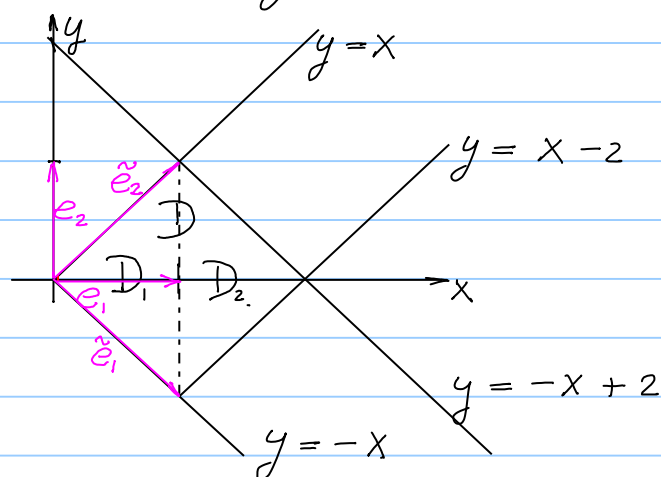


10.2.6. Changement de variables / coordonnées : un exemple



$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

$$I = \int_D f \, d\sigma$$

$$I \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{décomposition} \\ \text{du domaine}}}{=} \int_{D_1} f \, d\sigma + \int_{D_2} f \, d\sigma$$

$$\stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{Fubini}}}{=} \int_0^1 dx \int_{-x}^x dy (x^2 + y^2) + \int_1^2 dx \int_{x-2}^{-x+2} dy (x^2 + y^2)$$

$$= 15' \text{ plus tard} = \frac{8}{3}.$$

Plus élégant, changement de coordonnées

$(e_1, e_2) \longrightarrow (\tilde{e}_1, \tilde{e}_2)$ une application linéaire

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det A = 2$$

$\tilde{e}_1 = e_1 + (-1) \cdot e_2$

pour les coordonnées (x, y) par rapport à e_1, e_2 et ξ, η par rapport à $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2$ on a.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = G(\xi, \eta) \leftarrow \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \text{par exemple.} \end{cases}$$

Explicitement:

$$\begin{cases} x = \xi + \eta \\ y = -\xi + \eta \end{cases}$$

et on trouve pour l'intégrale:

$$I = \int_0^1 d\xi \int_0^1 d\eta \underbrace{\tilde{f}(\xi, \eta) | \det A |}_{= 2}$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\xi, \eta) &= f(x, y) \Big|_{(x, y) = G(\xi, \eta)} = (x^2 + y^2) \Big|_{(x, y) = G(\xi, \eta)} \\ &= (\xi + \eta)^2 + (\xi - \eta)^2 = 2(\xi^2 + \eta^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= 4 \cdot \int_0^1 d\xi \int_0^1 d\eta (\xi^2 + \eta^2) = \frac{8}{3} \\ &= \underbrace{2}_{\text{pink}} \cdot \underbrace{2}_{\text{green}} = \frac{2}{3} \leftarrow \text{notre premier exemple} \right. \\ &\quad \left. \text{d'une intégrale double} \right. \end{aligned}$$

10.2.7. Changement de variables : le cas général

Théorème soit $G: \tilde{D} \longrightarrow D$
 $(\xi, \eta) \longmapsto (x, y) = G(\xi, \eta)$

bijective de classe C^1 (c.-à-d. G , ainsi que $H=G^{-1}$ les deux de classe C^1). Soit

$$\begin{aligned} (x, y)^T &= G(\xi, \eta) = (G_1(\xi, \eta), G_2(\xi, \eta))^T \\ \det(J_G(\xi, \eta)) &= \det \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial \xi}(\xi, \eta) & \frac{\partial G_1}{\partial \eta}(\xi, \eta) \\ \frac{\partial G_2}{\partial \xi}(\xi, \eta) & \frac{\partial G_2}{\partial \eta}(\xi, \eta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Alors

$$\int_D f \, d\sigma = \int_{\tilde{D}} \tilde{f} | \det J_G | \, d\tilde{\sigma} \quad , \quad \text{où } \tilde{f} = f \circ G,$$

