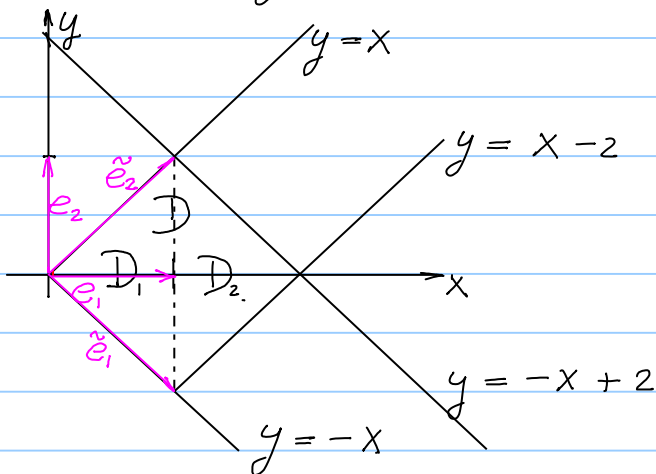


## 10.2.6. Changement de variables / coordonnées : un exemple



$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

$$I = \int_D f \, d\sigma$$

$$I \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{décomposition} \\ \text{du domaine}}}{=} \int_{D_1} f \, d\sigma + \int_{D_2} f \, d\sigma$$

$$\stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{Fubini}}}{=} \int_0^1 dx \int_{-x}^x dy (x^2 + y^2) + \int_1^2 dx \int_{x-2}^{-x+2} dy (x^2 + y^2)$$

$$= 15' \text{ plus tard} = \frac{8}{3}.$$

Plus élégant, changement de coordonnées

$(e_1, e_2) \longrightarrow (\tilde{e}_1, \tilde{e}_2)$  une application linéaire

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det A = 2$$

$\tilde{e}_1 = e_1 + (-1) \cdot e_2$

pour les coordonnées  $(x, y)$  par rapport à  $e_1, e_2$  et  $(\xi, \eta)$  par rapport à  $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2$  on a

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = G(\xi, \eta) \left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \text{par exemple.} \end{array} \right.$$

Explicitement:

$$\begin{cases} x = \xi + \eta \\ y = -\xi + \eta \end{cases}$$

et on trouve pour l'intégrale:

$$I = \int_0^1 d\xi \int_0^1 d\eta \underbrace{\tilde{f}(\xi, \eta) |\det A|}_{= 2}$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\xi, \eta) &= f(x, y) \Big|_{(x, y) = G(\xi, \eta)} = (x^2 + y^2) \Big|_{(x, y) = G(\xi, \eta)} \\ &= (\xi + \eta)^2 + (\xi - \eta)^2 = 2(\xi^2 + \eta^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= 4 \cdot \int_0^1 d\xi \int_0^1 d\eta (\xi^2 + \eta^2) = \frac{8}{3} \\ &= \boxed{2} \cdot \boxed{2} = \frac{2}{3} \leftarrow \text{notre premier exemple} \right. \\ &\quad \left. \text{d'une intégrale double} \right. \end{aligned}$$

### 10.2.7. Changement de variables: le cas général

Théorème soit  $G: \tilde{D} \longrightarrow D$   
 $(\xi, \eta) \longmapsto (x, y) = G(\xi, \eta)$

bijection de classe  $C^1$  (c.-à-d.  $G$ , ainsi que  $H = G^{-1}$  les deux de classe  $C^1$ ). Soit

$$\begin{aligned} (x, y)^T &= G(\xi, \eta) = (G_1(\xi, \eta), G_2(\xi, \eta))^T \\ \det(J_G(\xi, \eta)) &= \det \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial \xi}(\xi, \eta) & \frac{\partial G_1}{\partial \eta}(\xi, \eta) \\ \frac{\partial G_2}{\partial \xi}(\xi, \eta) & \frac{\partial G_2}{\partial \eta}(\xi, \eta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Alors

$$\int_D f \, d\sigma = \int_{\tilde{D}} \tilde{f} |\det J_G| \, d\tilde{\sigma}, \quad \text{où } \tilde{f} = f \circ G,$$

