Peter Wittwer

Analyse avancée II – Corrigé de la Série 13A

Échauffement.

$i)$ Intégrer d'abord par rapport à x correspond à l'intégrale donnée. On obtient

$$\int_0^1 \left(\int_0^2 \left(x^3 - y^{1/3}\right) dx\right) dy = \int_0^1 \left[\frac{1}{4}x^4 - y^{1/3}\, x\right]_{x=0}^{x=2} dy = \int_0^1 \left(4 - 2y^{1/3}\right) dy$$
$$= \left[4y - \frac{3}{2}y^{4/3}\right]_{y=0}^{y=1} = 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}\,.$$

$ii)$ En inversant l'ordre d'intégration on a

$$\int_0^2 \left(\int_0^1 \left(x^3 - y^{1/3}\right) dy\right) dx = \int_0^2 \left[x^3 y - \frac{3}{4}y^{4/3}\right]_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^2 \left(x^3 - \frac{3}{4}\right) dx$$
$$= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{4}x\right]_{x=0}^{x=2} = 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}\,.$$

Les résultats sont les mêmes puisque la fonction qu'on intègre est continue.

Exercice 1.

$i)$ Le domaine d'intégration est représenté à la Fig. 1. On a

$$\int_{-1}^2 \left(\int_0^1 \cos(x+y)\, dx\right) dy = \int_{-1}^2 \Big[\sin(x+y)\Big]_{x=0}^{x=1} dy = \int_{-1}^2 \big(\sin(1+y) - \sin(y)\big) dy$$
$$= \Big[-\cos(1+y) + \cos(y)\Big]_{-1}^2 = 1 - \cos(1) + \cos(2) - \cos(3)\,.$$

$ii)$ Le domaine d'intégration est représenté à la Fig. 2. On a

$$\int_0^1 \left(\int_x^{2x} e^{x+y}\, dy\right) dx = \int_0^1 \Big[e^{x+y}\Big]_{y=x}^{y=2x} dx = \int_0^1 \left(e^{3x} - e^{2x}\right) dx = \left[\frac{1}{3}\, e^{3x}\right]_{x=0}^{x=1} - \left[\frac{1}{2}\, e^{2x}\right]_{x=0}^{x=1}$$
$$= \frac{1}{3}\left(e^3 - 1\right) - \frac{1}{2}\left(e^2 - 1\right) = \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{6}\,.$$

Exercice 2.

$i)$ Le domaine D est représenté à la Fig. 3. On a

$$\int_D \sqrt{x+y}\, dx\, dy = \int_0^1 \left(\int_0^2 \sqrt{x+y}\, dx\right) dy = \int_0^1 \left[\frac{2}{3}(x+y)^{3/2}\right]_{x=0}^{x=2} dy$$
$$= \int_0^1 \frac{2}{3}\left((2+y)^{3/2} - y^{3/2}\right) dy = \left[\frac{4}{15}\left((2+y)^{5/2} - y^{5/2}\right)\right]_0^1$$
$$= \frac{4}{15}\left(9\sqrt{3} - 4\sqrt{2} - 1\right).$$

