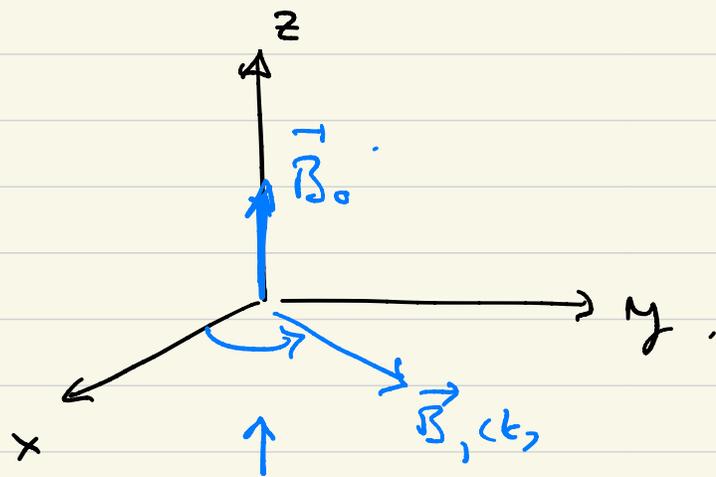


# Dynamique du spin dans un champ magnétique.

$$\vec{B}_0 = (0, 0, B_0).$$

Non elles, c'est à dire ;

$$\vec{B}_1(t) = (B_1 \cos \omega t, B_1 \sin \omega t, 0).$$



tourne à la fréquence  $\omega$ .  
période rotation de  $\vec{B}_1(t)$

$$\omega T_1 = 2\pi \Rightarrow T_1 = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Pour le champ total

$$\vec{B}(t) = (B_1 \cos \omega t, B_1 \sin \omega t, B_0)$$

Non elle se résoudre l'éq de Schrödinger

(application: Manipulation et Portes logiques sur qubits).

# Brief Rappel sur Précession de Larmor.

$$(0, 0, B_0) \quad \underbrace{i\hbar \frac{d}{dt} U_t = H U_t}_{\text{Equation of motion}} \quad \uparrow \gamma \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}$$

$$H = - \underbrace{B_0}_{\text{field}} \underbrace{\gamma \frac{\hbar}{2} \sigma_z}_{\text{magnetic moment}}$$

$$H = - \vec{B} \cdot \vec{M}$$

$M_z =$  composante z du moment magnétique.

$$\Rightarrow H = - \frac{\hbar \omega_0}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Pose  $\gamma B_0 = \omega_0$  la fréquence de Larmor

$\sigma_z$  de Pauli.

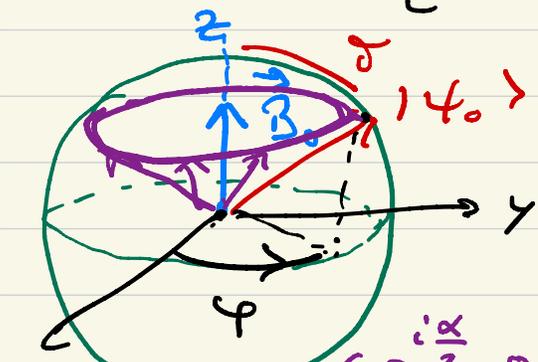
Matrice de Rotation autour de l'axe z.

$$\boxed{U_t} = e^{-\frac{it}{\hbar} H} =$$

$$\begin{pmatrix} e^{i \frac{t \omega_0}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i \frac{t \omega_0}{2}} \end{pmatrix}$$

$$|\psi_t\rangle = \boxed{U_t} |\psi_0\rangle \quad ; \quad |\psi_0\rangle = \cos \frac{\varphi}{2} |\uparrow\rangle + e^{i\varphi} \sin \frac{\varphi}{2} |\downarrow\rangle$$

$$\Rightarrow |\psi_t\rangle \propto \left\{ \cos \frac{\varphi}{2} |\uparrow\rangle + \underline{e^{i(\varphi - \omega_0 t)}} \sin \frac{\varphi}{2} |\downarrow\rangle \right\}$$



$$\varphi(t) = \varphi - \underline{\omega_0 t}$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \text{Période de Larmor.}$$

Remarque!  $\begin{pmatrix} e^{i\frac{\alpha}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\alpha}{2}} \end{pmatrix}$  Matrice de Rotation d'angle  $\alpha$  autour de z

Cas général.  $\vec{B}(t) = (B_1 \cos \omega t, B_1 \sin \omega t, B_0)$

$$i \hbar \frac{d}{dt} U_t = \underline{H(t)} U_t ; \quad |\psi_t\rangle = U_t |\psi_0\rangle$$