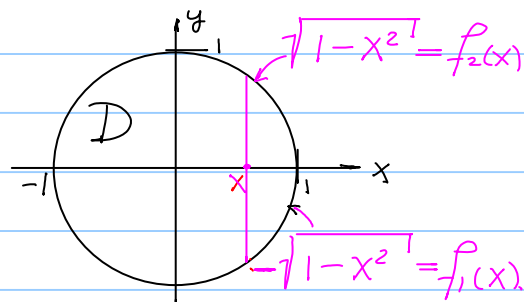
et en coordonnées (notation équivalente)

$$\begin{aligned} \int_D f(x, y) \, dx \, dy &= \int_{\tilde{D}} \underbrace{\tilde{f}(\xi, \eta)}_{= f(G_1(\xi, \eta), G_2(\xi, \eta))} |\det J_G(\xi, \eta)| \, d\xi \, d\eta \end{aligned}$$

## Exemple 1

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)^{9999}$$



$$\int_D f \, d\sigma = \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \underbrace{(x^2 + y^2)^{9999}} =$$

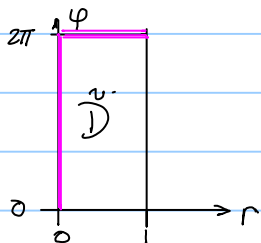
$$= \text{quelques semaines plus tard} = \frac{\pi}{10'000}$$

$$\sum_{k=0}^{9999} \binom{9999}{k} (x^2)^k (y^2)^{9999-k}$$

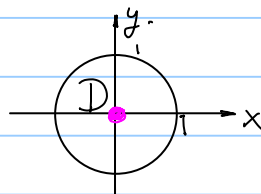
En coordonnées polaires (revoir les chapitres 5.2.5 et 5.3.2.2).

$$x = r \cdot \cos(\varphi) = G_1(r, \varphi)$$

$$y = r \cdot \sin(\varphi) = G_2(r, \varphi), \quad 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$



bijéctive  
 $r > 0$   
 $\varphi \in [0, 2\pi[.$



On utilisera  $\tilde{D} = [0, 1] \times [0, 2\pi]$  (problèmes au bord seront ignorés)

$$J_G(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r \cdot \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$\det(J_G(r, \varphi)) = r.$$

← apprendre par cœur, changement de coordonnées en coordonnées polaires

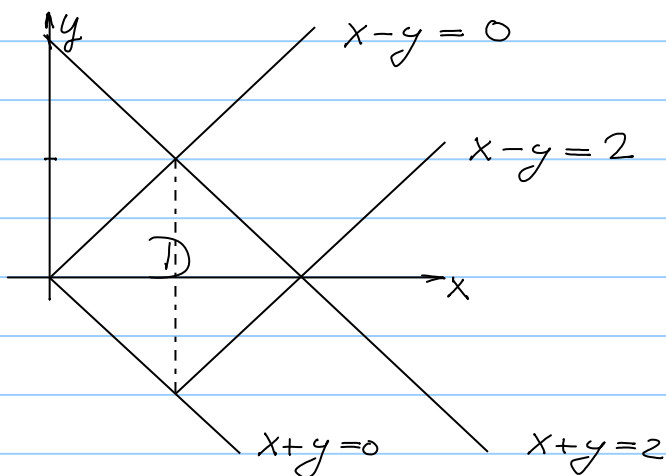
$$\tilde{f}(r, \varphi) = f(r \cdot \cos(\varphi), r \cdot \sin(\varphi)) = (r^2)^{9999} = r^{19998}$$

Donc:  $|\det(J_G(r, \varphi))| = \det J_G(r, \varphi)$ .

$$I = \int_D \tilde{f}(r, \varphi) \cdot r \, dr d\varphi \stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_0^1 dr \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{=2\pi} \cdot r^{19998} \cdot r$$

$$= 2\pi \int_0^1 dr r^{19999} = 2\pi \left. \frac{r^{20'000}}{20'000} \right|_0^1 = \frac{\pi}{10'000}$$

