Transcription du domaine

①	②	③	④
$0 \leq z \leq 1$	$0 \leq x \leq 1$	$0 \leq x \leq 1$	$0 \leq y \leq 1$
$z \leq y \leq 1$	$0 \leq y \leq x$	$0 \leq z \leq x$	$y \leq x \leq 1$
$y \leq x \leq 1$	$0 \leq z \leq y.$	$z \leq y \leq x$	$0 \leq z \leq y.$

⑤	⑥
$0 \leq y \leq 1$	$0 \leq z \leq 1$
$0 \leq z \leq y$	$z \leq x \leq 1$
$y \leq x \leq 1$	$z \leq y. \leq x.$

② : $D \equiv \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x,\ 0 \leq z \leq y \}$

③ : $D \equiv \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq z \leq x,\ z \leq y \leq x \}$

Transcription de l'intégrale (cas ② et ③)

$$I = \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^y dz\ e^{x^3} \qquad ②$$

$$I = \int_0^1 dx \int_0^x dz \int_z^x dy\ e^{x^3} \qquad ③$$

Evaluation des intégrales

② $$I = \int_0^1 dx \int_0^x dy\ e^{x^3} \cdot y = \int_0^1 dx\ e^{x^3} \left[\tfrac{1}{2} y^2 \right]_{y=0}^{y=x}$$

$$= \int_0^1 dx\, e^{x^3} \tfrac{1}{2} x^2 = \frac{1}{6} \int_0^1 e^{x^3} (3x^2)\, dx = \frac{1}{6}(e-1).$$

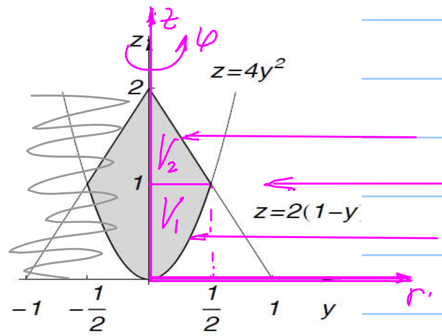
③ $$I = \int_0^1 dx \int_0^x dz\ e^{x^3} (x-z)$$

$$= \int_0^1 dx\ e^{x^3} \left[xz - \tfrac{1}{2} z^2 \right]_{z=0}^{z=x} = \int_0^1 dx\, e^{x^3} (x^2 - \tfrac{1}{2} x^2)$$

$$= \int_0^1 dx\, e^{x^3} \tfrac{1}{2} x^2 = \text{voir } ② = \frac{1}{6}(e-1).$$

10.4. Exemples divers

1) Volume d'un corps de révolution (exemple)



$z = 2(1-r)\,,\ r \geq 0 \iff r = 1 - \frac{z}{2}\,,\ r\geq 0$

$z = 4r^2\,,\ r\geq 0 \iff r = \sqrt{\frac{z}{4}}\,,\ r \geq 0$

$\begin{cases} 2\cdot(1-r) = 4r^2 \\ r \geq 0 \end{cases} \implies r = \frac{1}{2}$

i) Calcul du volume par décomposition du domaine

$$V_1 = \int_0^1 dz \cdot \int_0^{\sqrt{\frac{z}{4}}} dr \int_0^{2\pi} d\varphi \; 1\cdot r$$

$$= 2\pi \int_0^1 dz \left[\tfrac{1}{2} r^2\right]_0^{\sqrt{\frac{z}{4}}} = 2\pi \int_0^1 dz \; \frac{1}{2} \; \frac{z}{4}$$

$$= \frac{\pi}{4}\left[\tfrac{1}{2} z^2\right]_0^1 = \frac{\pi}{8}$$

$$V_2 = \int_1^2 dz \int_0^{1-\frac{z}{2}} dr \int_0^{2\pi} d\varphi \; 1\cdot r$$

$$= 2\pi \int_1^2 dz \left[\tfrac{1}{2} r^2\right]_0^{1-\frac{z}{2}} = 2\pi \int_1^2 dz \; \frac{1}{2}\left(1-\frac{z}{2}\right)^2$$

$$= \pi \left[\left(1-\frac{z}{2}\right)^3 \left(-\frac{2}{3}\right)\right]_1^2 = \frac{2\pi}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{\pi}{12}$$

$$V = V_1 + V_2 = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{12} = \frac{5\pi}{24}$$

ii) Calcul direct

$$V = \int_0^{\frac{1}{2}} dr \int_{4r^2}^{2(1-r)} dz \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot 1 \cdot r$$

