Exemple

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} x_i$. Trouver les extremums de f sur la boule unité fermée.

$$C = \{ \underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : g(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 1 \leq 0 \}.$$

On a $D = \mathbb{R}^n$, f, g de classe C^1 sur D, C compact.

i) à l'intérieur de C

$$\nabla f(x_1, \dots, x_n) = (x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_n, x_1 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_n, \dots, x_1 \cdot \dots \cdot x_{n-1})^T$$
$$= (0, \dots, 0)^T$$

$\Longleftrightarrow$ $x_i = 0$ et $x_j = 0$ pour deux indices $i \neq j$.

Pour ces points $\boxed{f(\underline{x}) = 0}$

Remarque: 0 n'est ni le maximum ni le minimum.

car $f(\pm \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}) = \pm (\frac{1}{n})^n \neq 0$

On va donc supposer que $\forall i$ $x_i \neq 0$. Pour ces points:

$$\nabla f(x_1, \dots, x_n) = f(\underline{x}) \cdot (\frac{1}{x_1}, \dots, \frac{1}{x_n})$$

iiia) $\nabla g(\underline{x}) = (2x_1, \dots, 2x_n) \neq (0, \dots, 0)^T$

si $g(\underline{x}) = 0$, c-à-d. pour $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$ (pas de points dans cette liste).

iiib) on pose $F(\underline{x}, \lambda) = f(\underline{x}) - \lambda g(\underline{x})$ et on cherche des points stationnaires de F sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Mais

$$\nabla F(\underline{x}, \lambda) = 0 \Longleftrightarrow \nabla f(\underline{x}) = \lambda \nabla g(\underline{x}) \text{ et } g(\underline{x}) = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} f(\underline{x}) \frac{1}{x_i} - \lambda \cdot 2x_i = 0 & i = 1, \dots, n \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} f(\underline{x}) = 2\lambda x_1^2 & ① \\ f(\underline{x}) = 2\lambda x_2^2 & ② \\ \vdots & \vdots \\ f(\underline{x}) = 2\cdot\lambda x_n^2 & ⓝ \\ \sum_{i=1}^{n^2} x_i^2 = 1 & (**) \end{cases}$$

$\Rightarrow \lambda = \frac{1}{2x_1^2} f(\underline{x})$ $(\neq 0)$

$\left.\begin{matrix} ② = ① \\ \vdots \\ ⓝ = ① \end{matrix}\right\}$ $x_i^2 = x_1^2$, $i = 2, \dots, n$

Donc $x_1^2 = x_2^2 = \dots = x_n^2 =: a > 0$ et avec $(**)$ on obtient que $n \cdot a = 1$ ou $a = \frac{1}{n}$ $\Rightarrow x_i = \pm \frac{1}{\sqrt{n}}$, $i = 1 \dots n$.
(on a donc 2^n points interessants).

iv) on peut choisir un nombre pair des $x_i = -\frac{1}{\sqrt{n}}$ et les autres $= \frac{1}{\sqrt{n}}$. Alors

$$f(\underline{x}) = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n = n^{-\frac{1}{2}n}$$ points de maximums

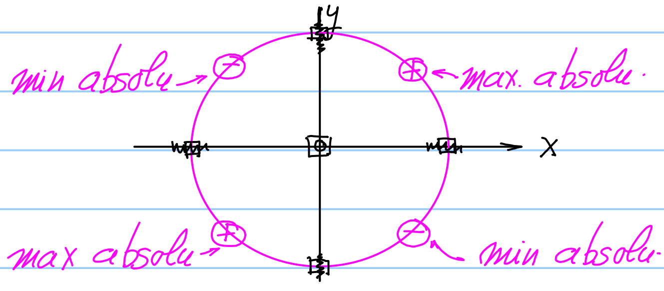
on peut choisir un nombre impair des $x_i = -\frac{1}{\sqrt{n}}$ et les autres $= \frac{1}{\sqrt{n}}$. Alors

$$f(\underline{x}) = -\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n = -n^{-\frac{1}{2}n}$$ points de minimums.

Le cas particulier $n=2$

$f(x,y) = x \cdot y$, $\nabla f(x,y) = (y,x)^T$

$C = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 1 \leq 0 \}$.



▪▪▪ $f(x,0) = f(0,y) = 0$

∘ $\nabla f(0,0) = (0,0)^T$, $f(0,0) = 0$

□ $f(\pm 1, 0) = f(0, \pm 1) = 0$

⊕ $f(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = -\frac{1}{2}$

⊖ $f(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{2}$

$m = -\frac{1}{2}$, $M = \frac{1}{2}$

$f : C \longrightarrow [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ est surjective (C connexe par arcs!)

9.6.5. Méthode directe ($n=2$) paramétrisation du bord

Dans l'exemple précédent ($n=2$) le bord est le cercle unité que l'on peut paramétriser par:

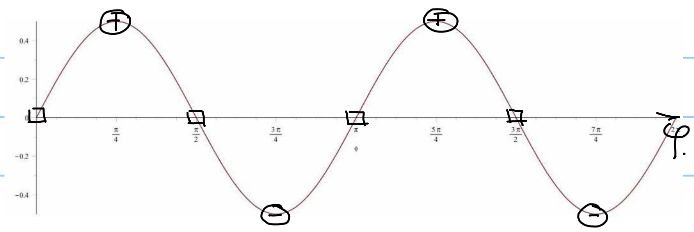
$$\left.\begin{aligned} x &= \cos(\varphi) \\ y &= \sin(\varphi) \end{aligned}\right\} \quad \varphi \in [0, 2\pi]$$

$$\uparrow$$

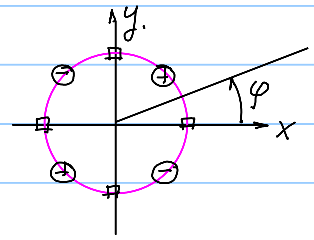
$$\text{chemin: } h : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$\varphi \longmapsto (\cos(\varphi), \sin(\varphi))$$

