Intrication Quantique (chap 5).

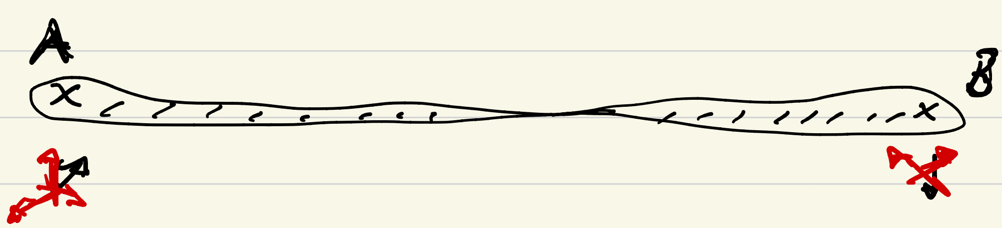
- Notion d'intrication entre deux systèmes.

  une paire de qubit.

  sorte de corrélation très spéciale qui n'a pas d'analogue classique.

  c.a.d : ne peut pas être décrite par une distr de prob classique.

- L'intrication est une "ressource" : communication
  sorte de canal de communication très spécial entre Alice et Bob.



* Protocole de "Téléportation" quantique.

* Codage superdense.

- Inégalités de Bell → application en crypto quantique.

Notion d'intrication : introduction.

syst à 2 qubits (deux photons → deux polarisations)
deux atomes → états excités ou fondamental.

premier qubit est détenu par Alice A.

$$\mathcal{H}_A = \{ \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \ , \ \alpha \text{ et } \beta \in \mathbb{C} \}.$$

deuxième qubit est détenu par Bob B.

$\mathcal{H}_B$.

En fait l'esp de Hilbert total de $A \cup B$:

$\underbrace{\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B}$ = esp d'Hilbert prod tensoriel.

$$|\psi\rangle_{AB} \equiv \alpha_{00}|00\rangle + \alpha_{01}|01\rangle + \alpha_{10}|10\rangle + \alpha_{11}|11\rangle$$

ici $\alpha_{ij} \in \mathbb{C}$ et $|\alpha_{00}|^2 + |\alpha_{01}|^2 + |\alpha_{10}|^2 + |\alpha_{11}|^2 = 1$

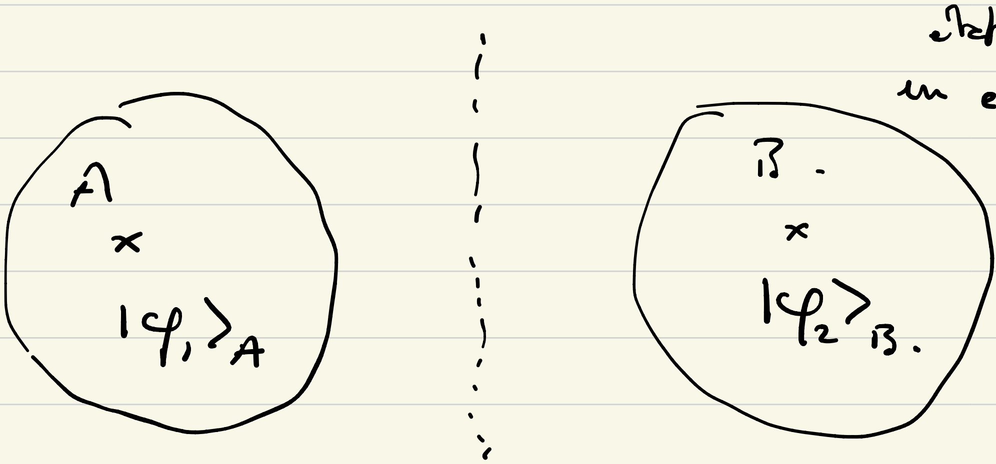
Rappel de Notation : $|00\rangle = |0\rangle_A \otimes |0\rangle_B$ $\quad |01\rangle = |0\rangle_A \otimes |1\rangle_B$

$|10\rangle = |1\rangle_A \otimes |0\rangle_B$ $\quad |11\rangle = |1\rangle_A \otimes |1\rangle_B$.

$$\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B \begin{cases} \nearrow & \text{états produits} \\ \searrow & \text{états intriqués.} \end{cases}$$

