

NOM : Hanon Ymous  
(000000)  
Place : 0

#0000



## Information, Calcul et Communication (SMA/SPH) : Examen final

21 décembre 2023

### SUJET 1

#### INSTRUCTIONS (à lire attentivement)

**IMPORTANT!** Veuillez suivre les instructions suivantes à la lettre sous peine de voir votre examen annulé dans le cas contraire.

1. Vous disposez de deux heures quarante-cinq minutes pour faire cet examen (8h15 – 11h00).
2. Vous devez **écrire à l'encre noire ou bleu foncée**, pas de crayon ni d'autre couleur.  
N'utilisez **pas non plus de stylo effaçable** (perte de l'information à la chaleur).
3. Vous avez droit à toute documentation papier.

En revanche, vous ne pouvez pas utiliser d'ordinateur personnel, ni de téléphone portable, ni aucun autre matériel électronique.

4. Répondez aux questions directement sur la donnée, **MAIS** ne mélangez pas les réponses de différentes questions!

Ne joignez aucune feuilles supplémentaires; **seul ce document sera corrigé.**

5. Lisez attentivement et *complètement* les questions de façon à ne faire que ce qui vous est demandé. Si l'énoncé ne vous paraît pas clair, ou si vous avez un doute, demandez des précisions à l'un des assistants.
6. L'examen comporte 7 exercices indépendants sur 16 pages, qui peuvent être traités dans n'importe quel ordre, mais qui ne rapportent pas la même chose (les points sont indiqués, le total est de 120 points).

Tous les exercices comptent pour la note finale.



## Question 1 – Diverses questions [14.5 points]

① [4 points] En supposant que `taille()` est en  $\Theta(1)$ , quelle est la complexité de l'algorithme ci-contre, où  $\lfloor x \rfloor$  représente la partie entière inférieure de  $x$  et  $L[i : j]$  représente la sous-liste  $(L(i), \dots, L(j))$  si  $i \leq j$  ou la liste vide si  $i > j$ ?

Justifiez votre réponse.

Réponse et justification :

**algo1**

entrée : une liste  $L$  non vide

sortie : ??

$n \leftarrow \text{taille}(L)$

**Si**  $n = 1$

Sortir :  $(L(1))^2$

$a \leftarrow \lfloor \frac{n}{4} \rfloor$

**Si**  $a = 0$

$a \leftarrow 1$

**Si**  $L(1) \geq L(a)$

$b \leftarrow \text{algo1}(L[1 : a])$

**Sinon, si**  $L(1) \geq L(3a)$

$b \leftarrow \text{algo1}(L[a + 1 : 3a])$

**Sinon**

$b \leftarrow \text{algo1}(L[3a + 1 : n])$

Sortir :  $b^2$

② [3 points] En utilisant RSA, vous souhaitez transmettre de façon confidentielle une information que vous envoyez à un ami dont la clé publique est  $(53, 183)$  et dont la clé privée est 77. Votre clé publique est  $(97, 201)$  et votre clé privée est 49.

Votre ami reçoit 10001110 (en binaire). Quelle est la valeur déchiffrée par votre ami ?

Exprimez votre réponse sous la forme «  $x^y \bmod z$  » ( $x$ ,  $y$  et  $z$  en décimal) et justifiez pleinement votre réponse.

Réponse et justification :

Ne pas écrire dans cette zone.



③ [5 points] Qu'affiche l'extrait de code ci-dessous ? Si nécessaire, mettez « ??? » pour toute valeur inconnue ou « Segmentation fault » si vous pensez que le programme plante (à cet endroit).

**Justifiez** vos réponses (vous pouvez aussi annoter le code).

```
int i(3);
int* p(&i);
int** q(&p);

**q = 25;
p = &i;

int j(i - 10);

cout << "a. " << *p << endl;
cout << "b. " << j << endl;

i = *p;

int* r(*q);

i = i - *r + 20;
*q = &i;
cout << "c. " << *r - **q << endl;
```

**Réponses et justifications :**

a.

b.

c.

④ [2.5 points] Si un nombre décimal  $q$  s'écrit 0.0001 en binaire à virgule fixe, comment s'écrit  $\log_2(q)$  en binaire entier signé sur 6 bits ? **Justifiez** votre réponse.

**Réponse et justification :**

suite au dos 



---

## Question 2 – Un sac de billes [34 points]

On s'intéresse ici à transmettre les résultats d'un jeu consistant à tirer une bille dans un sac contenant 32 billes de 9 couleurs différentes (toutes présentes au moins une fois).

① [4 points] On commence par considérer le cas particulier où il y a 1 bille rouge, 5 billes de chacune de trois autres couleurs, 2 billes de chacune de deux autres couleurs et 4 billes de chacune des trois dernières couleurs.

Quelle est, en bit, l'entropie du jeu dans ce cas ?

Donnez votre réponse sous la forme  $a + b \log_2(5)$ , avec  $a$  et  $b$  deux nombres rationnels ; puis **justifiez** la brièvement.