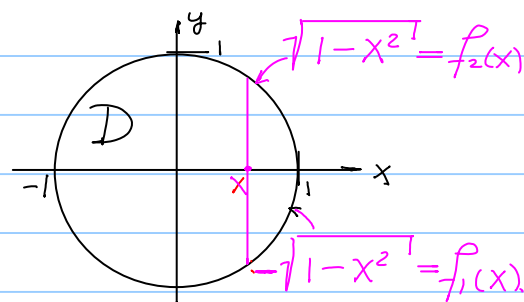
et en coordonnées (notation équivalente)

$$\begin{aligned} \int_D f(x, y) \, dx \, dy &= \int_{\tilde{D}} \underbrace{\tilde{f}(\xi, \eta)}_{= f(G_1(\xi, \eta), G_2(\xi, \eta))} | \det J_G(\xi, \eta) | \, d\xi \, d\eta \end{aligned}$$

Exemple 1

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)^{9999}$$

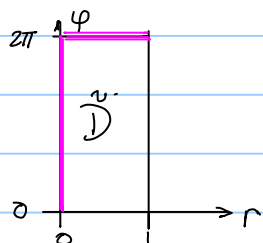


$$\begin{aligned} \int_D f \, d\sigma &= \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \underbrace{(x^2 + y^2)^{9999}}_{\sum_{k=0}^{9999} \binom{9999}{k} (x^2)^k (y^2)^{9999-k}} = \\ &= \text{quelques} \\ &\quad \text{semaines} \\ &\quad \text{plus tard} = \frac{\pi}{10'000} \end{aligned}$$

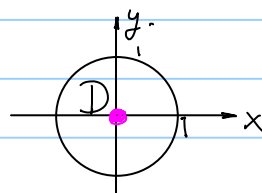
En coordonnées polaires (revoir les chapitres 5.2.5 et 5.3.2.2).

$$x = r \cdot \cos(\varphi) = G_1(r, \varphi)$$

$$y = r \cdot \sin(\varphi) = G_2(r, \varphi), \quad 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$



bijective
 $r > 0$
 $\varphi \in [0, 2\pi[.$



On utilisera $\tilde{D} = [0, 1] \times [0, 2\pi]$ (problèmes au bord seront ignorés)

$$J_G(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r \cdot \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$\det(J_G(r, \varphi)) = r.$$

← apprendre par cœur,
 changement de
 coordonnées en coordonnées
 polaires

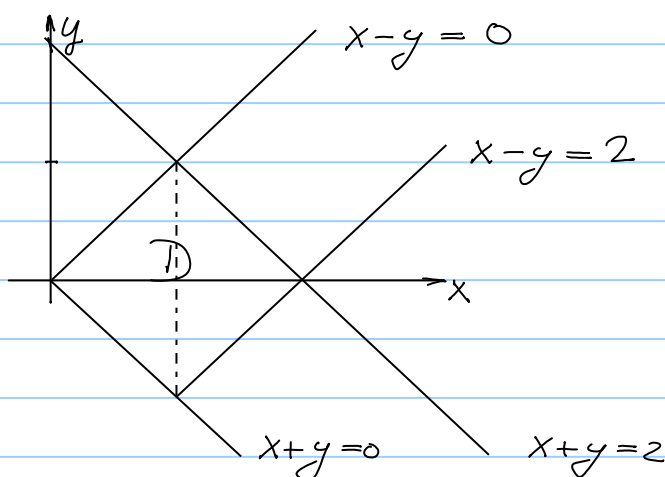
$$\tilde{f}(r, \varphi) = f(r \cdot \cos(\varphi), r \cdot \sin(\varphi)) = (r^2)^{9999} = r^{19998}$$

Donc : $|\det(J_G(r, \varphi))| = \det J_G(r, \varphi)$.

$$I = \int_D \tilde{f}(r, \varphi) \cdot r \, dr d\varphi \underset{\text{Fubini}}{=} \int_0^1 dr \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{=2\pi} \cdot r^{19998} \cdot r$$

$$= 2\pi \int_0^1 dr r^{19999} = 2\pi \left. \frac{r^{20'000}}{20'000} \right|_0^1 = \frac{\pi}{10'000}.$$