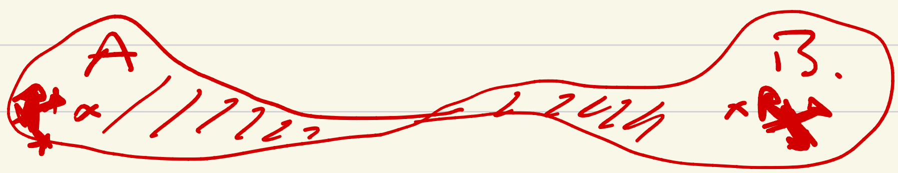
<u>états produits</u> par déf sont des états qui peuvent être "factorisés" c.-à-d

$$\underbrace{|\psi\rangle_{AB}}_{\text{2 qubits}} = \underbrace{|\varphi_1\rangle_A \otimes |\varphi_2\rangle_B}_{\substack{\text{produit tensoriel d'un} \\ \text{état chez A et} \\ \text{un état chez B.}}}$$



<u>état intriqué</u> par déf un état $|\psi\rangle_{AB}$ tel que

$$\nexists \; |\varphi_1\rangle_A \text{ et } |\varphi_2\rangle_B \text{ avec } \boxed{|\psi\rangle = \cancel{|\varphi_1\rangle \otimes |\varphi_2\rangle}.}$$



l'état $|\psi\rangle_{AB}$ est partagé par A et B mais on ne peut pas identifier un état chez A et un autre état chez B.

Exemple d'états intriqués les plus connus.

$\uparrow$ états de **Bell**. John Bell

$$|B_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle + |11\rangle\right).$$

(vecteurs avec 4 composantes.).

$$|B_{01}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|01\rangle + |10\rangle\right)$$

$$|00\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$|01\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$|B_{10}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle - |11\rangle\right)$$

$$|10\rangle = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$|B_{11}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|01\rangle - |10\rangle\right).$$

$$|11\rangle = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Généralisation à 3 systèmes $A\ B\ C$.

exemple

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\underbrace{000}\rangle + |\underbrace{111}\rangle\right).$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle\otimes|0\rangle\otimes|0\rangle + |1\rangle\otimes|1\rangle\otimes|1\rangle\right).$$

8 composantes.

$$\mathcal{H}_A\otimes\mathcal{H}_B\otimes\mathcal{H}_C = \mathbb{C}^2\otimes\mathbb{C}^2\otimes\mathbb{C}^2$$

$$\dim = 2\times 2\times 2 = 8$$

Propriété :

1. $\nexists$ $|\varphi_1\rangle$ et $|\varphi_2\rangle$ dans $\mathbb{C}^2$ t.q

$$\boxed{|B_{ij}\rangle = \cancel{|\varphi_1\rangle} \otimes |\varphi_2\rangle}.$$

Preuve par $|B_{00}\rangle$. par l'absurde :

$$|\varphi_1\rangle = \alpha_1 |0\rangle + \beta_1 |1\rangle \quad \text{et} \quad |\varphi_2\rangle = \alpha_2 |0\rangle + \beta_2 |1\rangle.$$

$$\text{t.q} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) = \underbrace{(\alpha_1 |0\rangle + \beta_1 |1\rangle) \otimes (\alpha_2 |0\rangle + \beta_2 |1\rangle)}$$

$$= \alpha_1\alpha_2 |00\rangle + \alpha_1\beta_2 |01\rangle + \beta_1\alpha_2 |10\rangle + \beta_1\beta_2 |11\rangle.$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{2}} = \alpha_1\alpha_2 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 \text{ et } \alpha_2 \neq 0$$

$$0 = \alpha_1\beta_2 \longrightarrow$$

$$0 = \beta_1\alpha_2 \longrightarrow \quad \text{contradiction.}$$

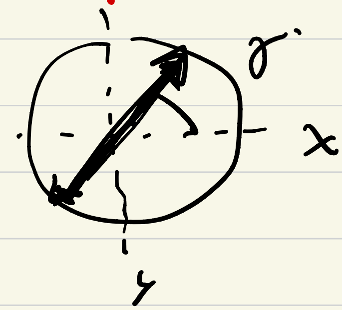
$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \beta_1\beta_2 \quad \Rightarrow \quad \beta_1 \text{ et } \beta_2 \neq 0.$$