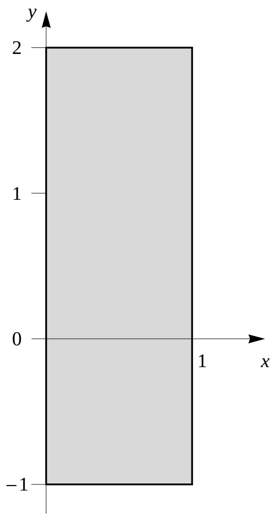

Fig. 1

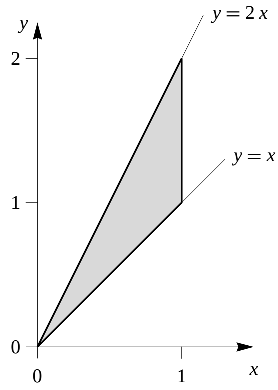

Fig. 2

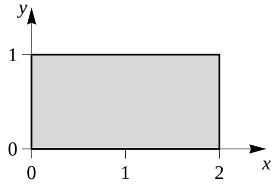

Fig. 3

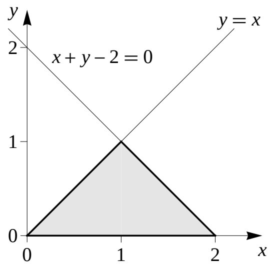

Fig. 4

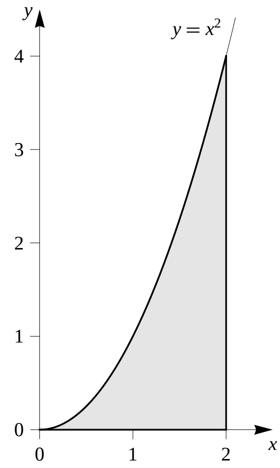

Fig. 5

ii) Le domaine D est représenté à la Fig. 5 ci-dessus. On a

$$\int_D x^2 y\,dx\,dy = \int_0^2 \left(\int_0^{x^2} x^2 y\right) dy\,dx = \int_0^2 \left[\frac{1}{2}x^2y^2\right]_{y=0}^{y=x^2} dx = \int_0^2 \frac{1}{2}x^6\,dx = \left[\frac{1}{14}x^7\right]_0^2 = \frac{64}{7}\,.$$

iii) Le domaine D est représenté à la Fig. 4 ci-dessus. Observons que $x-y \geq 0$ et $x+y-2 \leq 0$ sur D. Ainsi $(x-y)(x+y-2) \leq 0$ et donc $f(x,y) = -(x-y)(x+y-2) = -(x^2-2x-y^2+2y)$. On a

$$\begin{aligned}
\int_D f(x,y)\,dx\,dy &= -\int_0^1 \left(\int_0^x (x^2-2x-y^2+2y)\,dy\right) dx - \int_1^2\int_0^{2-x} (x^2-2x-y^2+2y)\,dy\,dx \\
&= -\int_0^1 \left[(x^2-2x)y - \frac{1}{3}y^3 + y^2\right]_{y=0}^{y=x} dx \\
&\quad - \int_1^2 \left[(x^2-2x)y - \frac{1}{3}y^3 + y^2\right]_{y=0}^{y=2-x} dx \\
&\overset{*}{=} -\int_0^1 \left(\frac{2}{3}x^3 - x^2\right) dx - \int_1^2 \left(\frac{2}{3}(2-x)^3 - (2-x)^2\right) dx \\
&= -\left[\frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 + \left[\frac{1}{6}(2-x)^4 - \frac{1}{3}(2-x)^3\right]_1^2 \\
&= -\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}\,.
\end{aligned}$$

Pour l'étape * on a récrit le premier terme dans la deuxième intégrale comme

$$(x^2-2x)(2-x) = -x(2-x)^2 = \big((2-x)-2\big)(2-x)^2 = (2-x)^3 - 2(2-x)^2$$

pour arriver à

$$(x^2-2x)(2-x) - \frac{1}{3}(2-x)^3 + (2-x)^2 = \frac{2}{3}(2-x)^3 - (2-x)^2$$

et ainsi éviter de développer tous les polynômes.

Exercice 3.

i) En respectant l'ordre d'intégration donné, on doit trouver une primitive de la fonction $e^{(x^2)}$ par rapport à x, ce qui est impossible. Il faut donc inverser l'ordre d'intégration et reparamétriser le domaine D qui est représenté à la Fig. 6 ci-dessous.
Dans l'ordre donné, on parcourt D du bas en haut selon des lignes horizontales. Inverser l'ordre d'intégration revient à parcourir D de gauche à droite en selon des lignes verticales. Ainsi x varie entre 0 et 1 et y varie entre 0 et x. On a