Quel est l'Hamiltonien?

$$H(t) = - \vec{B}(t) \cdot \underbrace{\vec{M}}_{\gamma \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}} = - \gamma \frac{\hbar}{2} \vec{B}(t) \cdot \underline{\vec{\sigma}}$$

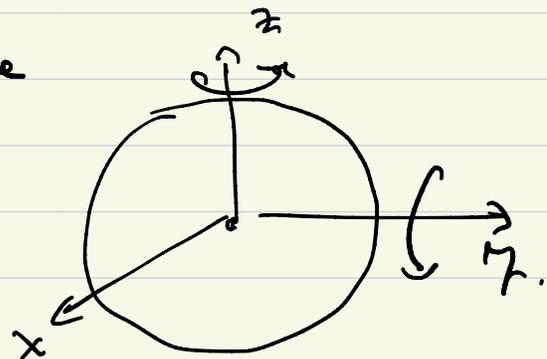
$$\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$$

$$\begin{matrix} \nearrow & \uparrow & \nwarrow \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & -i \\ +i & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$H(t) = - \frac{\gamma \hbar}{2} B_1 \left\{ (\cos \omega t) \sigma_x + (\sin \omega t) \sigma_y \right\} - \frac{\gamma \hbar}{2} B_0 \sigma_z$$

Notations:  $\gamma B_0 \equiv \omega_0$  fréquence de Larmor

$\gamma B_1 \equiv \omega_1$  fréquence



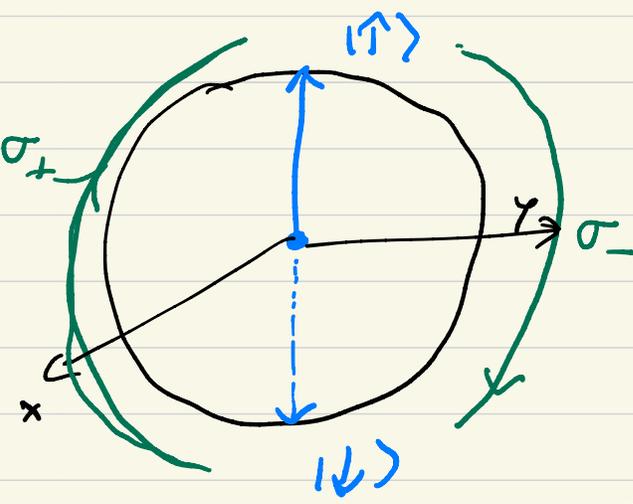
- $H(t) = -\frac{\hbar\omega_1}{2} \{ (\cos \omega t) \sigma_x + (\sin \omega t) \sigma_y \} - \frac{\hbar\omega_0}{2} \sigma_z$ .

Utile de se faire une intuition sur  $H(t)$  :

$$\begin{cases} \sigma_+ = \frac{1}{2}(\sigma_x + i\sigma_y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ Raising op.} \\ \sigma_- = \frac{1}{2}(\sigma_x - i\sigma_y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ Lowering op.} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \sigma_+ |\uparrow\rangle &= 0 & \sigma_- |\uparrow\rangle &= |\downarrow\rangle \quad \checkmark \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\sigma_- |\downarrow\rangle = 0 \quad \sigma_+ |\downarrow\rangle = |\uparrow\rangle \quad \checkmark$$

