11. "Loose ends"

Prérequis pour lundi

Cours (théorie)

Section 1.5. (ED linéaires du deuxième ordre à coéfficients constants)
Section 1.8. (ED linéaires à coéfficients constants d'ordre supérieur)
Section 1.9. (Solutions qualitatives, méthode des isoclines)

Prérequis pour mardi

Cours (théorie)

Section 1.5. (ED linéaires du deuxième ordre à coéfficients constants)
Section 1.8. (ED linéaires à coéfficients constants d'ordre supérieur)
Section 1.9. (Solutions qualitatives, méthode des isoclines)
Théorème de l'inversion locale (démonstration, la fonction phi)
Théorème des fonctions implicites (Notations pour dF/dx et dF/dy)

Cours (exemples)

Section 1.2 (Exemple 2, y'=y^2)
Section 1.9 (Exemple, y'=x^2+y^2) Exercices (comprendre les corrigés !)

Exercices (comprendre les corrigés !)

Série 7B, Exercice 4 (Espace des fonctions continues)
Série 8B, Exercice 2 (Normes sur applications linéaires)
Série 9A, Exercice 2 (Normes matricielles, inverse de (1-X), et de (A-B) avec A inversible)
Série 9A, Exercice 3 (Théorème du point fixe)
Série 9B, Echauffement (Dérivation sous l'intégrale)
Série 10B, Exercice 5 (Théorème des accroissements finis)
Série 11A, Exercice 8 (Dérivée et différentielle)
Série 11A, Exercice 9 (Norme d'une intégrale d'une fonction à valeurs dans R^m)

11.1. Exponentielle d'une matrice $n\times n$

Définition: Soit B une matrice $n\times n$. Alors

$$e^{B} := \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} B^{k}, \quad \text{où } B^{0}=I \text{ (matrice identitée)}$$

Remarque: on a donc la fonction $e : \underbrace{\mathbb{R}^{n\cdot n}}_{\cong V} \longrightarrow \underbrace{\mathbb{R}^{n\cdot n}}_{\cong V}$, $B \longmapsto e^{B}$.

Remarque (voir la série 8B)

Soit $\| \ \|$ une norme pour $\mathbb{R}^{n}$ et

$$\|B\| := \sup_{x\in\mathbb{R}^{n},\, x\neq 0} \frac{\|Bx\|}{\|x\|} \qquad \left(= \sup_{x\in\mathbb{R}^{n},\, \|x\|=1} \|Bx\| \right)$$

la norme induite sur $\underbrace{\mathbb{R}^{n\cdot n}}_{\cong V}$. Alors, $\forall x\in\mathbb{R}^{n}$

$$\|Bx\| \leq \|B\|\,\|x\|, \quad \|B^{2}x\| \leq \|B(Bx)\| \leq \|B\|\,\|Bx\| \leq \|B\|^{2}\|x\|$$

et donc $\|B^{k}x\| \leq \|B\|^{k}\|x\|$

$$\Rightarrow \|B^{k}\| = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^{n}\\ x\neq 0}} \frac{\|B^{k}x\|}{\|x\|} \leq \|B\|^{k}$$

Ceci implique que la suite $B_N = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} B^{k}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}^{n\cdot n}$ et e^{B} est bien définie

$\forall \varepsilon>0, \exists N_0$, t.q. $\forall N, M \geq N_0$, $M\leq N$,

Analyse I

$$\|B_N - B_M\| = \left\| \sum_{k=M+1}^{N} \frac{1}{k!} B^{k} \right\| \leq \sum_{k=M+1}^{N} \frac{1}{k!} \|B\|^{k} \leq \underbrace{\sum_{k=N_0+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \|B\|^{k}}_{\text{"fin" de la série numérique de } e^{\|B\|}} \leq \varepsilon$$

<u>Remarques</u>: (B, B_1, B_2 des matrices $n \times n$).

1) La série e^B converge absolument (en norme)

2) $e^{B_1} \cdot e^{B_2} = e^{B_1 + B_2} \iff B_1 B_2 = B_2 B_1$

$(B_1 + B_2)^2 = B_1^2 + B_1 B_2 + \underline{\underline{B_2 B_1}} + B_2^2$

3) $(e^B)^{-1} = e^{-B}$. car $B(-B) = (-B) \cdot B$

4) $\det(e^B) = e^{tr.(B)}$. car voir 5)

5) Si $B = S D S^{-1}$, $D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$

$(| \, | \, | \, |)$ les vecteurs propres de B $\qquad D^2 = \begin{pmatrix} d_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n^2 \end{pmatrix}$

$$\Longrightarrow \quad e^B = S \, e^D \, S^{-1}$$

avec $e^D = \begin{pmatrix} e^{d_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{d_n} \end{pmatrix}$

car $B^2 = (SDS^{-1})(SDS^{-1}) = SD^2S^{-1}$ et donc

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} B^k = S \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} D^k \right) S^{-1}$$