De retour à 10.2.6



$$\begin{aligned} \xi &= x - y, & 0 \leq \xi \leq 2 \\ \eta &= x + y, & 0 \leq \eta \leq 2. \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = H(x, y), \quad \det J_H(x, y) = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2.$$

$$I = \int_D f(x, y) \, d\sigma = \int_0^2 d\xi \int_0^2 d\eta \left(f(x, y) \cdot \frac{1}{|\det J_H(x, y)|} \right) \cdot \underset{H^{-1}(\xi, \eta)}{G(\xi, \eta)}$$

$$\xi^2 + \eta^2 = (x - y)^2 + (x + y)^2 = 2(x^2 + y^2) = 2f(x, y)$$

$$I = \int_0^2 d\xi \int_0^2 d\eta \cdot \frac{1}{2} (\xi^2 + \eta^2) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \int_0^2 d\xi \left[\xi^2 \eta + \frac{1}{3} \eta^3 \right]_{\eta=0}^{\eta=2}$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^2 d\xi \left(2\xi^2 + \frac{8}{3} \right) = \frac{1}{4} \left[2 \cdot \frac{\xi^3}{3} + \frac{8}{3} \xi \right]_0^2 = \frac{1}{4} \left(2 \cdot \frac{8}{3} + \frac{8}{3} \cdot 2 \right)$$

$$= \frac{8}{3}$$

10.3. Intégrales multiples

10.3.1. Définitions et propriétés

Les idées des chapitres précédents se généralisent sans problèmes à des intégrales sur des domaines dans $\mathbb{R}^n$.

Notations

$$\iiint_{\mathcal{D}} f(x,y,z) \, dx \, dy \, dz \quad , \quad \int_{\mathcal{D}} f(x,y,z) \, dx \, dy \, dz$$

$$\int_{\mathcal{D}} f \, dV \quad , \quad \int_{\mathcal{D}} f$$

Remarques

- 1) Les intégrales (triples) satisfont les propriétés de la linéarité, décomposition du domaine et de monotonie (si $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in \mathcal{D}$ alors $\int_{\mathcal{D}} f \, dV \leq \int_{\mathcal{D}} g \, dV$). Voir le cas $n=2$.
- 2) L'intégrale (triple) $\int_{\mathcal{D}} 1 \, dV$ donne le volume de $\mathcal{D}$.

10.3.2. Techniques d'intégration

Comme pour $n=2$ on a le théorème de Fubini qui dit que les intégrales multiples peuvent être évaluées par des intégrales itérées.

Exemple: $\mathcal{D} = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$

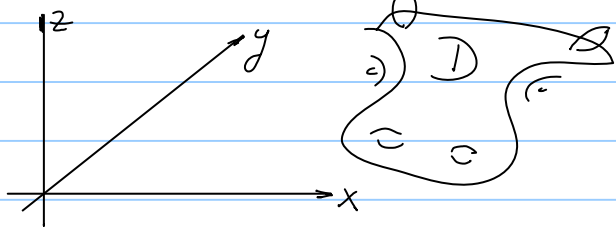
$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\begin{aligned}
I &= \int_D f \, dV = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 dz (x^2 + y^2 + z^2) \\
&= \int_0^1 dx \int_0^1 dy \left[x^2 z + y^2 z + \frac{1}{3} z^3 \right]_{z=0}^{z=1} \\
&= \int_0^1 dx \int_0^1 dy (x^2 + y^2 + \frac{1}{3}) \\
&= \int_0^1 dx \left[x^2 y + \frac{1}{3} y^3 + \frac{1}{3} y \right]_{y=0}^{y=1} \\
&= \int_0^1 dx (x^2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}) = \left[\frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{3} x \right]_0^1 = 1.
\end{aligned}$$

Remarque: $I = \text{"regarder !"} = 3 \cdot 1 \cdot 1 \int_0^1 x^2 dx = 1.$

Remarque: $0 \leq f(x, y, z) \leq 3 \Rightarrow 0 \leq I \leq 3.$

10.3.3. Centre de gravité (barycentre, centre de masse)



$D \subset \mathbb{R}^3$, compact
 $S(x, y, z)$ distribution de masse sur D
 $S: D \rightarrow \mathbb{R}$, continue.

$$I = \int_D S(x, y, z) \, dx \, dy \, dz \quad \text{masse totale}$$

$$I_1 = \int_D x \cdot S(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

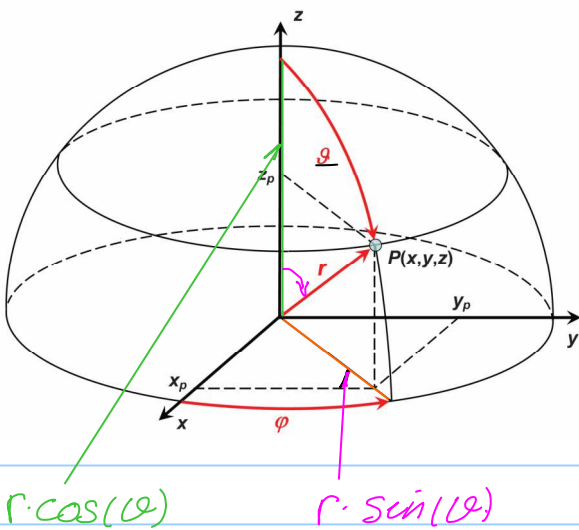
$$I_2 = \int_D y \cdot S(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

$$I_3 = \int_D z \cdot S(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

Le centre de gravité se trouve au point $(\frac{I_1}{I}, \frac{I_2}{I}, \frac{I_3}{I})$.