**Réponse et justification :**

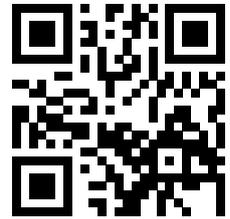
② [3 points] Quelle est l'entropie minimale possible pour un tel jeu ? Expliquez à quelle situation cela correspond, puis **justifiez** brièvement votre réponse.

**Réponse et justification :**

③ [4 points] Quelle est l'entropie maximale possible pour un tel jeu ? Expliquez à quelle situation cela correspond, puis **justifiez** brièvement votre réponse.

**Réponse et justification :**

Ne pas écrire dans cette zone.



---

④ [5 points] Proposez, en le justifiant, un code de Huffman pour la situation donnée en question ①.  
Quelle est sa longueur moyenne? **Justifiez** votre résultat.

**Réponses et justifications :**

⑤ [3 points] Proposez, en le justifiant, un code de Huffman pour la situation donnée en question ②.  
Quelle est sa longueur moyenne? **Justifiez** votre résultat.

**Réponses et justifications :**

⑥ [5 points] Proposez, en le justifiant, un code de Huffman pour la situation donnée en question ③.  
Quelle est sa longueur moyenne? **Justifiez** votre résultat.

**Réponses et justifications :**

suite au dos 

Ne pas écrire dans cette zone.



---

⑦ [6 points] Regroupez et discutez pleinement la cohérence de tous les résultats obtenus aux questions ① à ⑥.

Note : quelques valeurs approchées :

$$\log_2(3) \simeq 1.58 > \frac{30}{19}; \quad \log_2(5) \simeq 2.32; \quad \frac{5}{6} \log_2(5) \simeq 1.93; \quad \log_2(7) \simeq 2.81$$

Réponse :

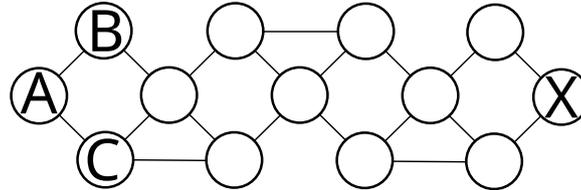
⑧ [4 points] On cherche finalement à transmettre les résultats de 7 tirages. Quel taux de compression peut-on espérer en moyenne par rapport à un codage binaire direct de chacune des 9 couleurs ?

Réponse :

Ne pas écrire dans cette zone.

**Question 3 – La bonne route [8.5 points]**

On considère le réseau (informatique) suivant :



① [4 points] Donnez la ligne correspondant à X dans la table de routage de A.

**Justifiez** votre réponse en annotant (simplement) le graphe ci-dessus.

**Réponse :**

② [1.5 points] À quelle couche (*nom*) correspond le protocole TCP ? Le protocole IP ?

**Réponses :**

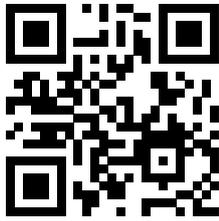
③ [3 points] Si ce réseau perd des paquets, que se passe-t-il :

- au niveau du protocole IP pour la communication entre A et B ?
- au niveau du protocole TCP pour la communication entre A et X ?

**Réponses :**

suite au dos

Ne pas écrire dans cette zone.



---

### Question 4 – Duplicata [12 points]

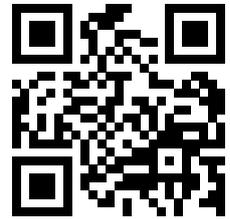
Ecrivez un programme C++ qui permet de recopier toutes les lignes d'un fichier dans un autre. Le programme demandera le nom du fichier à lire, puis le nom du fichier à écrire et recopiera chacune des lignes du premier fichier dans le second.

Réponse :

Ne pas écrire dans cette zone.

Question 4

Anonymisation : #0000  
p. 9



---

(suite de la réponse si nécessaire :)

Ne pas écrire dans cette zone.

suite au dos 



---

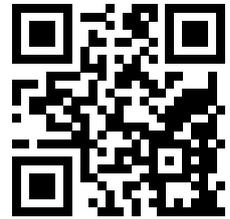
## Question 5 – Quelques algorithmes [12 points]

① [6 points] Écrivez un algorithme *récuratif* et *sans* boucle permettant de supprimer d'une liste donnée toutes les valeurs strictement plus petites qu'une valeur donnée (sans changer l'ordre).

Par exemple, pour la liste (2, 12, 7, 9, 3, 5, 18) et la valeur 9, l'algorithme devra sortir (12, 9, 18); et pour cette même liste et la valeur 19, l'algorithme devra sortir la liste vide.

Réponse :

Ne pas écrire dans cette zone.



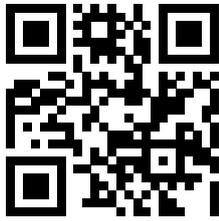
---

② [6 points] Écrivez un algorithme *récuratif* et *sans* boucle qui, à partir de deux listes de même taille, crée la liste (de même taille) contenant à chaque position la plus grande des deux valeurs des deux listes à cette même position.