2. $\{|B_{00}\rangle, |B_{01}\rangle, |B_{10}\rangle, |B_{11}\rangle\}$ forment une base orthonormée :

$$\left. \begin{array}{l} \langle B_{ij} | B_{ij} \rangle = \| B_{ij} \|^2 = 1 \\ \langle B_{ij} | B_{kl} \rangle = \delta_{ik}\delta_{jl} \end{array} \right\}.$$

$$|\gamma_\perp\rangle = -\sin\gamma\,|0\rangle + \cos\gamma\,|1\rangle.$$

3. Soit $|\gamma\rangle = (\cos\gamma)|0\rangle + (\sin\gamma)|1\rangle$.



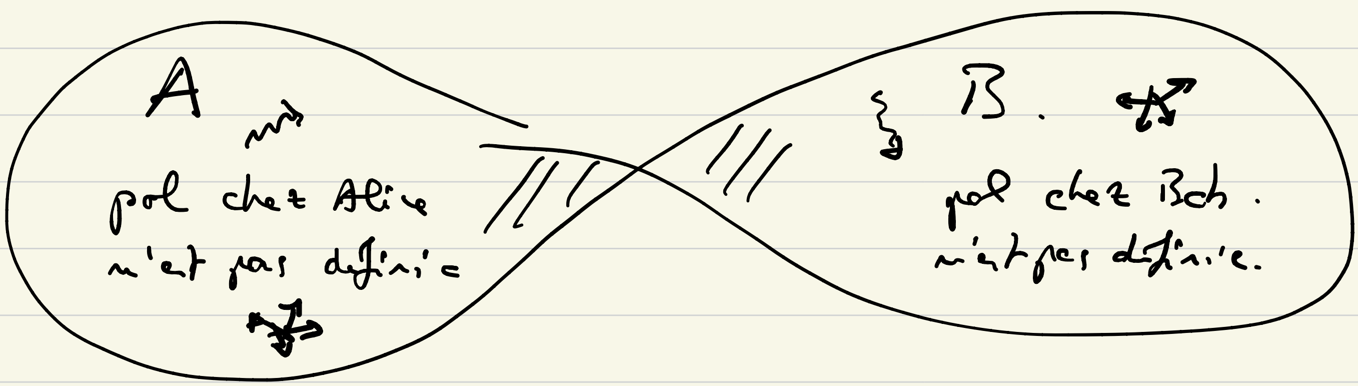
(état de polarisation linéaire du photon.

On peut montrer par calcul que :

$$|B_{00}\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\underbrace{|\gamma\gamma\rangle} + \underbrace{|\gamma_\perp\gamma_\perp\rangle}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\gamma\rangle\otimes|\gamma\rangle + |\gamma_\perp\rangle\otimes|\gamma_\perp\rangle\right)$$

Bon exercice à faire.