6) Soit $p(\lambda) = \det(\lambda I - B)$. Alors (voir Algèbre linéaire) $p(B) = 0 \Longrightarrow$

$$e^B = \sum_{k=0}^{n-1} b_k B^k.$$

pour certains nombres $b_0, \ldots, b_{n-1}$

7) Si $Bv = \lambda v$, alors $e^B v = e^\lambda v$. $\quad (v \neq 0)$

II.2. Equations différentielles d'ordre n

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $f : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et $u : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une solution de l'équation différentielle

$$u^{(n)}(x) = f(x, u(x), \ldots, u^{(n-1)}(x))$$

(donc u de classe $C^n(I)$). Alors la fonction

$$y : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$x \longmapsto (u(x), \ldots u^{(n-1)}(x))^T$$

satisfait l'équation différentielle du premier ordre (y est de classe $C^1(I)$)

$$y'(x) = (u'(x), \ldots, u^{(n)}(x))^T$$
$$= (u'(x), \ldots, u^{(n-1)}(x), f(x, u(x), \ldots u^{(n-1)}(x))^T$$
$$=: F(x, u(x), \ldots, u^{(n-1)}(x)).$$
$$\equiv F(x, y(x)).$$

avec $F : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue.

<u>Conclusion</u> : les équations différentielles d'ordre $n \geq 2$ sont des cas particuliers d'équation différentielles d'ordre un à valeurs vectorielles dans $\mathbb{R}^n$.

11.3 Equations différentielles linéaires d'ordre n à coefficients constants (voir section 1.8)

Soit l'ED pour $u(x)$ (on a posé $a_n = 1$ ici)

$$u^{(n)} + a_{n-1} u^{(n-1)} + \dots + a_1 u' + a_0 u = q(x)$$

avec $q(x)$ continue sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$, $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$. Alors, on pose

$$y(x) = \left(u(x), u'(x), \dots, u^{(n-1)}(x)\right)^T$$

et on obtient l'équation

$$y' = Ay + Q$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

matrice $n \times n$

$$Q(x) = (0, \dots, 0, q(x))^T$$

ce qui est un cas particulier de l'équation linéaire générale

$$y' = Ay + Q(x)$$

avec $A \in \mathbb{R}^{n \cdot n}$ et $Q : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$.

Donnée une condition initiale $y(x_0) = y_0 \in \mathbb{R}^n$, $x_0 \in I$, la solution est toujours

$$\boxed{y(x) = e^{(x-x_0)A} y_0 + \int_{x_0}^{x} e^{(x-t)A} Q(t)\, dt.}$$

ce qui est connu comme le "principe de Duhamel".

Les cas résonnants s'expliquent naturellement par l'exponentielle de bloques de Jordan (voir Algèbre linéaire). Voir série 14 A.

Vérification

i) la fonction $x \longmapsto e^{xA}$ est differentiable comme fonction de $\mathbb{R} \to \underbrace{\mathbb{R}^{n \cdot n}}_{= V}$ et on a pour la derivée:

le montrer !

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{e^{(x+h)A} - e^{xA}}{h} = e^{xA} \lim_{h \to 0} \frac{e^{hA} - I}{h}$$

$= I + hA + \|A\|^2 h \,\varepsilon(h)$

$$= e^{xA} A = A\, e^{xA}$$

ii) donc (dérivation d'une intégrale avec paramètre)

$$y'(x) = A\, e^{(x-x_0)A} y_0$$
$$+ e^{(x-x)A} Q(x).$$
$$+ \int_{x_0}^{x} A\, e^{(x-t)A} Q(t)\, dt.$$

$$= A\, y(x) + Q(x).$$

Exemple

$$u''(x) + u(x) = 0 \quad (*)$$
$$u(0) = 1, \quad u'(0) = 0$$
$\Big\}$ solution: $u(t) = \cos(x)$

Avec la formule de Duhamel ($Q \equiv 0$ ici)

$$y := \begin{pmatrix} u \\ u' \end{pmatrix}, \quad y' = \begin{pmatrix} u' \\ u'' \end{pmatrix} \underset{(*)}{=} \begin{pmatrix} u' \\ -u \end{pmatrix} = Ay.$$

avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$y_0 = \begin{pmatrix} u(0) \\ u'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pour le polynôme characléristique de A on a.

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 + 1 \quad \text{et donc} \quad A^2 + I = 0 \iff A^2 = -1$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Avec $B \equiv xA$, $B^k = x^k A^k$

$$e^B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B^k = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{(2\ell)!} \underbrace{B^{2\ell}}_{x^{2\ell}(A^2)^\ell} + \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{(2\ell+1)!} \underbrace{B^{2\ell+1}}_{x^{2\ell+1}A(A^2)^\ell}$$

$$= \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{(2\ \ )!} x^{2\ell} \right) I + \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{(2\ell+1)!} x^{2\ell+1} \right) A$$

$$= \cos(x) I + \sin(x) A = \begin{pmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix}$$

La solution de notre problème est donc

$$y(x) = e^{xA} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(x) \\ -\sin(x) \end{pmatrix},$$

ou, dans les variables de départ, $u(x) = \cos(x)$.

