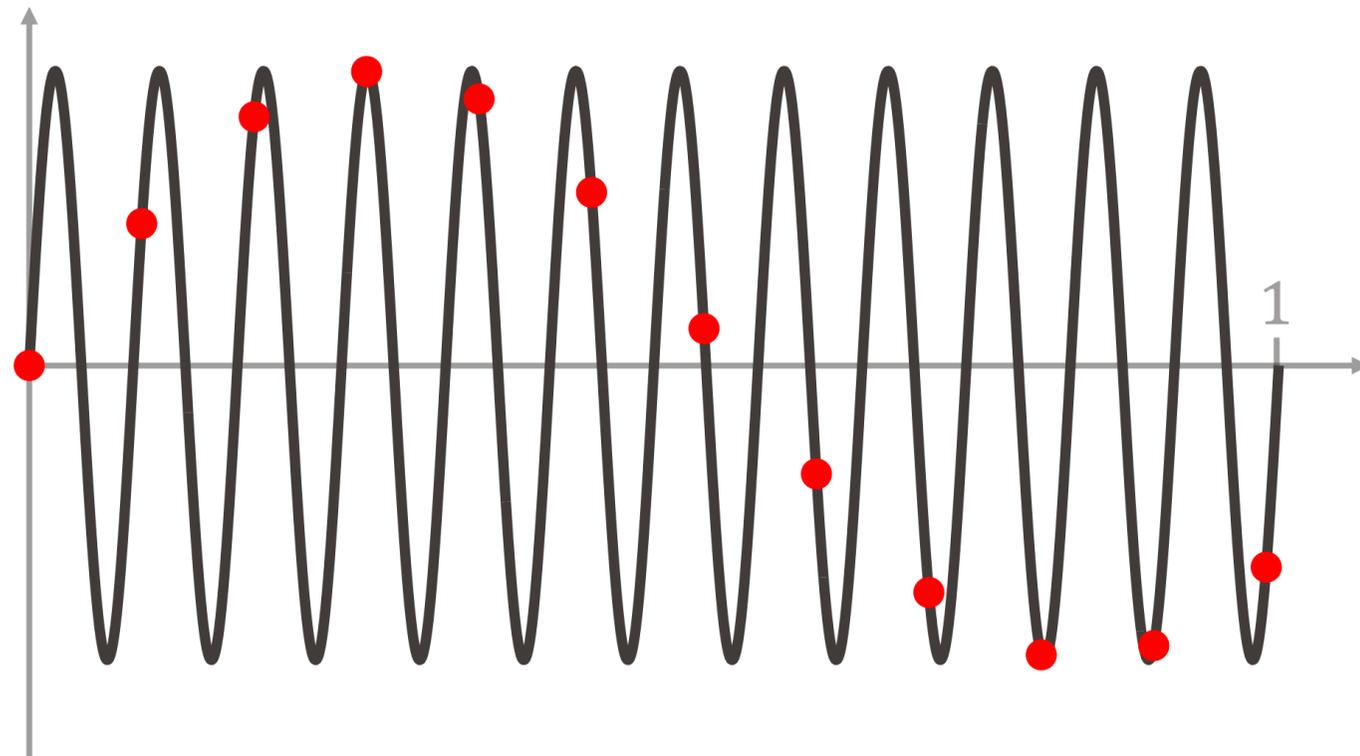
Que se passe-t-il lorsque la fréquence d'échantillonnage f_e est trop basse, i.e. lorsque le signal est **sous-échantillonné** ?

- Nous poursuivons avec l'exemple d'une sinusoïde pure :

$$X(t) = \sin(2\pi f \cdot t),$$

échantillonnée avec une période $T_e = 0.09$ sec, donc $f_e = \frac{1}{0.09} = 11.\overline{11} \text{ Hz}$.

- $f = 1 \text{ Hz}$
- $f = 2 \text{ Hz}$
- $f = 5 \text{ Hz}$
- $f = 6 \text{ Hz}$
- $f = 12 \text{ Hz}$



Et si $f_e < 2f$, que se passe-t-il ?