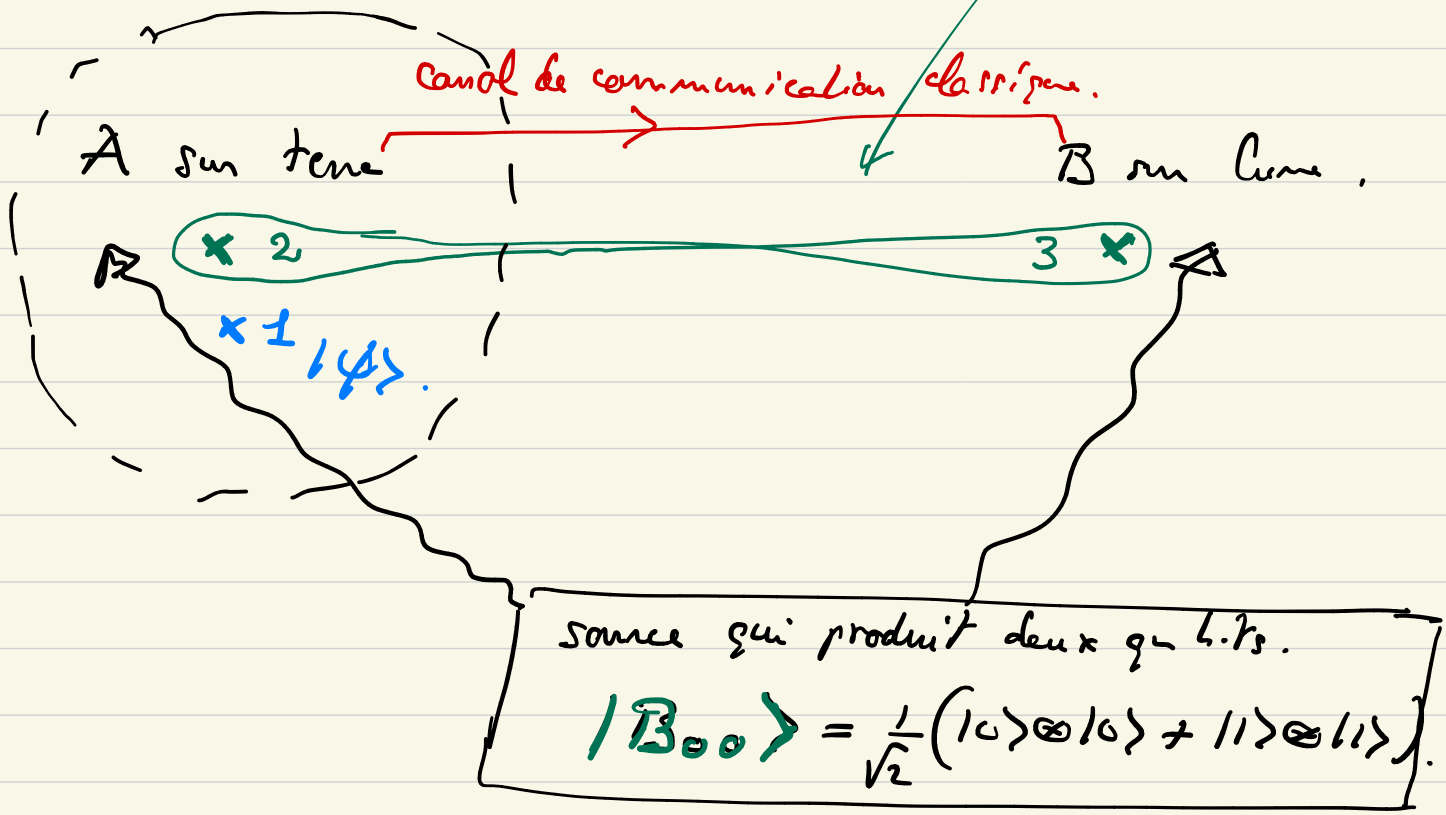


- Localement les pols des deux photons ne sont pas vraiment définies ; elles ont un caractère aléatoire
- Néanmoins les pols sont globalement parallèlement corrélées.

$\boxed{\text{États de Bell : Analogues de désordre ou d'aléatoire partagé entre A et B. L'état local est aléatoire Mais l'état global n'est pas aléatoire}}$