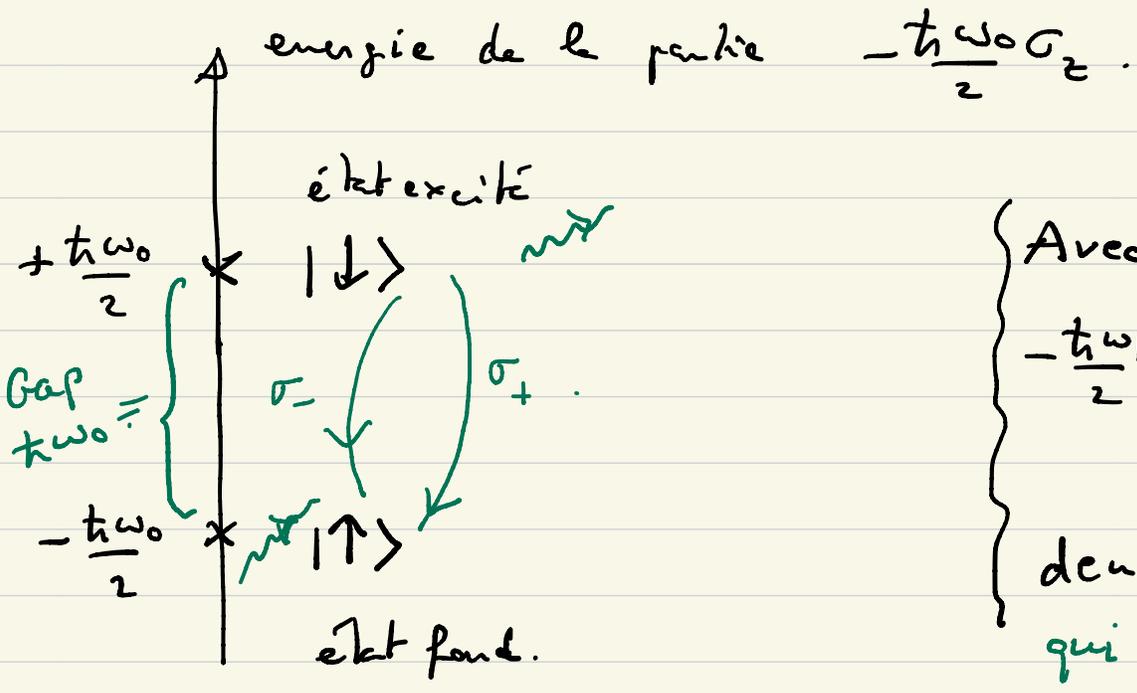


On peut dire que  $\sigma_+$  et  $\sigma_-$  effectuent des retournements  $\sigma$  rapport au plan  $x-y$ .

Mu d'algèbre même à :

$$\underline{\underline{H(t) = -\frac{\hbar\omega_0}{2} \sigma_z - \frac{\hbar\omega_1}{2} \left\{ \underbrace{\sigma_+ e^{-i\omega t}}_{\text{Monter le spin}} + \underbrace{\sigma_- e^{i\omega t}}_{\text{Descendre le spin.}} \right\}}}$$

Précision de Larmor autour z



Avec le terme  $-\frac{\hbar\omega_1}{2} \left\{ \begin{array}{l} \sigma_+ e^{-i\omega t} \\ + \sigma_- e^{+i\omega t} \end{array} \right\}$  deux nouvelles possibilités qui sont des transitions.

|| Nous venons que ces transitions deviennent "certaines" (très très probable  $\rightarrow$  prob  $\approx 1$ ) quand  $\omega \rightarrow \omega_0$ .

|| En fait la fréquence  $\omega$  joue ici le rôle de l'énergie du photon (d'énergie  $\hbar\omega$ ) injecté ds le syst.

|| Ici on injecte l'énergie grâce au champ tournant  $\vec{B}_1(t) = (B_1 \cos t, B_1 \sin t, 0)$ .

## Plan de la suite.

- 1) Résoudre l'équ de Schrödinger
- 2) Visualiser et interpréter l'évolution de l'état du qubit (associé au moment magnétique/spin):

Oscillation de Rabi.