$$= 2\pi \cdot \int_0^{\frac{1}{2}} dr \cdot r \cdot \left[z\right]_{4r^2}^{2-2r}$$

$$= 2\pi \int_0^{\frac{1}{2}} dr \left(2r - 2r^2 - 4r^3\right)$$

$$= 2\pi \left[r^2 - \frac{2}{3} r^3 - r^4 \right]_0^{\frac{1}{2}} = \pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) = \frac{5\pi}{24}$$

iii) Transcription du domaine i) → ii) sans le dessin

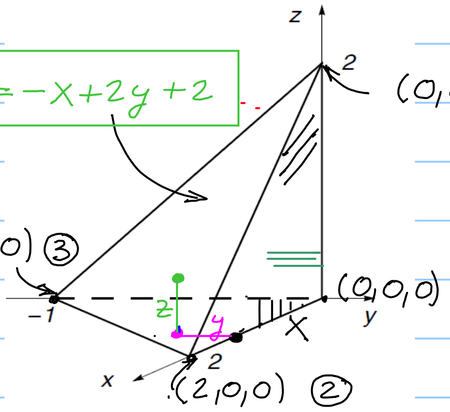
V_1 :
$$0 \leqslant z \leqslant 1 \qquad\qquad 0 \leqslant r \leqslant \frac{1}{2}$$
$$0 \leqslant r \leqslant \underbrace{\sqrt{\frac{z}{4}}}_{\Leftrightarrow\ z \geqslant 4r^2} \qquad\qquad 4r^2 \leqslant z \leqslant 1$$

V_2 :
$$1 \leqslant z \leqslant 2 \qquad\qquad 0 \leqslant r \leqslant \frac{1}{2}$$
$$0 \leqslant r \leqslant \underbrace{1 - \frac{z}{2}}_{\Leftrightarrow\ z \leqslant 2(1-r)} \qquad\qquad 1 \leqslant z \leqslant 2(1-r)$$

$$V_1 + V_2 = \int_0^{\frac{1}{2}} dr \int_{4r^2}^{1} dz \ \underline{\hspace{1.5cm}} + \int_0^{\frac{1}{2}} dr \int_1^{2(1-r)} dz \ \underline{\hspace{1.5cm}}$$
$$= \int_0^{\frac{1}{2}} dr \left(\int_{4r^2}^{1} dz \ \underline{\hspace{1.5cm}} + \int_1^{2(1-r)} dz \ \underline{\hspace{1.5cm}} \right)$$
$$= \int_0^{\frac{1}{2}} dr \int_{4r^2}^{2(1-r)} dz \ \underline{\hspace{1.5cm}} = V \quad \text{(méthode ii))}$$

2) Calcul d'un centre de gravité (voir 10.3.3)

(✱) $\boxed{z = -x + 2y + 2}$

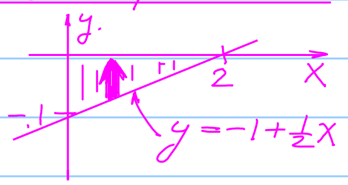


||||| $z = 0$,

/// $y = 0$

≡ $x = 0$

Dans le plan $z=0$:



(✱) :

$$z = ax + by + c =: f(x,y)$$

① ⇒ $2 = 0 + 0 + c$ ⇒ $c = 2$

② ⇒ $0 = a \cdot 2 + 0 + 2$ ⇒ $a = -1$

③ ⇒ $0 = 0 - b + 2$ ⇒ $b = 2$

$$I = \int_0^2 dx \boxed{\int_{-1+\frac{1}{2}x}^{0} dy} \int_0^{-x+2y+2} dz \quad 1$$ (voir les dessins)

aller du plus petit au plus grand !

Même intégrale à partir des inégalités

$$0 \leq x$$
$$y \leq 0$$
$$0 \leq \underbrace{z \leq -x+2y+2}$$
$$\Leftrightarrow x \leq 2y+2-z$$
$$\Leftrightarrow y \geq -1+\tfrac{1}{2}z+\tfrac{1}{2}x$$

$$\Longrightarrow \quad 0 \leq x \leq 2, \quad -1+\tfrac{1}{2}x \leq y \leq 0, \quad 0 \leq z \leq -x+2y+2$$