De retour à 10.2.6



$$\begin{aligned} \xi &= x - y, & 0 \leq \xi \leq 2 \\ \eta &= x + y, & 0 \leq \eta \leq 2. \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = H(x, y), \quad \det J_H(x, y) = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2.$$

$$I = \int_D f(x, y) \, d\sigma = \int_0^2 d\xi \int_0^2 d\eta \left( f(x, y) \cdot \left| \frac{1}{\det J_H(x, y)} \right| \right) \cdot G(\xi, \eta)$$

$\uparrow$   
 $H^{-1}(\xi, \eta)$

$$\xi^2 + \eta^2 = (x - y)^2 + (x + y)^2 = 2(x^2 + y^2) = 2f(x, y)$$

$$I = \int_0^2 d\xi \int_0^2 d\eta \cdot \frac{1}{2} (\xi^2 + \eta^2) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \int_0^2 d\xi \left[ \xi^2 \eta + \frac{1}{3} \eta^3 \right]_{\eta=0}^{\eta=2}$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^2 d\xi \left( 2\xi^2 + \frac{8}{3} \right) = \frac{1}{4} \left[ 2 \cdot \frac{\xi^3}{3} + \frac{8}{3} \xi \right]_0^2 = \frac{1}{4} \left( 2 \cdot \frac{8}{3} + \frac{8}{3} \cdot 2 \right)$$

$$= \frac{8}{3}$$

## 10.3. Intégrales multiples

### 10.3.1. Définitions et propriétés

Les idées des chapitres précédents se généralisent sans problèmes à des intégrales sur des domaines dans  $\mathbb{R}^n$ .

#### Notations

$$\iiint_{\mathbb{D}} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz, \quad \int_{\mathbb{D}} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

$$\int_{\mathbb{D}} f \, dV, \quad \int_{\mathbb{D}} f$$

#### Remarques

- 1) Les intégrales (triples) satisfont les propriétés de la linéarité, décomposition du domaine et de monotonie (si  $f(x) \leq g(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{D}$  alors  $\int_{\mathbb{D}} f \, dV \leq \int_{\mathbb{D}} g \, dV$ ). Voir le cas  $n=2$ .
- 2) L'intégrale (triple)  $\int_{\mathbb{D}} 1 \, dV$  donne le volume de  $\mathbb{D}$ .

### 10.3.2. Techniques d'intégration

Comme pour  $n=2$  on a le théorème de Fubini qui dit que les intégrales multiples peuvent être évaluées par des intégrales itérées.

Exemple:  $\mathbb{D} = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$

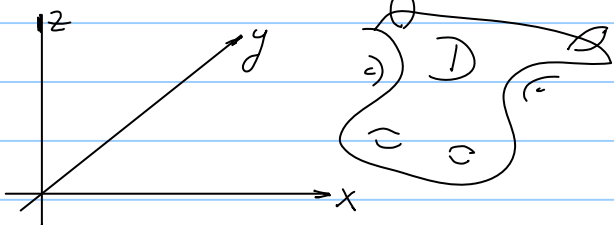
$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\begin{aligned}
I &= \int_D f \, dV = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 dz (x^2 + y^2 + z^2) \\
&= \int_0^1 dx \int_0^1 dy \left[ x^2 z + y^2 z + \frac{1}{3} z^3 \right]_{z=0}^{z=1} \\
&= \int_0^1 dx \int_0^1 dy \left( x^2 + y^2 + \frac{1}{3} \right) \\
&= \int_0^1 dx \left[ x^2 y + \frac{1}{3} y^3 + \frac{1}{3} y \right]_{y=0}^{y=1} \\
&= \int_0^1 dx \left( x^2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) = \left[ \frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{3} x \right]_0^1 = 1.
\end{aligned}$$