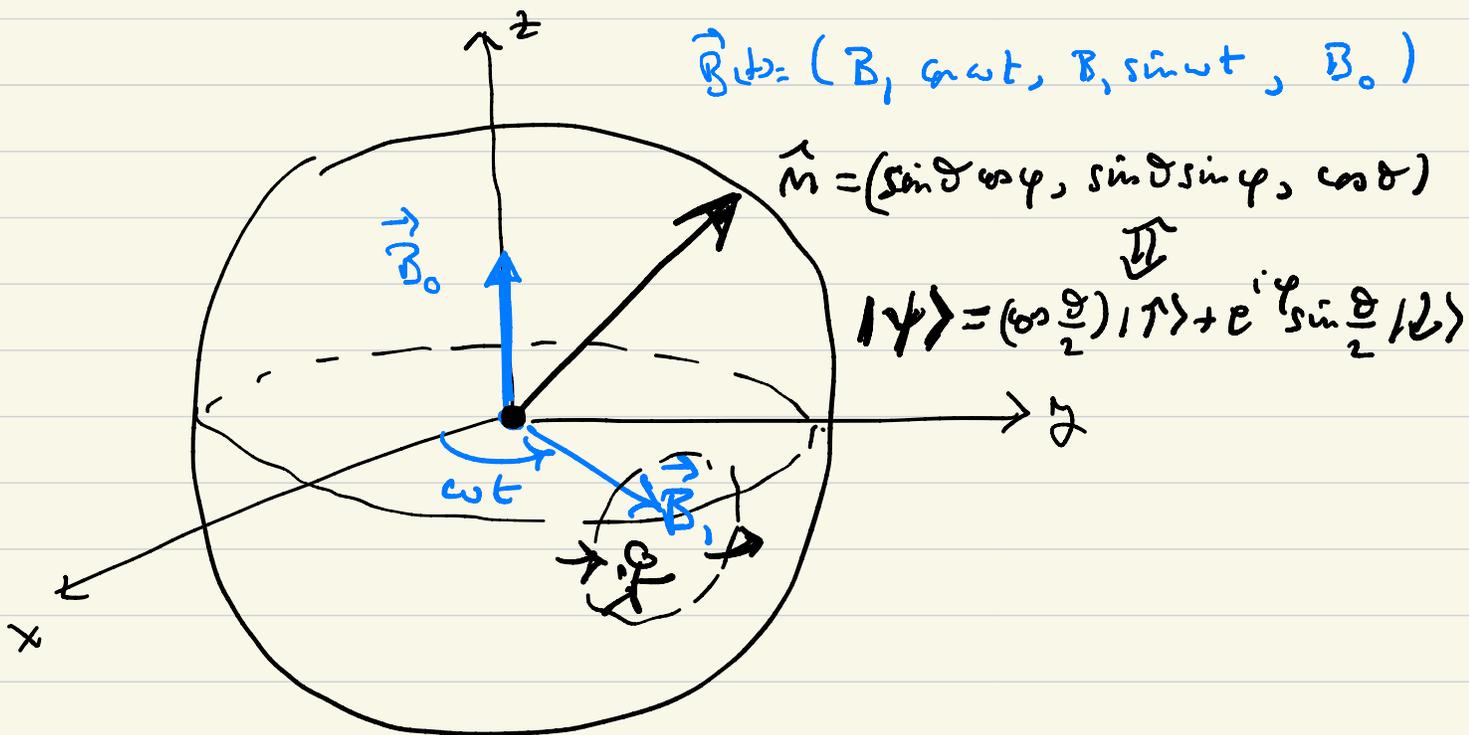
- 3) Appliquer tout cela à construction de portes logiques.

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \text{NOT} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\sigma_x}$   
 $= X.$



# Dyn des spin ds champ tournant.



$$H(t) = -\frac{\hbar \omega_0 \sigma_z}{2} - \frac{\hbar \omega_1}{2} \left\{ \sigma_+ e^{-i\omega t} + \sigma_- e^{i\omega t} \right\}$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} U_t = H(t) U_t$$

Hamiltonien dip du temps  
la formule en rouge n'est plus  
valable.

$H$  indep du temps  
 $U_t = e^{-\frac{i}{\hbar} H t}$

Idee: Chg de Référentiel. Prendre Référentiel tournant  
attaché au champ  $\vec{B}_1 \Rightarrow$  Nous allons obtenir un  
Nouvel Hamiltonien de ce Nouveau Ref qui est indep du temps

- Matrice Rotation d'angle  $\alpha$  autour de  $z$ :

$$\begin{pmatrix} e^{-\frac{i\alpha}{2}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{i\alpha}{2}} \end{pmatrix} = e^{-\frac{i\alpha}{2} \sigma_z}.$$

- Le champ  $\vec{B}$ , tourne à la fréquence  $\omega$  et il fait prendre un angle  $\alpha \rightarrow \omega t$ .

$$e^{-\frac{i\omega t}{2} \sigma_z} = e^{+\frac{i\epsilon}{\hbar} K} \quad \text{avec } K = -\frac{\hbar\omega}{2} \sigma_z.$$

Non allons appliquer cette matrice sur tous les états

$$|\psi\rangle \in \mathcal{H} = \mathbb{C}^2.$$

- Chg de Ref:  $|\tilde{\psi}_t\rangle = e^{+\frac{i\epsilon}{\hbar} K} |\psi_t\rangle \leftarrow \dots$   
↑  
état Nouveau Ref ↑ état de l'ancien Ref.

$$|\tilde{\psi}_t\rangle = e^{+\frac{i\epsilon}{\hbar} K} U_t |\psi_0\rangle$$

$$\Rightarrow |\tilde{\psi}_t\rangle = \tilde{U}_t \cdot |\tilde{\psi}_0\rangle.$$

