

Analyse avancée II – Série 13A

Échauffement. (Intégration sur un rectangle)

Calculer l'intégrale $\int_0^1 \left(\int_0^2 (x^3 - y^{1/3}) dx \right) dy$ en intégrant d'abord

i) par rapport à x ,

ii) par rapport à y .

Comparer les résultats.

Exercice 1. (Calcul d'intégrales)

Calculer les intégrales suivantes et esquisser leur domaine d'intégration :

i) $\int_{-1}^2 \left(\int_0^1 \cos(x+y) dx \right) dy$

ii) $\int_0^1 \left(\int_x^{2x} e^{x+y} dy \right) dx$

Exercice 2. (Intégration sur un domaine)

Calculer l'intégrale (double) $\int_D f(x,y) dx dy$ et esquisser le domaine d'intégration D si

i) $f(x,y) = \sqrt{x+y}$, $D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$

ii) $f(x,y) = x^2y$, $D = \{(x,y) : 0 \leq y \leq x^2, 0 \leq x \leq 2\}$

iii) $f(x,y) = |(x-y)(x+y-2)|$, $D = \{(x,y) : 0 \leq y \leq x, x+y-2 \leq 0\}$

Exercice 3. (Ordre d'intégration)

Évaluer les intégrales suivantes et esquisser leur domaine d'intégration :

i) $\int_0^1 \left(\int_y^1 e^{x^2} dx \right) dy$

ii) $\int_0^1 \left(\int_{\sqrt[3]{y}}^1 \sqrt{1+x^4} dx \right) dy$

Exercice 4. (Décomposition du domaine)

Esquisser le domaine $D = \{(x,y) : y^2 \leq x, x-6 \leq y \leq x\}$ et calculer son aire.

Exercice 5. (Changement de variables)

Soient les domaines $D, \tilde{D} \subset \mathbb{R}^2$ et $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable. Soient $G: \tilde{D} \rightarrow D$ et $H: D \rightarrow \tilde{D}$ des applications bijectives telles que $G = H^{-1}$ et notons

$$G(u, v) = (G_1(u, v), G_2(u, v)) \quad \text{et} \quad H(x, y) = (H_1(x, y), H_2(x, y)).$$

- i) Donner la formule générale du changement de variables pour calculer l'intégrale double $\int_D f(x, y) dx dy$ en intégrant sur le domaine \tilde{D} .
- ii) Dans le cas des coordonnées polaires sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, définir l'application G et calculer son Jacobien. Calculer aussi le Jacobien de H .
- iii) Calculer l'aire du disque $D_R := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\}$, $R > 0$, par une intégrale double.

Exercice 6. (Comparaison de méthodes)

Calculer l'aire du parallélogramme représenté à la Fig. 1 d'abord sans et ensuite avec changement de variables. Un changement de variables vous semble-t-il utile dans ce cas?

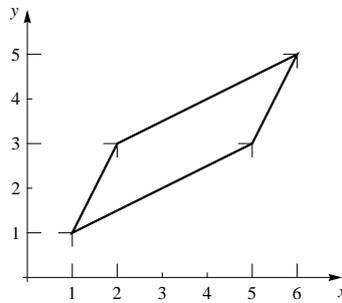


Fig. 1

Exercice 7. (Changement de variables)

- i) Évaluer l'intégrale double

$$\int_D x^3 y^3 dx dy,$$

où D est le domaine dans le premier quadrant limité par les courbes $x^2 + y^2 = 5$, $x^2 + y^2 = 9$, $x^2 - y^2 = 1$ et $x^2 - y^2 = 4$.

Esquisser les quatre courbes et le domaine d'intégration D .

- ii) Esquisser le domaine $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq y \leq 4x, 1 \leq xy \leq 2\}$ et calculer l'intégrale double

$$\int_D x^2 y^2 dx dy.$$

Exercice 8. (Changement de variables)

Évaluer l'intégrale double

$$\int_D (x^5 y + y^5 x) dx dy,$$

où D est le domaine dans le premier quadrant, limité par les courbes $x^2 + y^2 = 3$, $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 - y^2 = 1$ et $x^2 - y^2 = 2$.