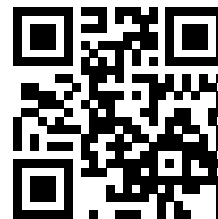


NOM : Hanon Ymous
(000000)
Place : 0

#0000



Information, Calcul et Communication (SPH) : Examen I

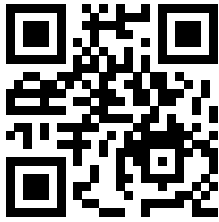
31 octobre 2025

SUJET 1

INSTRUCTIONS (à lire attentivement)

IMPORTANT! Veuillez suivre les instructions suivantes à la lettre sous peine de voir votre examen annulé dans le cas contraire.

1. Vous disposez d'une heure quarante-cinq minutes pour faire cet examen (13h15 – 15h00).
2. Vous devez **écrire à l'encre noire ou bleu foncée**, pas de crayon ni d'autre couleur.
N'utilisez **pas non plus de stylo effaçable** (perte de l'information à la chaleur).
3. Vous avez droit à toute documentation papier.
En revanche, vous ne pouvez pas utiliser d'ordinateur personnel, ni de téléphone portable, ni aucun autre matériel électronique.
4. Répondez aux questions directement sur la donnée, **MAIS** ne mélangez pas les réponses de différentes questions!
Ne joignez aucune feuille supplémentaire ; **seul ce document sera corrigé**.
Si nécessaire, il y a deux pages de réponse supplémentaires en fin de copie.
5. Lisez attentivement et *complètement* les questions de façon à ne faire que ce qui vous est demandé. Si l'énoncé ne vous paraît pas clair, ou si vous avez un doute, demandez des précisions à l'un(e) des assistant(e)s.
6. L'examen comporte 4 exercices indépendants sur 12 pages, qui peuvent être traités dans n'importe quel ordre, mais qui ne rapportent pas la même chose (les points sont indiqués, le total est de 90 points).
Tous les exercices comptent pour la note finale.



Question 1 – Pendule simple [15 points]

On cherche à écrire des *parties* d'un programme C++ permettant de comparer avec la théorie un modèle numérique du pendule simple.

Le problème auquel on s'intéresse est donc un problème de simulation numérique, en 1D (l'angle du pendule), d'un objet oscillant autour de sa position d'équilibre.

Si l'on note θ l'angle du pendule par rapport à sa position d'équilibre stable, $\Omega = \frac{g}{L}$ (avec g l'accélération due à la pesanteur et L la longueur de la tige du pendule), et λ le coefficient de frottement fluide angulaire ($\lambda > 0$), l'équation d'évolution du pendule, linéarisé au voisinage de la position d'équilibre (θ petit) est :

$$\ddot{\theta} + 2\lambda\dot{\theta} + \Omega\theta = 0$$

(avec les notations usuelles $\ddot{\theta} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$ et $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$).

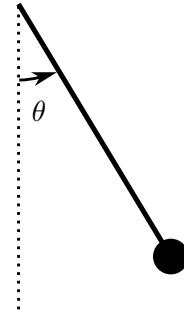
On cherche alors, à partir d'un angle initial θ_0 et d'une vitesse angulaire initiale $\dot{\theta}_0$, à approximer numériquement les valeurs de θ au cours du temps et à les comparer à la valeur théorique $\theta_{\text{théorie}}$

$$\theta_{\text{théorie}}(t) = e^{-\lambda t} (\theta_0 \cos(\omega_d t) + \phi_0 \sin(\omega_d t))$$

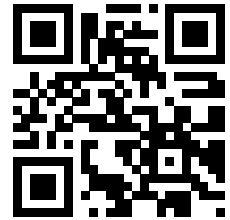
où $\lambda^2 < \Omega$, $\omega_d = \sqrt{\Omega - \lambda^2}$ et $\phi_0 = (\dot{\theta}_0 + \lambda\theta_0)/\omega_d$.

① [3 points] Écrire (en C++) la fonction `theorie()` qui prend en entrée t , θ_0 , $\dot{\theta}_0$, λ et Ω et qui, si $\lambda^2 \geq \Omega$ retourne 0, et sinon, retourne la valeur théorique $\theta_{\text{théorie}}(t)$ explicitée ci-dessus.

Réponse :



Ne pas écrire dans cette zone.



② [2 points] Écrire (en C++) la fonction `affiche()` qui prend en entrée t , une valeur arbitraire θ , puis θ_0 , $\dot{\theta}_0$, λ et Ω , et qui affiche, séparés par des espaces :
 t , la valeur arbitraire θ , la valeur théorique $\theta_{\text{théorie}}(t)$ et leur différence $\theta_{\text{théorie}}(t) - \theta$.

Par exemple, pour $t = 0.02$, $\theta = 0.093$ et une valeur théorique à cet instant t de 0.097, cette fonction affichera :

0.02 0.093 0.097 0.004

Réponse :

③ [4.5 points] On s'intéresse maintenant à la résolution *numérique* d'une équation différentielle telle que celle donnée sur la page précédente.