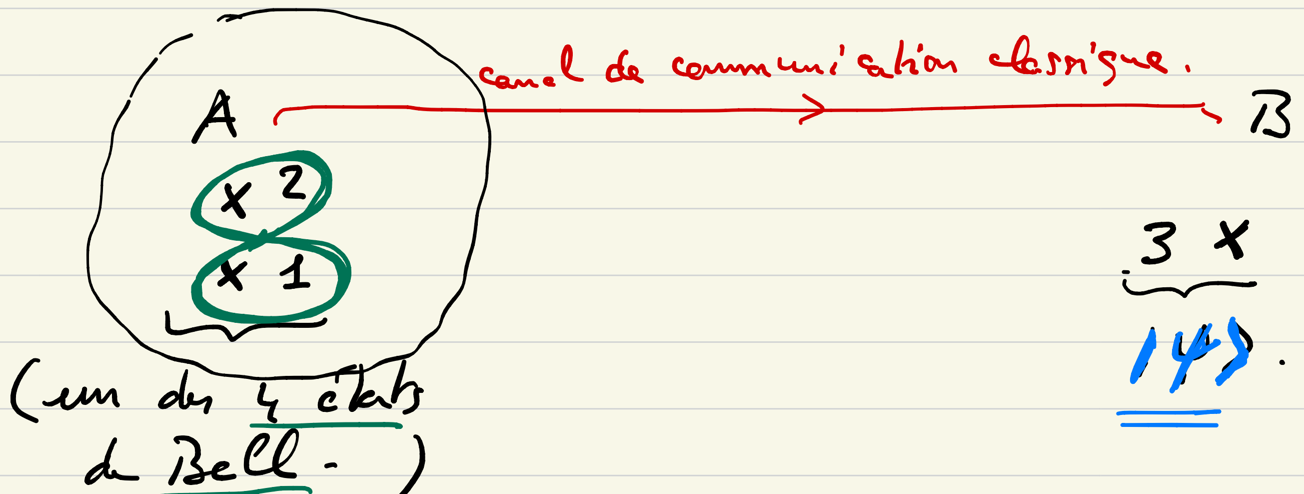
Téléportation proprement dite

"Alice et Bob qui partagent un canal intriqué"



Alice possède un qubit dans l'état arbitraire $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$

But du protocole est d'obtenir la situation finale suivante:



Les particules qui portent l'état des qubits sont restées en place et $\boxed{\text{L'ETAT } |\psi\rangle \text{ A ETE TELEPORTE}}$

Maintenant comment ça marche en détail ?

$$\mathcal{H}_{total} = \underbrace{\mathbb{C}^2}_{\substack{A \\ 1}} \otimes \underbrace{\mathbb{C}^2}_{\substack{A \\ 2}} \otimes \underbrace{\mathbb{C}^2}_{\substack{B \\ 3}} .$$

état initial

$$\boxed{|\psi\rangle_A \otimes |B_{00}\rangle_{AB}}$$

$$= (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \otimes |0\rangle + |1\rangle \otimes |1\rangle)$$

$$= \boxed{\frac{\alpha}{\sqrt{2}} |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle + \frac{\alpha}{\sqrt{2}} |0\rangle \otimes |1\rangle \otimes |1\rangle + \frac{\beta}{\sqrt{2}} |1\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle + \frac{\beta}{\sqrt{2}} |1\rangle \otimes |1\rangle \otimes |1\rangle} .$$

première étape : Alice sur Terre effectue une mesure dans son labo sur les deux qubits en sa possession :

$$\{ |B_{00}\rangle ; |B_{01}\rangle ; |B_{10}\rangle ; |B_{11}\rangle \}$$ (Base de Bell)

→ Chez Alice l'état des deux qubits est projeté aléatoirement sur un de ces 4 états de Bell.

Question : quel est l'état chez Bob ?

- supposons que chez Alice l'état final est $|B_{00}\rangle$.

alors cela veut dire que l'état global a été projeté avec le projecteur

$$|B_{00}\rangle\langle B_{00}| \otimes \underbrace{I_B}_{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}}.$$

ket - bra
vect - vect transp.
Matrice de projection.
chez A

L'état global final :

$$|B_{00}\rangle_{12}\, {}_{12}\langle B_{00}| \otimes I_3 \; |\psi\rangle_1 \otimes |B_{00}\rangle_{23}.$$

$= \underline{\text{calcul à faire}}. = \underbrace{|B_{00}\rangle_{12}}_{\text{Alice.}} \otimes \underbrace{|\psi\rangle_3}_{\text{Bob.}}$

- Autre possibilité

$$|B_{01}\rangle_{12}\, {}_{12}\langle B_{01}| \otimes I_3 \; |\psi\rangle_1 \otimes |B_{00}\rangle_{23}$$

$$|B_{10}\rangle \langle B_{10}| \otimes I_B \; |\psi\rangle \otimes |B_{00}\rangle$$

$$|B_{11}\rangle \langle B_{11}| \otimes I_B \; |\psi\rangle \otimes |B_{00}\rangle$$

Le calcul :

$$\underbrace{\boxed{\underbrace{|B_{00}\rangle_{12}}_{\text{ket chez Alice}}}}\ \underbrace{{}_{12}\langle B_{00}| \otimes I_3 \left(|\psi\rangle_1 \otimes |B_{00}\rangle_{23}\right)}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left({}_{12}\langle 00| + {}_{12}\langle 11|\right) \quad \left(\alpha|0\rangle_1 + \beta|1\rangle_1\right) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle_{23} + |11\rangle_{23}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha\ {}_2\langle 0| + \beta\ {}_2\langle 1|\right) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle_{23} + |11\rangle_{23}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{\left(\alpha|0\rangle_3 + \beta|1\rangle_3\right)}_{\text{l'état qui subsiste après la projection dans l'espace 3 chez Bob}}.$$

$$\boxed{\text{L'état après la mesure chez Bob est } |\psi\rangle_3 = \alpha|0\rangle_3 + \beta|1\rangle_3.}$$