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(\int_y^1 e^{(x^2)}\,dx\right)dy = \int_0^1 \left(\int_0^x e^{(x^2)}\,dy\right)dx &= \int_0^1 \Big[ye^{(x^2)}\Big]_{y=0}^{y=x}\,dx \\ &= \int_0^1 xe^{(x^2)}\,dx = \left[\frac{1}{2}e^{(x^2)}\right]_0^1 = \frac{e-1}{2}\,.\end{aligned}$$

ii) On doit de nouveau inverser l'ordre d'intégration pour pouvoir calculer cette intégrale. Il faut donc parcourir le domaine D (cf. Fig. 7) de gauche à droite selon des lignes verticales, c'est-à-dire laisser varier x entre 0 et 1 et y entre 0 et x^3.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(\int_{\sqrt[3]{y}}^1 \sqrt{1+x^4}\,dx\right)dy = \int_0^1 \left(\int_0^{x^3} \sqrt{1+x^4}\,dy\right)dx = \int_0^1 \Big[y\sqrt{1+x^4}\Big]_{y=0}^{y=x^3}\,dx &= \int_0^1 x^3\sqrt{1+x^4}\,dx \\ = \int_0^1 \frac{1}{4}4x^3(1+x^4)^{1/2}\,dx = \left[\frac{1}{6}\left(1+x^4\right)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{1}{6}\left(2\sqrt{2}-1\right)\end{aligned}$$

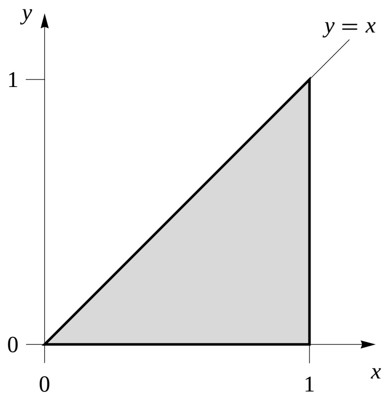

Fig. 6

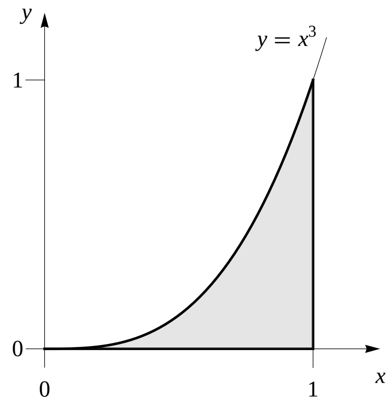

Fig. 7

Exercice 4.

Les points du domaine D satisfont

$$-\sqrt{x} \le y \le \sqrt{x} \qquad \text{et} \qquad x-6 \le y \le x\,;$$

on a donc les inégalités

$$\max\big(-\sqrt{x}, x-6\big) \le y \le \min\big(\sqrt{x}, x\big) \qquad \text{et} \qquad x-6 \le \sqrt{x}\,.$$

On fait les calculs :

$$x-6 \le -\sqrt{x} \quad \Leftrightarrow \quad (\sqrt{x})^2+\sqrt{x}-6 \le 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3) \le 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 \le \sqrt{x} \le 2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \le x \le 4\,,$$

$$x \le \sqrt{x} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x}(\sqrt{x}-1) \le 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \le \sqrt{x} \le 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \le x \le 1\,,$$

$$x - 6 \le \sqrt{x} \quad \Leftrightarrow \quad (\sqrt{x})^2 - \sqrt{x} - 6 \le 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-3) \le 0$$
$$\Leftrightarrow \quad 0 \le \sqrt{x} \le 3 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \le x \le 9\,.$$

Pour $0 \le x \le 9$ on a donc

$$\min\left(\sqrt{x}, x\right) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ \sqrt{x} & \text{si } x > 1 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \max\left(-\sqrt{x}, x-6\right) = \begin{cases} -\sqrt{x} & \text{si } 0 \le x \le 4 \\ x-6 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

c'est-à-dire D est le domaine représenté à la Fig. 8. (*Remarque:* On peut aussi arriver à ces résultats en traçant les graphes, et puis chercher les points d'intersection nécessaires.)