On utilise pour cela une fonction `integre()` qui prend en entrée θ , $\dot{\theta}$, $\ddot{\theta}$ et un « pas de temps » Δt (qui sont chacune simplement des variables numériques de type `double`) et qui *modifie* θ et $\dot{\theta}$ comme suit et dans cet ordre :

$$\dot{\theta} = \dot{\theta} + \ddot{\theta} \times \Delta t$$

$$\theta = \theta + \dot{\theta} \times \Delta t$$

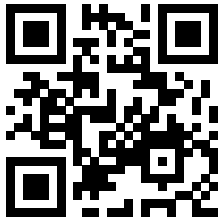
Cette fonction ne retourne rien.

Par exemple, si l'on appelle cette fonction avec les arguments `integre(theta, theta_p, -0.2, 0.1)` et que `theta` valait 0.4 avant l'appel et `theta_p` valait 0.3 avant l'appel, alors, après l'appel `theta_p` vaudra 0.28 (parce que $0.28 = 0.3 - 0.2 \times 0.1$) et `theta` vaudra 0.428 (parce que $0.428 = 0.4 + 0.28 \times 0.1$; notez bien l'utilisation de la valeur 0.28 ici et non pas 0.3).

Écrire (en C++) la fonction `integre()`.

Réponse :

suite au dos ➞



④ [5.5 points] Pour finir, on veut comparer l'intégration numérique à la valeur théorique. Écrire pour cela (en C++) la fonction `teste()` qui prend en entrée un temps de fin t_{fin} , un « pas de temps » Δt , puis θ_0 , $\dot{\theta}_0$, λ et Ω , et qui, pour chaque temps t entre 0 et t_{fin} en avançant de Δt à chaque fois, affiche la valeur calculée numériquement de proche en proche au moyen de la fonction `integre()`, la valeur théorique correspondante et leur écart.

Note : l'accélération à passer à `integre()` est $\ddot{\theta} = -2\lambda\dot{\theta} - \Omega\theta$.

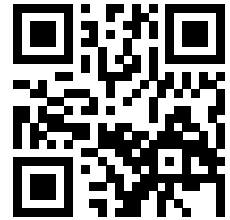
Voici un exemple du début de ce qu'afficherait cette fonction pour $\theta_0 = 0.4$, $\dot{\theta}_0 = 0.3$, $\Delta t = 0.1$, $\lambda = 0.01$ et $\Omega = 0.485$ (donc $\ddot{\theta}$ au départ vaut -0.2) :

t	theta	theorie	écart
0	0.4	0.4	0
0.1	0.428	0.428977	0.000976838
0.2	0.453868	0.455818	0.00194996
0.3	0.477483	0.480398	0.00291484

Note : vous n'avez pas à vous préoccuper de l'affichage de la première ligne (t theta theorie écart), ni des alignements en colonnes.

Réponse :

Ne pas écrire dans cette zone.



Question 2 – Quel rapport ? [27 points]

On considère la machine de Turing ayant pour table de transition :

	0	1	ε
1	(1, 0, +)	(2, 1, +)	(3, 1, -)
2	(2, 0, +)	(1, 1, +)	(3, 0, -)
3	(3, 0, -)	(3, 1, -)	(4, ε , +)

① [3 points] Quel est l'état de la bande et la position de la tête de lecture lorsque la machine s'arrête, si elle a démarré avec sa tête de lecture positionnée comme suit :

$\dots \varepsilon$	0	1	1	0	1	0	0	1	0	$\varepsilon \dots$
	↑									

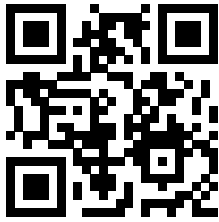
② [5 points] Justifiez votre réponse en deux ou trois phrase(s), puis dites en une phrase ce que fait cette machine.

Réponses à ① et ② :

③ [3 points] Quelle valeur décimale cette machine sortirait-elle pour la valeur 324 en entrée ? Autrement dit : si en entrée de cette machine, on a sur le ruban la représentation binaire (non signée) de 324, quelle est la valeur décimale correspondant à l'écriture binaire (non signée) obtenue en sortie ? Justifiez *brièvement* votre réponse.

Réponse et justification :

suite au dos ➞



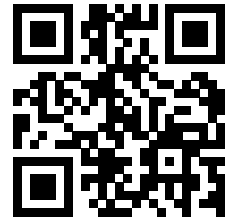
④ [8 points] Écrivez un algorithme qui prend en entrée une liste L de symboles binaires ('0' ou '1') et qui en sortie répond « vrai » si le nombre de '1' dans L est pair ou nul, et « faux » sinon.