• On a ici montré que dans le Nouveau référentiel:

$$\boxed{\tilde{U}_t = e^{\frac{it}{\hbar}K} U_t} \quad (*)$$

Equation de Schrödinger:  $i\hbar \frac{d}{dt} U_t = H(t) U_t.$

$$i\hbar \frac{d}{dt} \tilde{U}_t = \underbrace{H(t)}_{?} \tilde{U}_t$$

Calcul:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} \tilde{U}_t &= i\hbar \frac{d}{dt} \left\{ e^{\frac{it}{\hbar}K} U_t \right\} \\ &= -K e^{\frac{it}{\hbar}K} U_t + e^{\frac{it}{\hbar}K} i\hbar \frac{d}{dt} U_t \\ &= -K \tilde{U}_t + e^{\frac{it}{\hbar}K} H(t) U_t \\ &= -K \tilde{U}_t + e^{\frac{it}{\hbar}K} H(t) e^{-\frac{it}{\hbar}K} \underbrace{e^{\frac{it}{\hbar}K} U_t}_{\tilde{U}_t} \\ &= \boxed{\left\{ -K + e^{\frac{it}{\hbar}K} H(t) e^{-\frac{it}{\hbar}K} \right\}} \tilde{U}_t \quad \tilde{H}(t). \end{aligned}$$

Hamiltonien dans le nouveau référentiel qui tourne avec  $B_1(t)$  :

$$\tilde{H}(t) = -K + e^{\frac{i t K}{\hbar}} H(t) e^{-\frac{i t K}{\hbar}}$$

Matrice  $2 \times 2$  :

$$K = \begin{pmatrix} -\frac{\hbar\omega}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\hbar\omega}{2} \end{pmatrix} = -\frac{\hbar\omega}{2} \sigma_z$$

au fait :

$$e^{\frac{i t K}{\hbar}} = \begin{pmatrix} e^{-i\omega t/2} & 0 \\ 0 & e^{i\omega t/2} \end{pmatrix}$$

$$H(t) = \underbrace{-\frac{\hbar\omega_0}{2} \sigma_z}_{\downarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} - \frac{\hbar\omega_1}{2} \left\{ \begin{array}{l} \sigma_+ e^{-i\omega t} + \sigma_- e^{i\omega t} \\ \downarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

et maintenant on trace explicitement :

$$\tilde{H}(t) = \underline{\underline{\text{indépendant des temps}}} = \frac{\hbar\delta}{2} \sigma_z - \frac{\hbar\omega_1}{2} \sigma_x$$

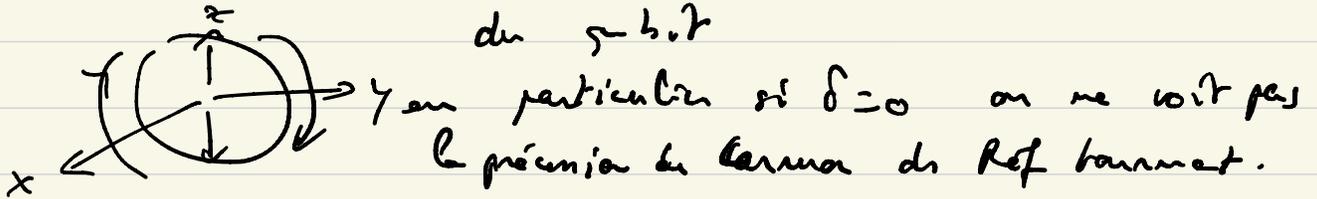
avec  $\delta = \omega - \omega_0$ .

(paramètre de detuning :  
si  $\omega = \omega_0$  on parle de "resonance" ou sans  $\omega_0$ .)

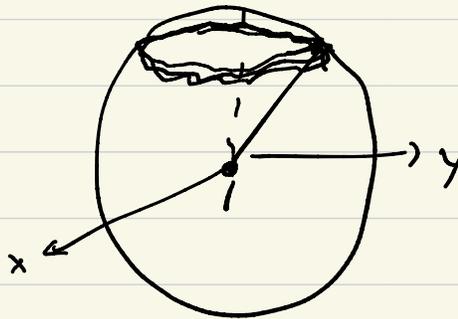
$$\tilde{H} = -\frac{\hbar\delta}{2}\sigma_z - \frac{\hbar\omega_1}{2}\sigma_x \quad ; \quad \delta = \omega - \omega_0$$

Ici on apprend déjà que :

- si  $\delta \ll \omega_1$  : on verra essentiellement des retournements du spin



- si  $\delta \gg \omega_1$  : on verra essentiellement une précession de l'axe z



Finallement on calcule  $\tilde{U}_t$  et  $U_t$ .