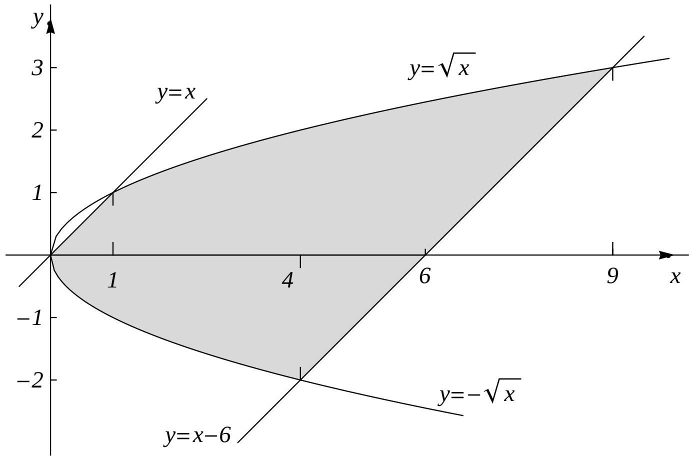

Fig. 8

On peut décomposer le domaine D en trois sous-domaines en coupant selon les droites verticales $x = 1$ et $x = 4$. L'aire de D est alors

$$\begin{aligned}
\int_D dx\,dy &= \int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{x}}^{x} dy\right) dx + \int_1^4 \left(\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} dy\right) dx + \int_4^9 \left(\int_{x-6}^{\sqrt{x}} dy\right) dx \\
&= \int_0^1 \left(x + \sqrt{x}\right) dx + \int_1^4 2\sqrt{x}\,dx + \int_4^9 \left(\sqrt{x} - x + 6\right) dx \\
&= \left[\frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^1 + \left[\frac{4}{3}x^{3/2}\right]_1^4 + \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{2}x^2 + 6x\right]_4^9 \\
&= \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{32}{3} - \frac{4}{3}\right) + \left(\frac{54}{3} - \frac{81}{2} + 54\right) - \left(\frac{16}{3} - 8 + 24\right) = \frac{62}{3}\,.
\end{aligned}$$

Exercice 5.

i) On pose le changement de variables $(x, y) = G(u, v)$. L'intégrale de f sur D est alors (cf. cours)

$$\int_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\widetilde{D}} f\big(G_1(u,v), G_2(u,v)\big)\,\big|\det\big(J_G(u,v)\big)\big|\,du\,dv\,,$$

où

$$J_G(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial u} & \frac{\partial G_1}{\partial v} \\ \frac{\partial G_2}{\partial u} & \frac{\partial G_2}{\partial v} \end{pmatrix}$$

est la matrice Jacobienne de G.

ii) Pour les coordonnées polaires on a

$$G(r,\theta) = \big(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)\big)\,,$$

avec $(r,\varphi) \in \mathbb{R}_+^* \times [0,2\pi[$. La matrice Jacobienne est

$$J_G(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) \end{pmatrix},$$

d'où le Jacobien $\det\big(J_G(r,\varphi)\big) = r\cos(\varphi)^2 + r\sin(\varphi)^2 = r\,.$

Comme $H = G^{-1}$, la matrice $J_H(x,y)$ et l'inverse de la matrice $J_G(r,\varphi)$ mais évaluée en $(r,\varphi) = \big(H_1(x,y), H_2(x,y)\big)$. La relation entre les deux Jacobiens est donc

$$\det\big(J_H(x,y)\big) = \left[\frac{1}{\det\big(J_G(r,\varphi)\big)}\right]_{(r,\varphi)=H(x,y)} = \left[\frac{1}{r}\right]_{r=\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,,$$

où on a utilisé que $H_1(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ pour les coordonnées polaires.

iii) On utilise les coordonnées polaires sur le domaine $]0,R] \times [0,2\pi[$. Ainsi l'aire du cercle est

$$\text{aire}(D_R) = \int_{D_R} dx\,dy = \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} r\,d\varphi\right) dr = 2\pi\int_0^R r\,dr = 2\pi\left[\frac{1}{2}r^2\right]_0^R = \pi R^2\,.$$

Exercice 6.

Les équations des droites délimitant le parallélogramme D sont données à la Fig. 9.