Remarque: si la distribution de masse est constante (S est une fonction constante) on peut calculer avec $S=1$

10.3.4. Coordonnées sphériques (voir 5.4.7. et série 9)



$$0 \leq \theta \leq \pi$$

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

$$0 \leq r < \infty$$

$$x = r \cdot \sin(\theta) \cos(\varphi)$$

$$y = r \cdot \sin(\theta) \sin(\varphi)$$

$$z = r \cdot \cos(\theta)$$

r, θ, φ les coordonnées sphériques

$$G : [0, \infty[\times [0, \pi] \times [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3 \text{ surjective}$$

$$\underbrace{[0, \infty[\times]0, \pi[\times]0, 2\pi[}_{=: \tilde{D}, \text{ ouvert } \subset \mathbb{R}^3} \xrightarrow{\text{bijective}} \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0\}$$

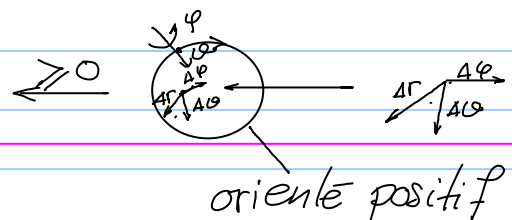
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = G(r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cdot \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ r \cdot \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ r \cdot \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$J_G(r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \sin(\theta) \cos(\varphi) & r \cos(\theta) \cos(\varphi) & -r \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ \sin(\theta) \sin(\varphi) & r \cos(\theta) \sin(\varphi) & r \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ \cos(\theta) & -r \sin(\theta) & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det J_G(r, \theta, \varphi) = \text{"développer la dernière ligne"}$$

$$= r \cdot \sin(\theta) \sin(\theta)^2 \cdot r + \cos(\theta) r^2 \sin(\theta) \cos(\theta)$$

$$= r^2 \cdot \sin(\theta) \geq 0$$



Exemple 1 (volume de la sphère unité)

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

$$f(x, y, z) = 1$$

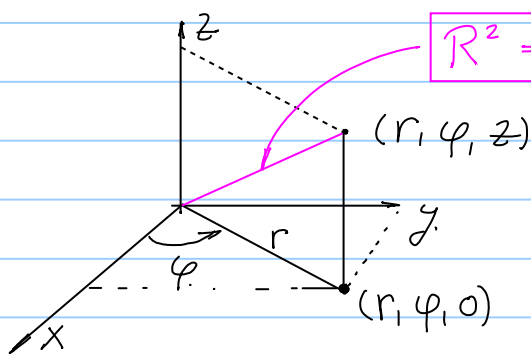
$$|D| = \int_D 1 \, dx \, dy \, dz = \int_{\tilde{D}} \overset{\tilde{f}(r, \vartheta, \varphi)}{1} \underbrace{r^2 \cdot \sin(\vartheta)}_{=\det J_G(r, \vartheta, \varphi)} \, dr \, d\vartheta \, d\varphi \quad (*)$$

$$\tilde{D} = [0, 1] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi]$$

En termes d'intégrales itérées on obtient:

$$\begin{aligned} |D| &= \int_0^1 dr \int_0^\pi d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \, r^2 \cdot \sin(\vartheta) \\ &= 2\pi \int_0^1 dr \, r^2 \underbrace{[-\cos(\vartheta)]_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi}}_{=2} = 4\pi \left[\frac{r^3}{3} \right]_{r=0}^{r=1} = \frac{4\pi}{3}. \end{aligned}$$