$$\tilde{H} = -\frac{\hbar\delta}{2}\sigma_z - \frac{\hbar\omega_1}{2}\sigma_x = \begin{pmatrix} -\frac{\hbar\delta}{2} & -\frac{\hbar\omega_1}{2} \\ -\frac{\hbar\omega_1}{2} & +\frac{\hbar\delta}{2} \end{pmatrix}$$

indépend du temps :

$$\tilde{U}_t = e^{-\frac{it}{\hbar}\tilde{H}} = \text{Matrice } 2 \times 2 \text{ explicite.}$$

↑  
grâce à une formule  
d'Euler généralisée (exercice).

$$U_t = \underbrace{e^{-\frac{it}{\hbar}K}}_{2 \times 2} \underbrace{\tilde{U}_t}_{2 \times 2} \quad (\text{à partir de } *).$$

$$\underline{|\psi_t\rangle} = U_t \underline{|\psi_0\rangle}.$$

⇒

$$U_t = \begin{pmatrix} u_{\uparrow\uparrow}(t) & u_{\uparrow\downarrow}(t) \\ u_{\downarrow\uparrow}(t) & u_{\downarrow\downarrow}(t) \end{pmatrix}$$

← voir les Notes de cours pour les formules explicites.

Voilà l'op d'évolution temporelle qui est complètement connue.

Regarder  $|\psi_t\rangle = U_t |\psi_0\rangle$  par  $|\psi_0\rangle$  particulière.  
 $|\uparrow\rangle$

$$U_t = u_{\uparrow\uparrow} \underline{|\uparrow\rangle\langle\uparrow|} + u_{\uparrow\downarrow} \dots + u_{\downarrow\uparrow} \underline{|\downarrow\rangle\langle\uparrow|} + u_{\downarrow\downarrow} \underline{|\downarrow\rangle\langle\downarrow|} \dots$$

en Notion de Dirac.

$$\bullet \quad \left( \begin{array}{l} |\psi_t\rangle = \\ U_t |\uparrow\rangle \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \right) = u_{\uparrow\uparrow} \begin{pmatrix} |\uparrow\rangle \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u_{\downarrow\uparrow} \begin{pmatrix} |\downarrow\rangle \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{\uparrow\uparrow} \\ u_{\downarrow\uparrow} \end{pmatrix}$$

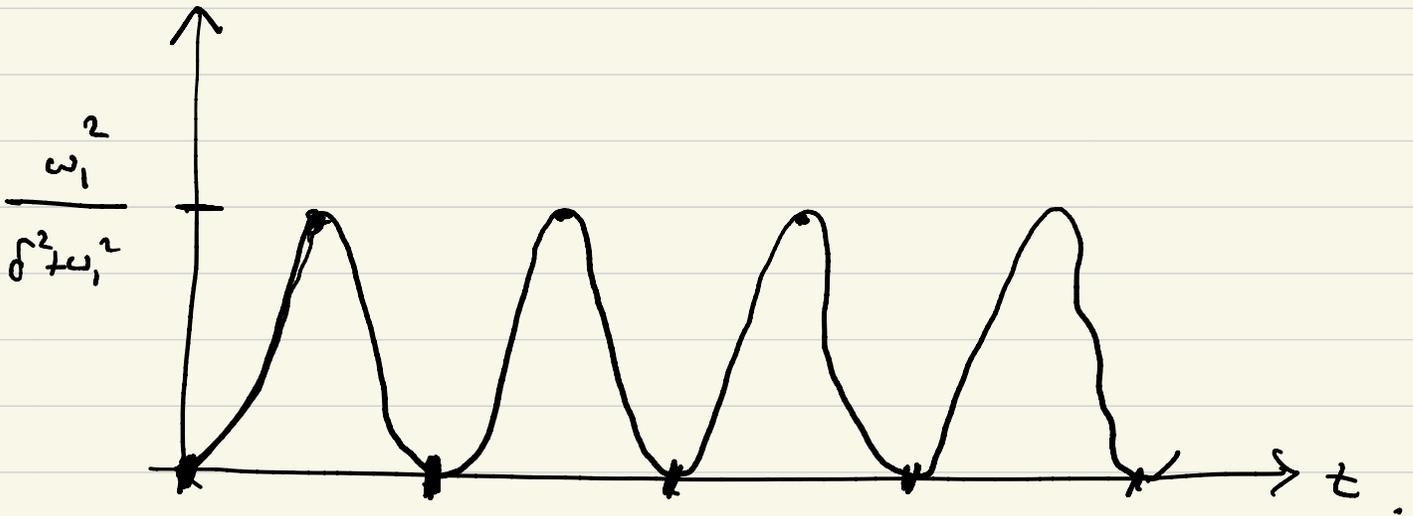
$$\text{Prob} [ \underbrace{|\uparrow\rangle}_{\substack{\text{état mesuré} \\ \text{de la base} \\ \text{computationnelle} \\ \{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}}} \text{ à } t=0 \Rightarrow |\uparrow\rangle \text{ à } t ] = |\langle\uparrow| U_t |\uparrow\rangle|^2 = |u_{\uparrow\uparrow}|^2 = \text{formule explicite}$$