Evaluation de l'intégrale

$$I = \int_0^2 dx \int_{-1+\frac{1}{2}x}^{0} dy \, \underbrace{(-x+2y+2)}_{f(x,y)}$$

$$= \int_0^2 dx \left[-xy+y^2+2y\right]_{y=-1+\frac{1}{2}x}^{y=0}$$

$$= -\int_0^2 dx \left(x(1-\tfrac{1}{2}x)+(1-\tfrac{1}{2}x)^2-2+x\right)$$

$$= -\left[\tfrac{1}{2}x^2-\tfrac{1}{6}x^3-\tfrac{2}{3}(1-\tfrac{1}{2}x)^3-2x+\tfrac{1}{2}x^2\right]_0^2 = \ldots = \tfrac{2}{3}$$

$$I_1 = \int_0^2 dx \int_{-1+\frac{1}{2}x}^{0} dy \int_0^{-x+2y+2} dz \cdot x = \ldots = \tfrac{1}{3}$$

$$I_2 = \ldots = -\tfrac{1}{6}$$

$$I_3 = \ldots = \tfrac{1}{3}$$

Centre de gravité: $\left(\frac{I_1}{I}, \frac{I_2}{I}, \frac{I_3}{I}\right) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$

11. "Loose ends"

11.1. Exponentielle d'une matrice $n\times n$

<u>Définition:</u> Soit B une matrice $n\times n$. Alors

$$e^B := \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} B^k, \quad \text{où } B^0 = I \text{ (matrice identitée)}$$

<u>Remarque:</u> on a donc la fonction $e : \mathbb{R}^{n\cdot n} \longrightarrow \mathbb{R}^{n\cdot n}$, $B \longmapsto e^B$.

<u>Remarque</u> (voir la série 8B).

Soit $\| \ \|$ une norme pour $\mathbb{R}^n$ et

$$\|B\| := \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, x\neq 0} \frac{\|Bx\|}{\|x\|}$$

la norme induite sur $\mathbb{R}^{n\cdot n}$. Alors, $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$$\|Bx\| \leq \|B\|\,\|x\|, \quad \|B^2x\| \leq \|B(Bx)\| \leq \|B\|\,\|Bx\| \leq \|B\|^2\|x\|$$

et donc $\|B^k x\| \leq \|B\|^k \|x\|$

$$\Rightarrow \|B^k\| = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ x\neq 0}} \frac{\|B^k x\|}{\|x\|} \leq \|B\|^k$$

Ceci implique que la suite $B_N = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} B^k$ <u>est de Cauchy</u> dans $\mathbb{R}^{n\cdot n}$ et e^B est bien définie

$\forall \varepsilon > 0, \exists N_0$, t.q. $\forall N, M \geq N_0$, $M \leq N$,

$$\|B_N - B_M\| = \Big\|\sum_{k=M+1}^{N} \frac{1}{k!} B^k\Big\| \leq \sum_{k=M+1}^{N} \frac{1}{k!}\|B\|^k \leq \underbrace{\sum_{k=N_0}^{\infty} \frac{1}{k!}\|B\|^k}_{\text{"fin" de la série numérique de } e^{\|B\|}} \overset{\text{Analyse I}}{\leq} \varepsilon$$

<u>Remarques:</u> (B, B_1, B_2 des matrices $n \times n$).

1) La série e^{B} converge absolument (en norme)

2) $e^{B_1} \cdot e^{B_2} = e^{B_1 + B_2} \iff B_1 B_2 = B_2 B_1$

$(B_1 + B_2)^2 = B_1^2 + B_1 B_2 + \underline{\underline{B_2 B_1}} + B_2^2$

3) $(e^{B})^{-1} = e^{-B}$. car $B(-B) = (-B) \cdot B$

4) $\det(e^{B}) = e^{tr.(B)}$. car voir 5)

5) Si $B = S D S^{-1}$, $D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$

$\left(\,|\,|\,|\,|\,\right)$ les vecteurs propres de B $\qquad D^2 = \begin{pmatrix} d_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n^2 \end{pmatrix}$

$$\Longrightarrow \quad e^{B} = S e^{D} S^{-1}$$

avec $e^{D} = \begin{pmatrix} e^{d_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{d_n} \end{pmatrix}$

car $B^2 = (SDS^{-1})(SDS^{-1}) = SD^2S^{-1}$ et donc

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} B^k = S \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} D^k \right) S^{-1}$$

6) Soit $p(\lambda) = \det(\lambda I - B)$. Alors (voir Algèbre linéaire) $p(B) = 0 \Longrightarrow$

$$e^{B} = \sum_{k=0}^{n-1} b_k B^k.$$

pour certains nombres $b_0, \dots, b_{n-1}$

7) Si $Bv = \lambda v$, alors $e^{B} v = e^{\lambda} v$. $(v \neq 0)$