Analyse avancée II – Série 13A

Échauffement. (Intégration sur un rectangle)

Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^2 \left(x^3 - y^{1/3} \right) dx \right) dy$ en intégrant d'abord

i) par rapport à x,

ii) par rapport à y.

Comparer les résultats.

Exercice 1. (Calcul d'intégrales)

Calculer les intégrales suivantes et esquisser leur domaine d'intégration :

i) $\displaystyle\int_{-1}^2 \left(\int_0^1 \cos(x+y)\, dx \right) dy$ *ii*) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_x^{2x} e^{x+y}\, dy \right) dx$

Exercice 2. (Intégration sur un domaine)

Calculer l'intégrale (double) $\displaystyle\int_D f(x,y)\, dx\, dy$ et esquisser le domaine d'intégration D si

i) $f(x,y) = \sqrt{x+y}\,$, $D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 1\}$

ii) $f(x,y) = x^2 y\,$, $D = \{(x,y) : 0 \leq y \leq x^2,\ 0 \leq x \leq 2\}$

iii) $f(x,y) = |(x-y)(x+y-2)|\,$, $D = \big\{(x,y) : 0 \leq y \leq x,\ x+y-2 \leq 0\big\}$

Exercice 3. (Ordre d'intégration)

Évaluer les intégrales suivantes et esquisser leur domaine d'intégration :

i) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_y^1 e^{(x^2)}\, dx \right) dy$ *ii*) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_{\sqrt[3]{y}}^1 \sqrt{1+x^4}\, dx \right) dy$

Exercice 4. (Décomposition du domaine)

Esquisser le domaine $D = \big\{(x,y) : y^2 \leq x,\ x-6 \leq y \leq x\big\}$ et calculer son aire.

Ex. 5 - 8 au verso.

Exercice 5. (Changement de variables)

Soient les domaines $D, \widetilde{D} \subset \mathbb{R}^2$ et $f\colon D \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. Soient $G\colon \widetilde{D} \to D$ et $H\colon D \to \widetilde{D}$ des applications bijectives telles que $G = H^{-1}$ et notons

$$G(u,v) = \big(G_1(u,v), G_2(u,v)\big) \qquad \text{et} \qquad H(x,y) = \big(H_1(x,y), H_2(x,y)\big).$$

i) Donner la formule générale du changement de variables pour calculer l'intégrale double $\displaystyle\int_D f(x,y)\,dx\,dy$ en intégrant sur le domaine $\widetilde{D}$.

ii) Dans le cas des coordonnées polaires sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, définir l'application G et calculer son Jacobien. Calculer aussi le Jacobien de H.

iii) Calculer l'aire du disque $D_R \coloneqq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\}$, $R > 0$, par une intégrale double.

Exercice 6. (Comparaison de méthodes)

Calculer l'aire du parallélogramme représenté à la Fig. 1 d'abord sans et ensuite avec changement de variables. Un changement de variables vous semble-t-il utile dans ce cas?

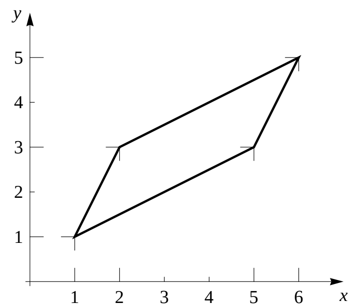

Fig. 1

Exercice 7. (Changement de variables)

i) Évaluer l'intégrale double

$$\int_D x^3 y^3\,dx\,dy\,,$$

où D est le domaine dans le premier quadrant limité par les courbes $x^2+y^2 = 5\,,\ x^2+y^2 = 9\,,\ x^2 - y^2 = 1$ et $x^2 - y^2 = 4\,.$

Esquisser les quatre courbes et le domaine d'intégration D.

ii) Esquisser le domaine $D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq y \leq 4x,\ 1 \leq xy \leq 2\}$ et calculer l'intégrale double

$$\int_D x^2\,y^2\,dx\,dy\,.$$

Exercice 8. (Changement de variables)

Évaluer l'intégrale double

$$\int_D \big(x^5 y + y^5 x\big)\,dx\,dy\,,$$

où D est le domaine dans le premier quadrant, limité par les courbes $x^2+y^2 = 3\,,\ x^2+y^2 = 4\,,$ $x^2 - y^2 = 1$ et $x^2 - y^2 = 2\,.$