$$\text{Prob} [ |\uparrow\rangle \text{ à } t=0 \Rightarrow |\downarrow\rangle \text{ à } t ] = |\langle\downarrow| U_t |\uparrow\rangle|^2 = |u_{\downarrow\uparrow}|^2 = \text{formule explicite}$$

(Deux prob se somment à 1)

$$P[|\uparrow\rangle \text{ à } t=0 \Rightarrow |\downarrow\rangle \text{ à } t]$$

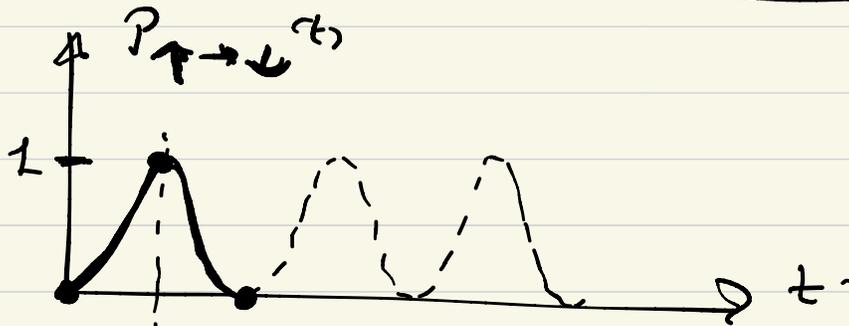
## Oscillations de Rabi



$$T_{\text{Rabi}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\delta^2 + \omega_1^2}}$$

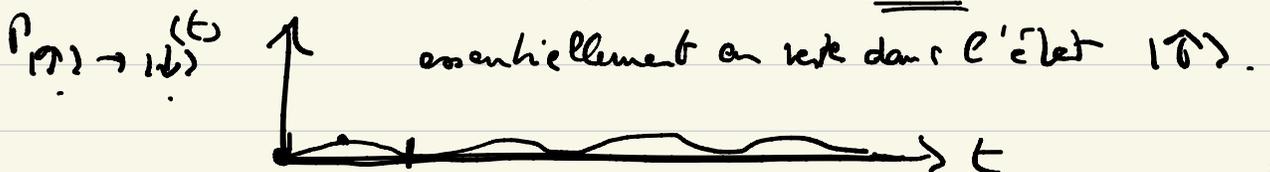
### Remarques

$\delta \ll \omega_1$  (en particulier  $\delta = 0$ ).



$\frac{T_{\text{Rabi}}}{2} = \frac{\pi}{\omega_1}$  ← en un temps  $\frac{\pi}{\omega_1}$  le qubit  $|\uparrow\rangle$  passe certainement à  $|\downarrow\rangle$ .

$\delta \gg \omega_1$  (en particulier  $\omega_1 = 0$ )



Portes Logiques sur 1 qubit grâce à la dyn du spin dans un champ tournant.

Porte logique NOT.