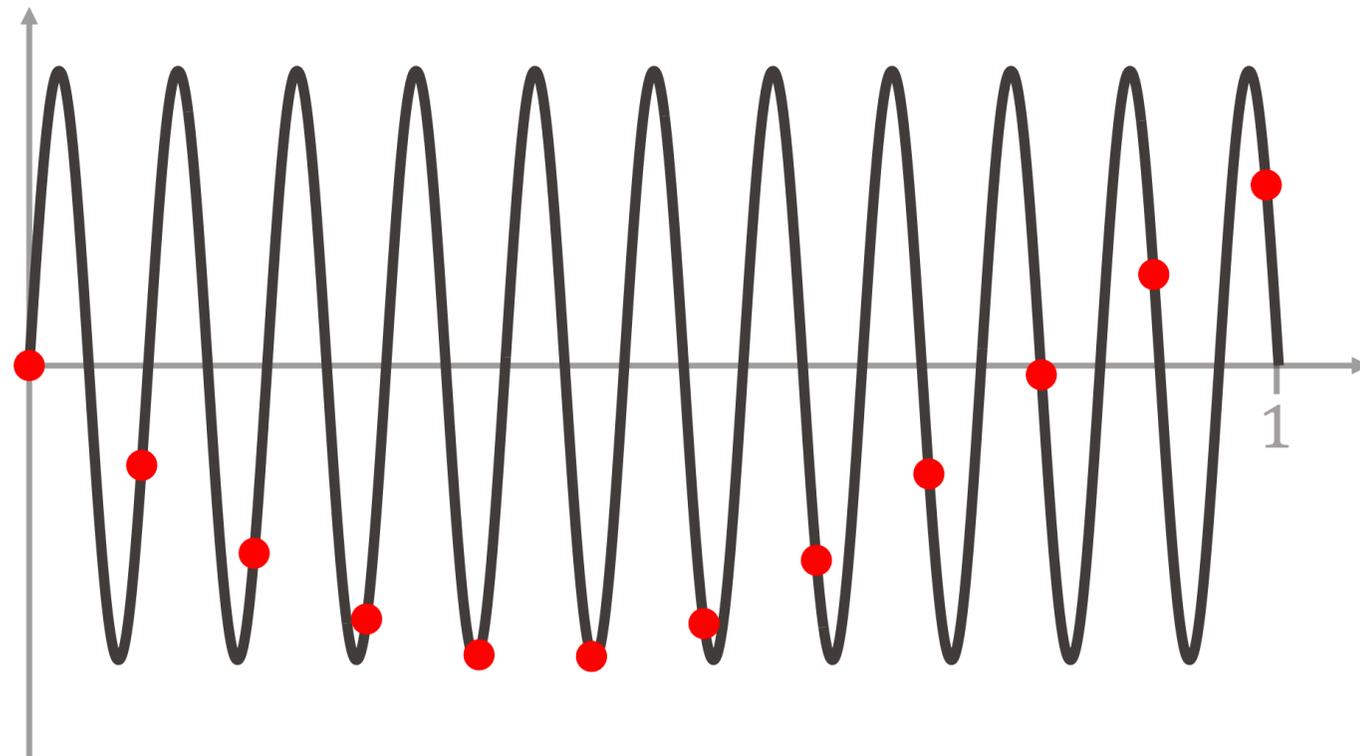
Que se passe-t-il lorsque la fréquence d'échantillonnage f_e est trop basse, i.e. lorsque le signal est **sous-échantillonné** ?

- Nous poursuivons avec l'exemple d'une sinusoïde pure :

$$X(t) = \sin(2\pi f \cdot t),$$

échantillonnée avec une période $T_e = 0.09$ sec, donc $f_e = \frac{1}{0.09} = 11.\overline{11} \text{ Hz}$.