Par exemple, pour les listes (2, 7, 12, 9, 18, 5) et (5, 2, 17, 9, 3, 4), l'algorithme devra sortir (5, 7, 17, 9, 18, 5).

**Réponse :**

suite au dos 



---

## Question 6 – Bon voyage ! [29 points]

**Note :** (comme toujours, mais particulièrement ici) nous vous conseillons, afin de faire les bons choix, de lire *entièrement* cette question avant de commencer.

On s'intéresse ici à écrire des *parties* d'un programme C++ permettant de représenter un réseau de transport. Le réseau que nous souhaitons représenter est un ensemble de gares, dont certaines sont reliées par des liaisons ayant une durée (en minutes) et un prix (en francs).

Chaque gare aura un nom et l'ensemble de ses destinations (c.-à-d. des liaisons : durée, prix, et indication de la gare d'arrivée).

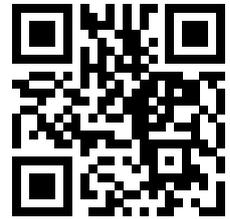
① [4 points] Définissez les types de données que vous jugez nécessaires pour représenter le problème spécifié ci-dessus.

**Réponse :**

② [4 points] Écrivez le code C++ permettant de représenter le réseau simple constitué de deux gares, Lausanne et Renens, tel que la liaison Lausanne–Renens prend 6 minutes et coûte 2.45 francs, et la liaison Renens–Lausanne prend 7 minutes et coûte 2.20 francs.

**Réponse :**

Ne pas écrire dans cette zone.



③ [5 points] Écrivez une fonction `prix()` qui permet de tester si un ensemble de liaisons contient une gare donnée. Cette fonction retournera un booléen indiquant si l'ensemble de liaisons contient la gare fournie et, si oui, le prix de cette liaison (sinon un prix quelconque).

Vous êtes libre de choisir les arguments qui vous conviennent le mieux pour cette fonction.

**Réponse :**

④ [1 point] Définissez un type `Trajet` qui permet de représenter un trajet dans le réseau, c.-à-d. un ensemble de gares à parcourir. Vous êtes libre de choisir la représentation qui vous convient le mieux.

**Réponse :**

⑤ [10 points] Écrivez une fonction `prix()` qui permet de calculer le prix total d'un trajet donné. Cette fonction retournera un booléen indiquant si le trajet est valide ou non et son prix total (si c'est le cas, sinon une valeur quelconque).

Pour être considéré comme valide, un trajet doit contenir un ensemble de gares tel que chaque gare est contenue dans l'ensemble des destinations de la gare qui la précède dans le trajet.

Vous êtes libre de choisir les arguments qui vous conviennent le mieux pour cette fonction.

**Réponse :**

suite au dos 



© [5 points] Pour pouvoir appliquer des algorithmes de plus court chemin (sur les durées), il est nécessaire de produire une matrice représentant les durées entre chacune des gares du réseau :

- à la position (i,j) de la matrice sera stockée la durée de la liaison de la *i*-ème gare à la *j*-ème gare ;
- si les deux gares ne sont pas connectées, on mettra `numeric_limits<X>::max()`, où **X** est le type que vous avez choisi pour les durées ;
- et on mettra 0 sur la diagonale.

Par exemple, si Lausanne est la première gare et Renens la seconde dans l'exemple donné en sous-question ②, la matrice à produire serait

$$\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$$

Écrivez une fonction `connexions()` qui prend en paramètre un réseau et qui retourne la matrice correspondante, telle que définie ci-dessus.

**Réponse :**

Ne pas écrire dans cette zone.



---

**Question 7 – Enregistrement [10 points]**

On considère le signal suivant :

$$X(t) = \sum_{i=1}^5 \frac{1}{i^2} \sin(2\pi i f t + (i-1)\frac{\pi}{10})$$

avec  $f = 210$  Hz.

Ce signal est filtré par un filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure  $f_c = 800$  Hz. On désire enregistrer sous forme numérique une seconde de ce signal filtré. Pour cela, on l'échantillonne ; chaque échantillon étant représenté sur 12 bits.

- ① [1 point] Quelle est la bande passante de  $X$  (avant filtrage) ? **Réponse :**
- ② [6 points] Combien de bits au total faut-il enregistrer *au minimum* si l'on veut éviter d'avoir des erreurs lors de la reconstruction du signal enregistré ?

**Justifiez** pleinement votre réponse.

**Note :** les fréquences d'échantillonnage peuvent être réglées au hertz près.

**Réponse et justification :**

- ③ [3 points] Quelle est alors la forme (formule mathématique) du signal reconstruit ?

**Justifiez** *brièvement* votre réponse.

**Réponse :**



---

Place supplémentaire pour répondre à n'importe quelle question si nécessaire. Mais  
**VEUILLEZ INDIQUER LE NUMÉRO DE LA QUESTION TRAITÉE.**

Ne pas écrire dans cette zone.