$$x \rightarrow \boxed{\text{NOT}} \rightarrow \bar{x}$$

$0, 1 \qquad \qquad \qquad 1, 0.$

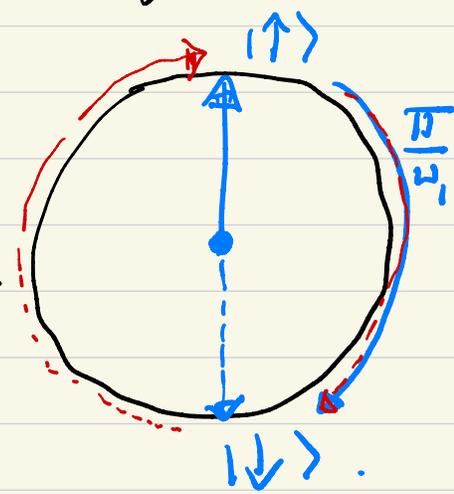
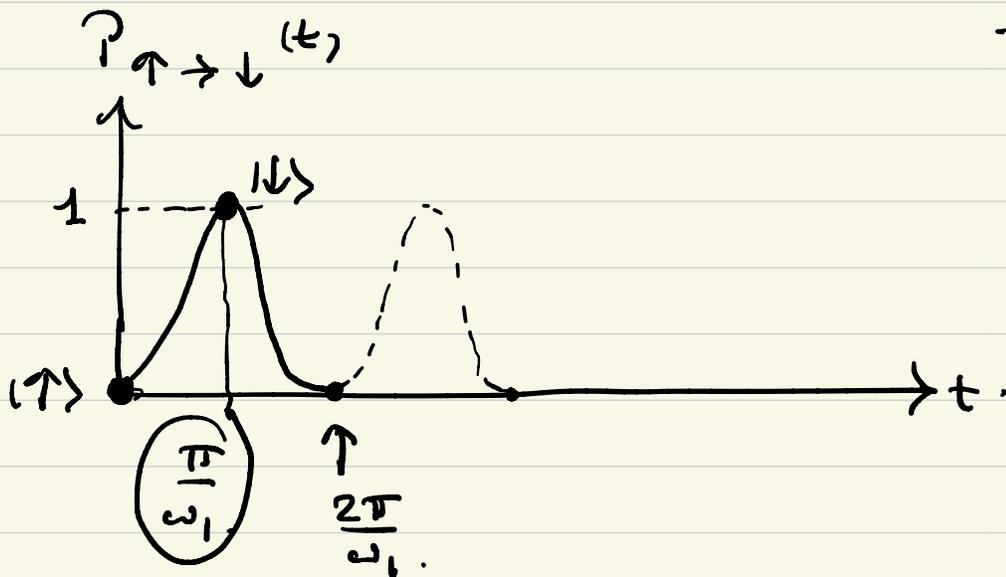
$$\alpha |0\rangle + \beta |1\rangle \rightarrow \boxed{\text{NOT}} \rightarrow \alpha |1\rangle + \beta |0\rangle.$$

superposition.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{NOT} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \sigma_x = X. \\ |0\rangle = |\uparrow\rangle \text{ et } |1\rangle = |\downarrow\rangle. \end{array} \right.$$

Oscillation de Rob! mais pourquoi regarder  $\delta = 0$

$\omega = \omega_0.$   
tuning.



Dans le référentiel  $\tilde{H} = -\frac{\hbar\delta}{2}\sigma_z - \frac{\hbar\omega_1}{2}\sigma_x$ .

$$\tilde{U} = \exp\left(i\frac{t}{2}(\delta\sigma_z + \omega_1\sigma_x)\right). \quad \checkmark$$

$$\boxed{\delta=0} = \exp\left(i\frac{t}{2}\omega_1\sigma_x\right).$$

$$\boxed{t = \frac{\pi}{\omega_1}} = \exp\left(i\frac{\pi}{2}\sigma_x\right) = i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \text{"NOT"}$$

*phase globale.*  
 $\alpha = \pi/2$

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad \underline{\underline{\exp(i\alpha\sigma_x)}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(i\alpha)^k}{k!} \sigma_x^k.$$

$$\sigma_x^2 = 1; \quad \sigma_x^3 = \sigma_x; \quad \sigma_x^4 = 1 \dots$$

$$\exp(i\alpha\sigma_x) = \sum_{k \text{ pairs}} \frac{(i\alpha)^k}{k!} \mathbb{1} + \sum_{k \text{ impairs}} \frac{(i\alpha)^k}{k!} \sigma_x$$

$$+ \left( \sum_{k \text{ impairs}} \frac{(i\alpha)^k}{k!} \right) \sigma_x$$

$$\exp(i\alpha\sigma_x) = (\cos\alpha) \mathbb{1} + i(\sin\alpha) \sigma_x = \begin{pmatrix} \cos\alpha & i\sin\alpha \\ i\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Porte de Hadamard  $H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

pas d'analogie en "portes logique classique"

$$|0\rangle \rightarrow \boxed{H} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$$

$$|1\rangle \rightarrow \boxed{H} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$$

$$\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \rightarrow \boxed{H} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha + \beta)|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha - \beta)|1\rangle$$

En RMN on prendra :  $\delta = 0$  (tuning parfait  $\omega = \omega_0$ )

$$\text{et } t = \frac{T_{\text{Rabi}}}{4} = \frac{\pi}{2\omega_1}$$

$$\tilde{U}_t = \exp\left(i \frac{t}{2} (\delta \sigma_z + \omega_1 \sigma_x)\right)$$

$$= \exp\left(i \frac{\pi}{4} \sigma_x\right) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & i \sin \alpha \\ i \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad \alpha = \frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \text{Hadamard.}$$