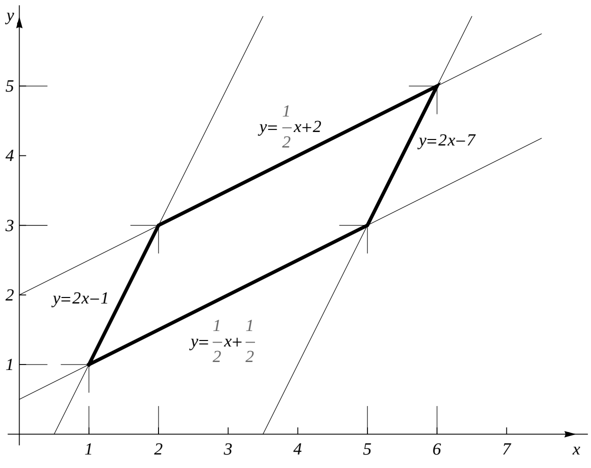

Fig. 9

On décompose le domaine en trois sous-domaines en coupant selon les droites verticales $x = 2$ et $x = 5$. Ainsi l'aire du parallélogramme est

$$\begin{aligned}
\int_D dx\,dy &= \int_1^2 \left(\int_{\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}^{2x-1} dy \right) dx + \int_2^5 \left(\int_{\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}x+2} dy \right) dx + \int_5^6 \left(\int_{2x-7}^{\frac{1}{2}x+2} dy \right) dx \\
&= \int_1^2 \left(\frac{3}{2}x - \frac{3}{2} \right) dx + \int_2^5 \frac{3}{2}\, dx + \int_5^6 \left(-\frac{3}{2}x + 9 \right) dx \\
&= \frac{3}{2} \left(\left[\frac{1}{2}x^2 - x \right]_1^2 + \Big[x \Big]_2^5 + \left[-\frac{1}{2}x^2 + 6x \right]_5^6 \right) = \frac{3}{2} \cdot 4 = 6\,.
\end{aligned}$$

Pour calculer l'aire de D par un changement de variable, il est utile de ré-exprimer les équations des droites comme suit : $2x - y = 1$, $2x - y = 7$ et $x - 2y = -1$, $x - 2y = -4$. On définit alors une application H telle que $(u, v) = H(x, y)$ avec

$$\begin{cases} u = 2x - y = H_1(x, y) \\ v = x - 2y = H_2(x, y) \end{cases}$$

et on voit que l'image de D par H est $\widetilde{D} = [1, 7] \times [-4, -1]$, c'est-à-dire $H\colon D \to \widetilde{D}$.
Le matrice Jacobienne de H et son Jacobien sont

$$J_H(x, y) = \begin{pmatrix} \partial_x H_1(x, y) & \partial_y H_1(x, y) \\ \partial_x H_2(x, y) & \partial_y H_2(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \det\big(J_H(x, y)\big) = -3\,.$$

Soit $G = H^{-1}\colon \widetilde{D} \to D$ la transformation inverse telle que $(x, y) = G(u, v)$. Le Jacobien de G se calcule à partir de $J_H(x, y)$:

$$\det\big(J_G(u, v)\big) = \left[\frac{1}{\det\big(J_H(x, y)\big)} \right]_{(x,y)=G(u,v)} = -\frac{1}{3}\,.$$

L'aire du parallélogramme est alors

$$\int_D dx\,dy = \int_{\widetilde{D}} \big|\det\big(J_G(u, v)\big)\big|\, du\,dv = \int_1^7 \left(\int_{-4}^{-1} \frac{1}{3}\, du \right) dv = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 6 = 6\,.$$

Le résultat est évidemment le même qu'avant. Mais on a vu qu'il est plus rapide d'utiliser un changement de variables adéquat.