Réponse :

⑤ [8 points] Écrivez une fonction C++ qui prend en entrée un `int k`, que l'on supposera positif, et qui donne en sortie « `true` » si l'écriture binaire de k a un nombre pair (ou nul) de 1 et « `false` » sinon.

Réponse :

Ne pas écrire dans cette zone.



Question 3 – Quelques algorithmes récursifs [36 points]

① [12 points] Proposez un algorithme **récursif** et sans boucle qui prend en entrée une liste L de nombres entiers et sort la liste des sommes des deux éléments de même rang à chaque bout : premier + dernier, second + avant-dernier, etc. ; autrement dit la liste $(L[1] + L[n], L[2] + L[n-1], L[3] + L[n-2], \dots)$, où n est la taille de L .

Si la taille de la liste est impaire, $L[\frac{n+1}{2}]$ est additionné à lui-même dans la liste de sortie.

Par exemple, pour la liste $(7, 3, 6, 8, 5, 2)$ en entrée, on aurait la liste $(9, 8, 14)$ en sortie, puisque $7+2 = 9$, $3+5 = 8$ et $6+8 = 14$.

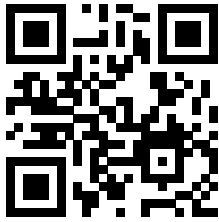
Autre exemple : pour la liste $(7, 3, 6, 5, 2)$ en entrée, on aurait la liste $(9, 8, 12)$ en sortie.

Réponse :

② [4 points] Quelle est la complexité de votre algorithme proposé en ① ? **Justifiez** votre réponse.

Réponse et justification :

suite au dos ➞



③ [6 points] Que sort l'algorithme ci-dessous pour l'entrée $n = 6$?

Justifiez votre réponse.

Algo1

entrée : *un entier* $n \geq 0$

sortie : ???

$p \leftarrow 1$

Si $n = 0$

Sortir : p

$q \leftarrow 2$

Pour i de 1 à $n - 1$

$p \leftarrow 2 \times p$

$q \leftarrow p + n$

$p \leftarrow n$

Si p est impair

$K \leftarrow 1$

Sinon

$K \leftarrow \frac{1}{2}$

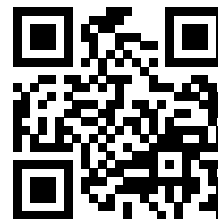
Sortir : $q - p + K \times \mathbf{Algo1}(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) \times \mathbf{Algo1}(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)$

Réponse et justification :

④ [7 points] Quelle est la complexité de l'algorithme **Algo1** proposé en ③ ? **Justifiez** votre réponse.

Réponse et justification (vous pouvez aussi donner des éléments de justification ci-dessus) :

Ne pas écrire dans cette zone.



⑤ [7 points] Simplifiez **Algo1** : proposez un algorithme équivalent, *récuratif* et sans boucle, mais de complexité *linéaire* (et non constante ; c.-à-d. de complexité en $\Theta(n)$, mais pas en $\Theta(1)$).

Réponse :

suite au dos ➞



Question 4 – Quelques nombres [12 points]

① [3.5 points] En représentation binaire non signée d'entiers sur 6 bits, quelle est la représentation binaire de 000100×011101 ?

Quelle est la valeur décimale correspondante ? **Justifiez brièvement** votre réponse.

Réponse puis justification :

② [5 points] Résoudre l'équation suivante sur l'ensemble des entiers *signés* représentés en binaire sur 7 bits (c.-à-d. donnez l'expression binaire de x sur 7 bits) :

$$x + 1001010 = 0110101$$

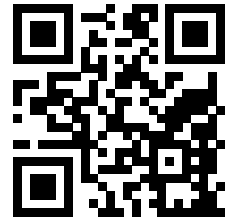
Quelle est la valeur décimale correspondante ? **Justifiez brièvement** votre réponse.

Réponse puis justification :

③ [3.5 points] Quelle est l'erreur relative de représentation de 3.4 sur 6 bits avec 3 bits de mantisse et 2 bits d'exposant, en supposant une représentation par défaut (c.-à-d. *arrondi vers le bas*) et la représentation simplifiée non biaisée de l'exposant (donc toujours positif ou nul et sans comportement particulier pour 0) ? **Justifiez pleinement** votre réponse.

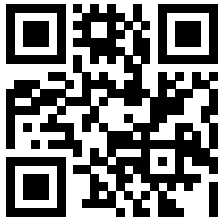
Réponse puis justification :

Ne pas écrire dans cette zone.



Place supplémentaire pour répondre à n'importe quelle question si nécessaire. Mais VEUILLEZ INDIQUER LE NUMÉRO DE LA QUESTION TRAITÉE.

Ne pas écrire dans cette zone.



Place supplémentaire pour répondre à n'importe quelle question si nécessaire. Mais
VEUILLEZ INDIQUER LE NUMÉRO DE LA QUESTION TRAITÉE.

Ne pas écrire dans cette zone.