Remarque:  $I = \text{"regarder !"} = 3 \cdot 1 \cdot 1 \int_0^1 x^2 dx = 1.$

Remarque:  $0 \leq f(x, y, z) \leq 3 \Rightarrow 0 \leq I \leq 3.$

### 10.3.3. Centre de gravité (barycentre, centre de masse)



$D \subset \mathbb{R}^3$ , compact  
 $S(x, y, z)$  distribution de masse sur  $D$   
 $S: D \rightarrow \mathbb{R}$ , continue.

$$I = \int_D S(x, y, z) \, dx \, dy \, dz \quad \text{masse totale}$$

$$I_1 = \int_D x \cdot S(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

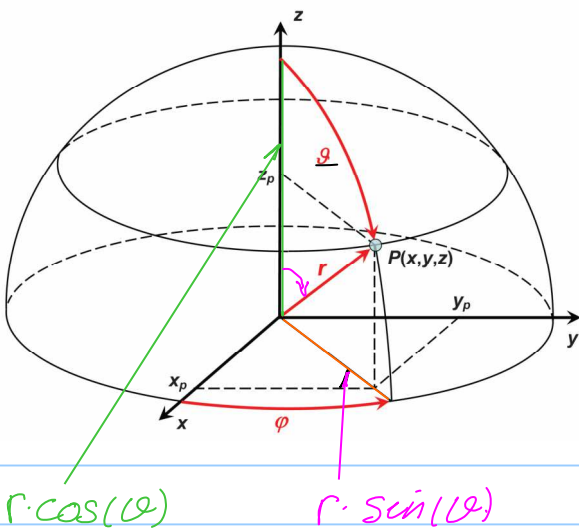
$$I_2 = \int_D y \cdot S(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

$$I_3 = \int_D z \cdot S(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

Le centre de gravité se trouve au point  $\left( \frac{I_1}{I}, \frac{I_2}{I}, \frac{I_3}{I} \right).$

Remarque: si la distribution de masse est constante ( $S$  est une fonction constante) on peut calculer avec  $S=1$

### 10.3.4. Coordonnées sphériques (voir 5.4.7. et série 9)



$$0 \leq \vartheta \leq \pi$$

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

$$0 \leq r < \infty$$

$$x = r \cdot \sin(\vartheta) \cos(\varphi)$$

$$y = r \cdot \sin(\vartheta) \sin(\varphi)$$

$$z = r \cdot \cos(\vartheta)$$

$r, \vartheta, \varphi$  les coordonnées sphériques

$$G : [0, \infty[ \times [0, \pi] \times [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3 \text{ surjective}$$

$$\underbrace{[0, \infty[ \times ]0, \pi[ \times ]0, 2\pi[}_{=: \tilde{D}, \text{ ouvert } \subset \mathbb{R}^3} \xrightarrow{\text{bijective}} \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0\}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = G(r, \vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cdot \sin(\vartheta) \cos(\varphi) \\ r \cdot \sin(\vartheta) \sin(\varphi) \\ r \cdot \cos(\vartheta) \end{pmatrix}$$

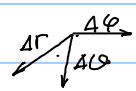
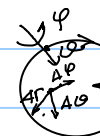
$$J_G(r, \vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} \sin(\vartheta) \cos(\varphi) & r \cos(\vartheta) \cos(\varphi) & -r \sin(\vartheta) \sin(\varphi) \\ \sin(\vartheta) \sin(\varphi) & r \cos(\vartheta) \sin(\varphi) & r \sin(\vartheta) \cos(\varphi) \\ \cos(\vartheta) & -r \sin(\vartheta) & 0 \end{pmatrix}$$

$\det J_G(r, \vartheta, \varphi) =$  "développer la dernière ligne"

$$= r \cdot \sin(\vartheta) \sin(\vartheta)^2 \cdot r + \cos(\vartheta) r^2 \sin(\vartheta) \cos(\vartheta)$$

$$= r^2 \cdot \sin(\vartheta) \geq 0$$

$\geq 0$



orienté positif

## Exemple 1 (volume de la sphère unité)

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

$$f(x, y, z) = 1$$

$$|D| = \int_D 1 \, dx \, dy \, dz = \int_{\tilde{D}} \underbrace{1}_{f(r, \vartheta, \varphi)} \underbrace{r^2 \cdot \sin(\vartheta)}_{= \det J_G(r, \vartheta, \varphi)} \, dr \, d\vartheta \, d\varphi \quad (*)$$