10.3.5. Coordonnées cylindriques



$$r \geq 0$$

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

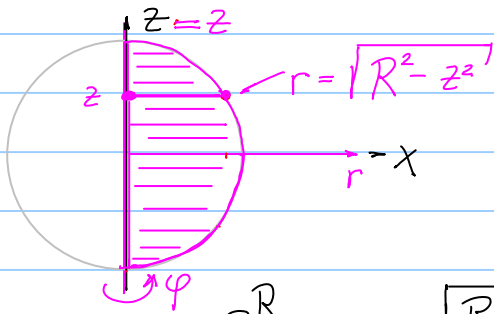
$$z \in \mathbb{R}.$$

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cdot \cos(\varphi) \\ y &= r \cdot \sin(\varphi) \\ z &= z \end{aligned} \right\} =: G(r, \varphi, z)$$

$$J_G(r, \varphi, z) = \left(\begin{array}{cc|c} \cos(\varphi) & -r \sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & r \cos(\varphi) & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\boxed{\det J_G(r, \varphi, z) = r \geq 0} \longleftarrow (r, \varphi, z) \text{ orienté positif}$$

Exemple (volume de la sphère de rayon R)



$$V = \int_{-R}^R dz \int_0^{\sqrt{R^2 - z^2}} dr \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \underset{\substack{\tilde{f}(r, \varphi, z) \\ |\det J_G(r, \varphi, z)|}}{1 \cdot r}$$

$$= 2\pi \cdot \int_{-R}^R dz \left[\frac{1}{2} r^2 \right]_{r=0}^{r=\sqrt{R^2 - z^2}}$$

$$= \pi \int_{-R}^R dz (R^2 - z^2) = 2\pi \int_0^R dz (R^2 - z^2)$$

fonction paire sur domaine symétrique.

$$= 2\pi \left[R^2 z - \frac{1}{3} z^3 \right]_{z=0}^{z=R}$$

$$= 2\pi \left(R^3 - \frac{1}{3} R^3 \right) = \frac{4\pi}{3} R^3.$$

10.3.6. Application du théorème de Fubini

Exemple

$$I = \underbrace{\int_0^1 dz}_{\text{pink}} \underbrace{\int_z^1 dy}_{\text{blue}} \underbrace{\int_y^1 dx}_{\text{green}} e^{x^3}$$

Identification du domaine

$$I = \int_{\mathcal{D}} e^{x^3} dx dy dz$$

$$\text{où } \mathcal{D} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{0 \leq z \leq 1}_{\text{pink}}, \underbrace{z \leq y \leq 1}_{\text{blue}}, \underbrace{y \leq x \leq 1}_{\text{green}}\}. \quad \textcircled{1}$$

Transcription du domaine

①	②	③	④
$0 \leq z \leq 1$	$0 \leq x \leq 1$	$0 \leq x \leq 1$	$0 \leq y \leq 1$
$z \leq y \leq 1$	$0 \leq y \leq x$	$0 \leq z \leq x$	$y \leq x \leq 1$
$y \leq x \leq 1$	$0 \leq z \leq y$	$z \leq y \leq x$	$0 \leq z \leq y$
⑤	⑥		
$0 \leq y \leq 1$	$0 \leq z \leq 1$		
$0 \leq z \leq y$	$z \leq x \leq 1$		
$y \leq x \leq 1$	$z \leq y \leq x$		

$$\textcircled{2} : \mathcal{D} \equiv \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x, 0 \leq z \leq y\}$$

$$\textcircled{3} : \mathcal{D} \equiv \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq x, z \leq y \leq x\}$$

Transcription de l'intégrale (cas ② et ③)

$$I = \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^y dz e^{x^3} \quad \textcircled{2}$$

$$I = \int_0^1 dx \int_0^x dz \int_z^x dy e^{x^3} \quad \textcircled{3}$$

Evaluation des intégrales

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad I &= \int_0^1 dx \int_0^x dy e^{x^3} \cdot y = \int_0^1 dx e^{x^3} \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{y=0}^{y=x} \\ &= \int_0^1 dx e^{x^3} \frac{1}{2} x^2 = \frac{1}{6} \int_0^1 e^{x^3} (3x^2) dx = \frac{1}{6} (e - 1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \quad I &= \int_0^1 dx \int_0^x dz e^{x^3} (x - z) \\ &= \int_0^1 dx e^{x^3} \left[xz - \frac{1}{2} z^2 \right]_{z=0}^{z=x} = \int_0^1 dx e^{x^3} \left(x^2 - \frac{1}{2} x^2 \right) \\ &= \int_0^1 dx e^{x^3} \frac{1}{2} x^2 = \text{voir } \textcircled{2} = \frac{1}{6} (e - 1). \end{aligned}$$