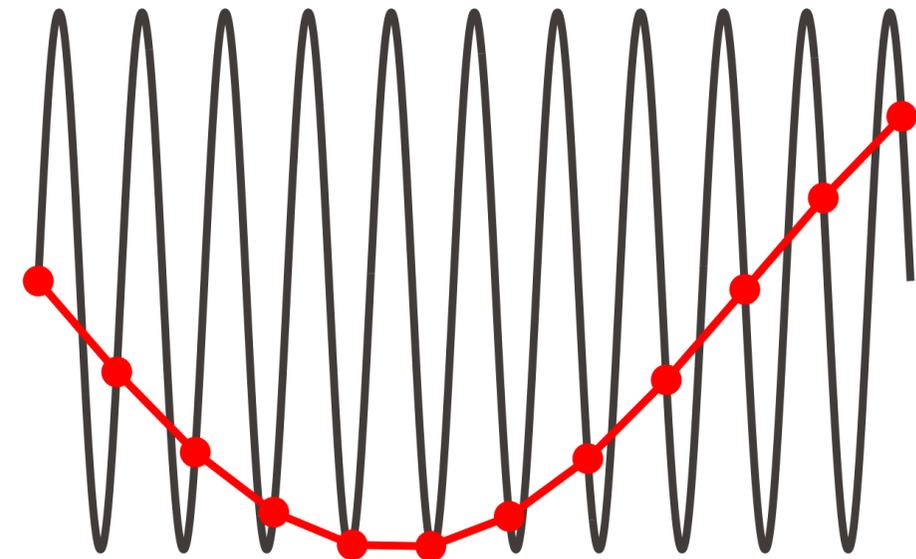
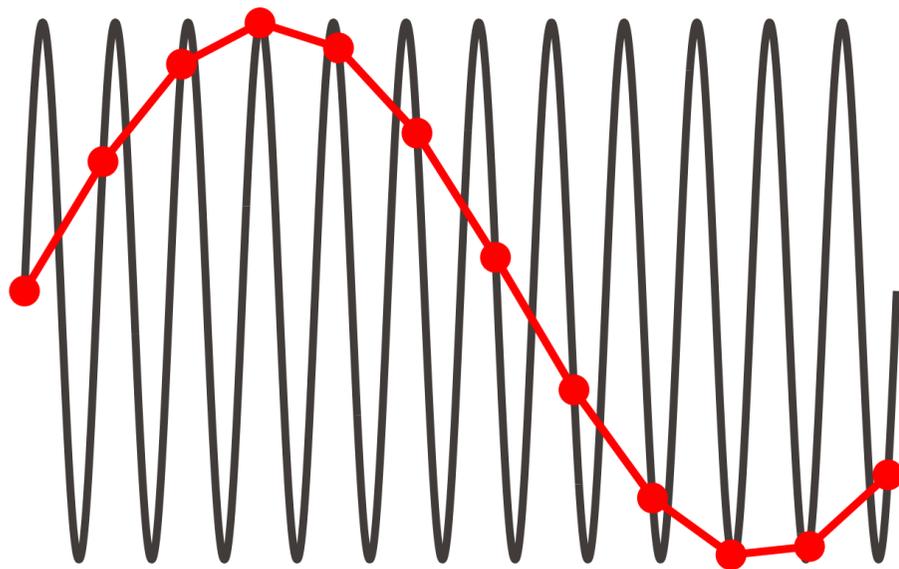
- $f = 1 \text{ Hz}$
- $f = 2 \text{ Hz}$
- $f = 5 \text{ Hz}$
- $f = 6 \text{ Hz}$
- $f = 12 \text{ Hz}$
- $f = 10.5 \text{ Hz}$



Et si $f_e < 2f$, que se passe-t-il ?

Dans les deux derniers cas, nous avons vu apparaître :

- une sinusoïde avec une **fréquence plus lente**
- une autre sinusoïde, avec une **fréquence plus lente et qui part d'abord vers le bas.**



Ce phénomène s'appelle l'**effet stroboscopique** et survient donc lorsqu'on **sous-échantillonne** un signal.

- **Exemple visuel** (avec un sous-échantillonnage à deux dimensions) :



- Exemples de vidéos :

<http://www.youtube.com/watch?v=jHS9JGkEOmA>

<http://www.youtube.com/watch?v=LVwmtwZLG88>

<https://www.youtube.com/watch?v=2lghwseolSc>