Exercice 7.

i) Le domaine D est représenté à la Fig. 10. Pour le changement de variables, on définit l'application $H\colon D \to \widetilde{D}$ telle que $(u, v) = H(x, y)$ avec

$$\begin{cases} u = x^2 + y^2 = H_1(x, y) \\ v = x^2 - y^2 = H_2(x, y) \end{cases}$$

Il suit de la définition de D que $\widetilde{D} = [5, 9] \times [1, 4]$. La matrice Jacobienne de H est

$$J_H(x, y) = \begin{pmatrix} \partial_x H_1(x, y) & \partial_y H_1(x, y) \\ \partial_x H_2(x, y) & \partial_y H_2(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2x & -2y \end{pmatrix}$$

et son Jacobien est $\det\big(J_H(x,y)\big) = -8xy$.
Soit $G = H^{-1}\colon \widetilde{D} \to D$ la transformation inverse telle que $(x,y) = G(u,v)$. Pour calculer l'intégrale, on a besoin du Jacobien de G qui est

$$\det\big(J_G(u,v)\big) = \left[\frac{1}{\det\big(J_H(x,y)\big)}\right]_{(x,y)=G(u,v)} = \left[-\frac{1}{8xy}\right]_{(x,y)=G(u,v)}$$

Comme $xy \neq 0$ sur D, le jacobien de G est bien définie. L'intégrale est donc

$$\begin{aligned}\int_D x^3y^3\,dx\,dy &= \int_{\widetilde{D}} \Big[x^3y^3\Big]_{(x,y)=G(u,v)} \cdot \left|\det\left(J_G(u,v)\right)\right|\,du\,dv\\ &= \int_{\widetilde{D}} \left[x^3y^3\cdot\frac{1}{8xy}\right]_{(x,y)=G(u,v)} du\,dv = \frac{1}{8}\int_{\widetilde{D}}\Big[x^2y^2\Big]_{(x,y)=G(u,v)} du\,dv.\end{aligned}$$

Pour exprimer x et y en fonction de u et v, observons que $2x^2 = u+v$ et $2y^2 = u-v$. Ainsi

$$x^2y^2 = \frac{1}{4}(u+v)(u-v) = \frac{1}{4}(u^2-v^2)$$

et l'intégrale devient

$$\begin{aligned}\int_D x^3y^3\,dx\,dy &= \frac{1}{32}\int_1^4\left(\int_5^9 (u^2-v^2)\,du\right)dv = \frac{1}{32}\int_1^4\left[\frac{1}{3}u^3 - uv^2\right]_{u=5}^{u=9} dv\\ &= \frac{1}{32}\int_1^4\left(\frac{9^3-5^3}{3} - 4v^2\right)dv = \frac{1}{24}\int_1^4 (151-3v^2)\,dv\\ &= \frac{1}{24}\Big[151v - v^3\Big]_1^4 = \frac{390}{24} = \frac{65}{4}.\end{aligned}$$

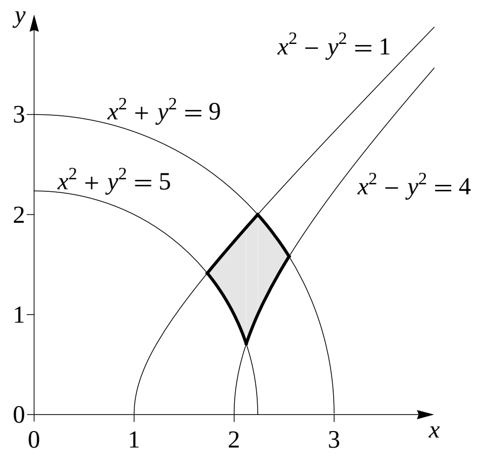

Fig. 10

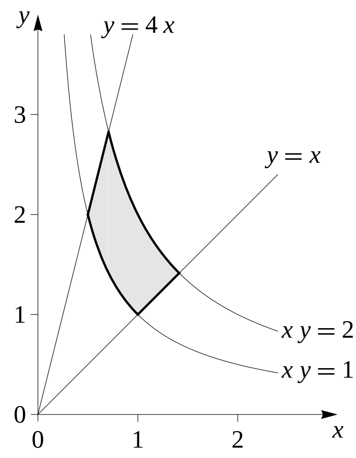

Fig. 11

ii) Le domaine D se trouve dans le premier quadrant (car $x, y \geq 0$) et est délimité d'une part par les droites $y = x$ et $y = 4x$ et d'autre part par les courbes $xy = 1$ et $xy = 2$ (cf. Fig. 11).
Pour calculer l'intégrale on définit le changement de variable $H\colon D \to \widetilde{D}$, où $(u,v) = H(x,y)$ avec