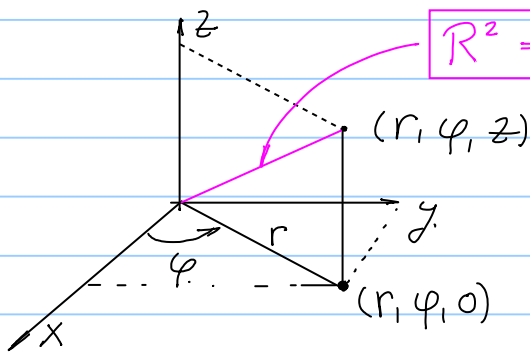
$$\tilde{D} = [0, 1] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi]$$

En termes d'intégrales itérées on obtient:

$$|D| = \int_0^1 dr \int_0^\pi d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \, r^2 \cdot \sin(\vartheta)$$

$$= 2\pi \int_0^1 dr \, r^2 \underbrace{[-\cos(\vartheta)]_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi}}_{=2} = 4\pi \left[ \frac{r^3}{3} \right]_{r=0}^{r=1} = \frac{4\pi}{3}$$

## 10.3.5. Coordonnées cylindriques



$$R^2 = r^2 + z^2$$

$$r \geq 0$$

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

$$z \in \mathbb{R}$$

$$x = r \cdot \cos(\varphi)$$

$$y = r \cdot \sin(\varphi)$$

$$z = z$$

$$\left. \begin{array}{l} x = r \cdot \cos(\varphi) \\ y = r \cdot \sin(\varphi) \\ z = z \end{array} \right\} =: G(r, \varphi, z)$$

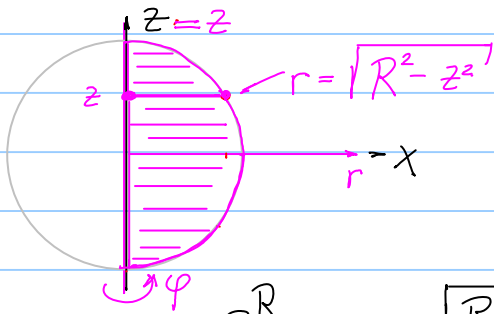
$$J_G(r, \varphi, z) = \left( \begin{array}{cc|c} \cos(\varphi) & -r \sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & r \cos(\varphi) & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\det J_G(r, \varphi, z) = r \geq 0$$

← (r, phi, z) orienté positif



## Exemple (volume de la sphère de rayon R)



$$V = \int_{-R}^R dz \int_0^{\sqrt{R^2 - z^2}} dr \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \overset{\tilde{f}(r, \varphi, z)}{1 \cdot r}$$

$|\det J_G(r, \varphi, z)|$

$$= 2\pi \cdot \int_{-R}^R dz \left[ \frac{1}{2} r^2 \right]_{r=0}^{r=\sqrt{R^2 - z^2}}$$

$$= \pi \int_{-R}^R dz (R^2 - z^2) = 2\pi \int_0^R dz (R^2 - z^2)$$

fonction paire sur  
domaine symétrique.

$$= 2\pi \left[ R^2 z - \frac{1}{3} z^3 \right]_{z=0}^{z=R}$$

$$= 2\pi \left( R^3 - \frac{1}{3} R^3 \right) = \frac{4\pi}{3} R^3.$$

## 10.3.6. Application du théorème de Fubini

### Exemple

$$I = \int_0^1 dz \int_z^1 dy \int_y^1 dx e^{x^3}$$

### Identification du domaine

$$I = \int_{\mathcal{D}} e^{x^3} dx dy dz$$

$$\text{où } \mathcal{D} = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \underline{0 \leq z \leq 1}, \underline{z \leq y \leq 1}, \underline{y \leq x \leq 1} \}. \quad \textcircled{1}$$