Résumé des résultats de chaque calcul :

après Mesure d'Alice :

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle .$$

$$|B_{00}\rangle_{12} \otimes |\psi\rangle_3$$

$$|B_{01}\rangle_{12} \otimes (\beta|0\rangle_3 + \alpha|1\rangle_3) .$$

$$|B_{10}\rangle_{12} \otimes (\alpha|0\rangle_3 - \beta|1\rangle_3) .$$

$$|B_{11}\rangle_{12} \otimes (\beta|0\rangle_3 - \alpha|1\rangle_3) .$$

Mais Bob ne sait pas ce qu'il a obtenu / et ne sait même pas en fait qu'Alice a fait une mesure.

Dernière étape : utilisation cruciale du canal de com classique

Alice envoie à Bob l'information sur le résultat de sa mesure. avec 2 bits classiques :

00 ; 01 ; 10 ; 11

Bob reçoit ces deux bits classiques d'information et avec cette info il peut décider d'opérer sur son qubit 3.

Bob fait une opération unitaire :

- si il reçoit $\underline{\underline{00}}$: $U = I$ et $I|\psi\rangle = \underline{\underline{|\psi\rangle}}$.
- si il reçoit $\underline{\underline{01}}$: $U = X$ et $X(\beta|0\rangle + \alpha|1\rangle)$

$$= \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$
$$= \underline{\underline{|\psi\rangle}}.$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(porte logique NOT).

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{|0\rangle} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{|1\rangle} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{|1\rangle} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{|0\rangle}$$

- si il reçoit $\underline{\underline{10}}$: $U = Z$ et $Z(\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle)$

$$= \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \underline{\underline{|\psi\rangle}}.$$

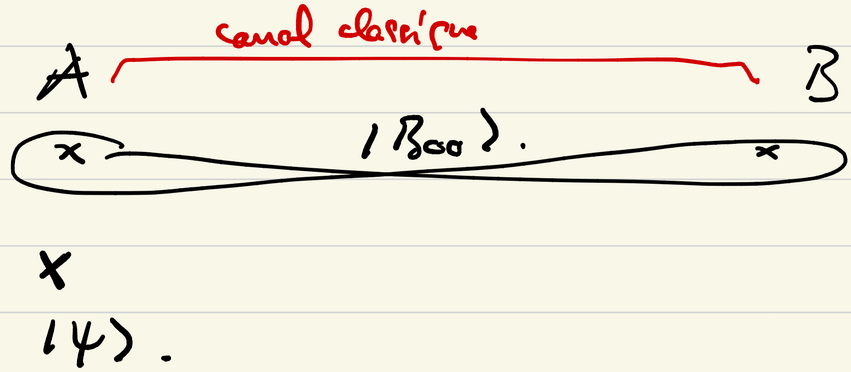
$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- si il reçoit $\underline{\underline{11}}$: $U = \underbrace{XZ}_{iY}$ et $XZ(\beta|0\rangle - \alpha|1\rangle)$

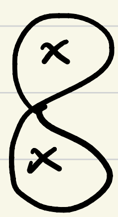
$$= X(\beta|0\rangle + \alpha|1\rangle)$$
$$= \beta|1\rangle + \alpha|0\rangle$$
$$= \underline{\underline{|\psi\rangle}}$$

Fin du protocole

Résumé les étapes du protocole :



a) A fait une mesure dans la base de Bell.



$|B_{00}\rangle$ ou $|B_{01}\rangle$ ou $|B_{10}\rangle$ ou $|B_{11}\rangle$.

b) A informe Bob du résultat : 00 ; 01 ; 10 ; 11

c) B reçoit cette info via le canal classique et effectue

l'op unitaire : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

; XZ.

et ainsi il récupère $|\psi\rangle$.

un des quatre états de Bell.