$$\begin{cases} u = xy = H_1(x,y)\\ v = \frac{y}{x} = H_2(x,y)\end{cases}$$

et, par définition de D, $\widetilde{D} = [1,2] \times [1,4]$. La matrice Jacobienne de H est

$$J_H(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_x H_1(x,y) & \partial_y H_1(x,y) \\ \partial_x H_2(x,y) & \partial_y H_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{pmatrix}$$

et son Jacobien est $\det\big(J_H(x,y)\big) = 2\frac{y}{x}$ qui est bien défini sur D car $x \neq 0$.
Soit $G = H^{-1} \colon \widetilde{D} \to D$ la transformation inverse telle que $(x,y) = G(u,v)$. Le Jacobien de G est alors

$$\det\big(J_G(u,v)\big) = \left[\frac{1}{\det\big(J_H(x,y)\big)}\right]_{(x,y)=G(u,v)} = \left[\frac{x}{2y}\right]_{(x,y)=G(u,v)} = \frac{1}{2v}$$

car $v = \frac{y}{x}$. Comme $v > 0$ sur $\widetilde{D}$, ce Jacobien est bien défini. Ainsi

$$\begin{aligned}\int_D x^2y^2\,dx\,dy &= \int_1^4 \left(\int_1^2 \frac{u^2}{2v}\,du\right) dv = \int_1^4 \frac{1}{2v}\left[\frac{1}{3}u^3\right]_{u=1}^{u=2} dv = \int_1^4 \frac{7}{6}\frac{1}{v}\,dv \\ &= \frac{7}{6}\Big[\ln(v)\Big]_1^4 = \frac{7}{6}\ln(4) = \frac{7}{3}\ln(2)\,.\end{aligned}$$

Exercice 8.

On introduit des nouvelles coordonnées par l'application $H \colon D \to \widetilde{D}$ telle que $(u,v) = H(x,y)$ avec

$$\begin{cases} u = x^2 + y^2 \\ v = x^2 - y^2 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \widetilde{D} = [3,4] \times [1,2]\,.$$

La matrice Jacobienne de H est

$$J_H(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2x & -2y \end{pmatrix},$$

et son Jacobien est $\det(J_H(x,y)) = -8xy$. Soit l'application inverse $G = H^{-1}$. On a

$$\big|\det\big(J_G(u,v)\big)\big| = \left[\frac{1}{\big|\det\big(J_H(x,y)\big)\big|}\right]_{(x,y)=G(u,v)} = \left[\frac{1}{8xy}\right]_{(x,y)=G(u,v)}.$$

Comme $xy > 0$ pour $(x,y) \in D$, le jacobien de G est bien défini.
Dans les nouvelles coordonnées on a

$$\begin{aligned} I = \int_D (x^5y + y^5x)\,dx\,dy &= \int_{\widetilde{D}} \Big[\big(x^5y + y^5x\big)\Big]_{(x,y)=G(u,v)} \cdot \big|\det\big(J_G(u,v)\big)\big|\,du\,dv \\ &= \int_{\widetilde{D}} \left[\big(x^5y + y^5x\big) \cdot \frac{1}{8xy}\right]_{(x,y)=G(u,v)} du\,dv \\ &= \frac{1}{8}\int_{\widetilde{D}} \left[x^4 + y^4\right]_{(x,y)=G(u,v)} du\,dv \end{aligned}$$

On a $u^2 = (x^2+y^2)^2 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4$ et $v^2 = (x^2-y^2)^2 = x^4 - 2x^2y^2 + y^4$ et donc

$$x^4 + y^4 = \frac{1}{2}\left(u^2 + v^2\right)\,.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{16}\int_1^2 \left(\int_3^4 \left(u^2+v^2\right) du\right) dv = \frac{1}{16}\int_1^2 \left[\frac{1}{3}u^3 + uv^2\right]_{u=3}^{u=4} dv = \frac{1}{16}\int_1^2 \left(\frac{4^3-3^3}{3} + v^2\right) dv \\ &= \frac{1}{48}\Big[37v + v^3\Big]_1^2 = \frac{11}{12}\,. \end{aligned}$$