Exemple

$$u'' + u = \cos(x), \quad y := \begin{pmatrix} u \\ u' \end{pmatrix}, \quad Q(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(x) \end{pmatrix}$$

$$y' = Ay + Q \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$e^{xA} = \begin{pmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix}$$

$$y(x) = \begin{pmatrix} \sin(x) \\ \cos(x) \end{pmatrix} + \int_0^x \begin{pmatrix} \cos(x-t) & \sin(x-t) \\ -\sin(x-t) & \cos(x-t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(t) \end{pmatrix} dt.$$

$$= \begin{pmatrix} \sin(x) \\ \cos(x) \end{pmatrix} + \int_0^x \begin{pmatrix} \sin(x-t)\cos(t) \\ \cos(x-t)\cos(t) \end{pmatrix} dt.$$

$$\sin(x-t)\cos(t) = \sin(x)\cos(t)^2 - \cos(x)\sin(t)\cos(t)$$

$$u(x) = \sin(x) + \sin(x) \int_0^x \underbrace{\cos(t)^2}_{\frac{1}{2}(1+\cos(2t))} dt - \cos(x) \int_0^x \underbrace{\sin(t)\cos(t)}_{\frac{1}{2}\sin(2t)} dt.$$

$$u(x) = \sin(x) + \sin(x) \left[\frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin(2t)\right]_0^x + \cos(x)\left[\frac{1}{4}\cos(2t)\right]_0^x$$

$$u(x) = \sin(x) + \sin(x)\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sin(x)\cos(x)\right)$$

$$+ \cos(x)\Big(\underbrace{\frac{1}{4}\cos(2x) - \frac{1}{4}}_{-\frac{1}{2}\sin(x)^2}\Big).$$

$$u(x) = \sin(x) + \frac{1}{2} x \sin(x) + \frac{1}{2}\cancel{\sin(x)}^2\cos(x)$$

$$\underline{u(x) = \sin(x) + \frac{1}{2} x \sin(x).}$$

11.4 Théorème du point fixe de Banach

<u>Définition</u>: un espace métrique complet est un espace métrique tel que toute suite de Cauchy converge vers un élément de l'espace.

<u>Exemples</u> • tous les espaces de Banach avec $d(x,y) = \|x-y\|$

• $C(I, \mathbb{R}^m)$, $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle fermé avec la norme $\|\ \|_\infty$ est un Banach.
$\|w\|_\infty := \sup_{x \in I} \|w(x)\|_\infty$

• $\{w \in C(I, \mathbb{R}^m) : \|w - w_0\|_\infty \leq r\}$, où $r > 0$ et $w_0 \in C(I, \mathbb{R}^m)$ sont donnés.

<u>Théorème</u>: Soit (Ω, d) un espace métrique complet et $\varphi : \Omega \to \Omega$ une fonction telle que $\exists\, g \in \mathbb{R}$, $0 \leq g < 1$,

$$\boxed{\forall x, y \in \Omega \ , \quad d(\varphi(x), \varphi(y)) \leq g\, d(x,y)}$$

alors φ admet un point fixe unique

$$x^* = \varphi(x^*) \in \Omega.$$

et on a que $x^* = \lim_{n \to \infty} x_n$, où $x_0 \in \Omega$ est quelconque et $x_n = \varphi(x_{n-1})$, $n = 1, 2, \ldots$

<u>Démonstration</u>: identique à la démonstration donnée pour l'Exercice 3 de la Série 9 A

Démonstration

i) $\forall n \geq 1 \quad d(x_{n+1}, x_n) \leq \dots \leq \rho^n d(x_1, x_0)$

ii) $\forall n > m \geq n_0$

$$d(x_n, x_m) \leq \rho^m d(x_{n-m}, x_0)$$

$$\leq \rho^m \left(d(x_0, x_1) + \dots + d(x_{n-m-1}, x_{n-m}) \right)$$

$$\leq \rho^{n_0} \frac{1}{1-\rho} d(x_1, x_0) \leq \varepsilon.$$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0$ t.q.

11.5. Dérivée d'une fonction matricielle

(voir la série 11A, exercice 8)

Exemple $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ matrices 2×2.

$$f : V \longrightarrow V \quad , \quad f(X) = X^2.$$

f est différentiable en tout point $X_0 \in V$

$$f'(X_0) : V \longrightarrow V$$

$$H \longmapsto f'(X_0)\, H = X_0 H + H X_0$$

Démonstration

$$f(X_0 + H) = (X_0 + H)^2 =$$

$$= f(X_0) + f'(X_0)\, H + \underbrace{H^2}_{=: \varepsilon(H) \| H \|}$$

$$0 \leq \lim_{H \to 0} \left\| \frac{H^2}{\|H\|} \right\| \leq \lim_{H \to 0} \|H\| = 0$$

$(H \in V)$

Cas particulier $X_0 = I$ (matrice identité)

$$f'(I)\, H = 2 \cdot I \cdot H \qquad \left(I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

Quelle est la matrice Jacobienne ?

$$J_f(I) = \begin{pmatrix} 2 & & & 0 \\ & 2 & & \\ & & 2 & \\ 0 & & & 2 \end{pmatrix} \quad \text{matrice } 4 \times 4$$