En évaluant f le long de ce chemin on obtient

$$(f \circ h)(\varphi) = f(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) = \cos(\varphi) \cdot \sin(\varphi) = \tfrac{1}{2}\sin(2\varphi)$$



$\longleftrightarrow$



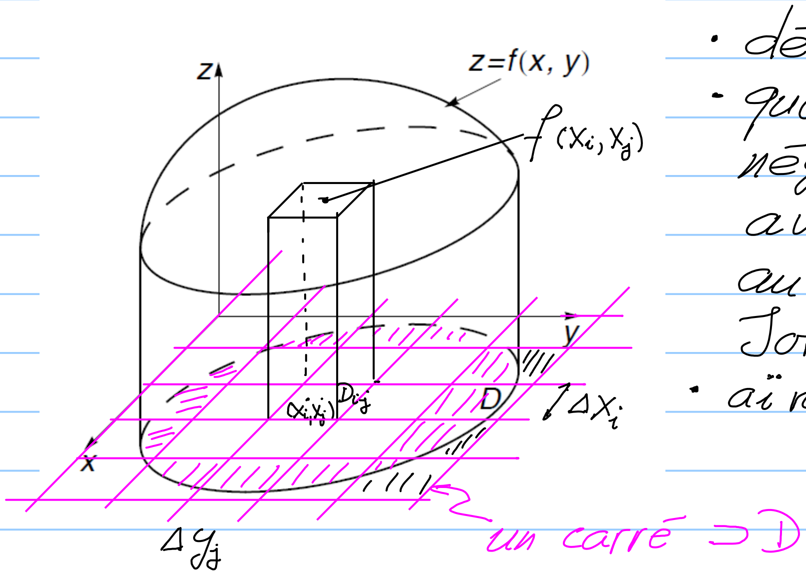
10. Intégrales multiples

10.1. Intégrales doubles ($n=2$)

10.1.1. Problématique

$f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ bornée

$D \subset \mathbb{R}^2$ compact avec un bord "négligeable"



- découper en rectangles
- quoi faire avec ////, négliger ou compléter avec /// ? Ça revient au même, si le bord est Jordan-négligeable.
- aïre de $D_{ij} = |D_{ij}| \equiv \Delta\sigma_{ij} := \Delta x_i \Delta y_j$

10.1.2. Intégrale de Riemann sur un rectangle fermé

(voir Analyse I, chapitre 8.1.1.)

Soit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $c < d$,

$$D = [a,b] \times [c,d] \text{ et } f: D \to \mathbb{R} \text{ bornée}$$

Considérons, pour $p, q \in \mathbb{N}^*$ les subdivisions
$\sigma_1 = \{x_0, \dots, x_p\}$ de $[a,b]$ et $\sigma_2 = \{y_0, \dots, y_q\}$ de $[c,d]$:
$a = x_0 < x_1 < \dots < x_p = b$, $c = y_0 < y_1 < \dots < y_q = d$

Posons, pour $1 \le i \le p$ et $1 \le j \le q$.

$$D_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$$

Alors $|D_{ij}| := (x_i - x_{i-1}) \cdot (y_j - y_{j-1}) =: \Delta x_i \cdot \Delta y_j$.

$$|D| = (b-a) \cdot (d-c) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} |D_{ij}|.$$

et $D = \bigcup_{i,j} D_{ij}$. (Les D_{ij} sont aussi appelés une partition de D).

Les sommes de Darboux inférieures et supérieures de f relative à la paire de subdivisions (σ_1, σ_2) sont définies par:

$$\underline{S}(f, \sigma_1, \sigma_2) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} m_{ij} \, |D_{ij}|$$

$$\bar{S}(f, \sigma_1, \sigma_2) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} M_{ij} \, |D_{ij}|$$

où

$$m_{ij} = \inf \{ f(x,y) : (x,y) \in D_{ij} \},$$

$$M_{ij} = \sup \{ f(x,y) : (x,y) \in D_{ij} \},$$

puis on définit:

$$\underline{S} = \underline{S}(f) = \sup_{\sigma_1, \sigma_2} \underline{S}(f, \sigma_1, \sigma_2).$$

$$\bar{S} = \bar{S}(f) = \inf_{\sigma_1, \sigma_2} \bar{S}(f, \sigma_1, \sigma_2).$$

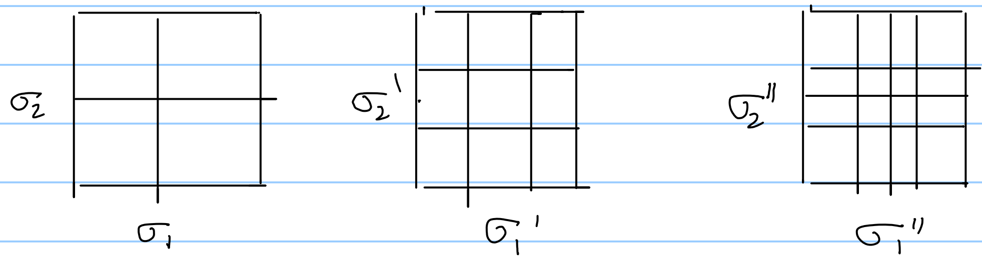
<u>Définition:</u> une fonction f est dite intégrable sur un rectangle fermé D (au sens de Riemann) si

$$\underline{S}(f) = \bar{S}(f).$$

Remarque 10.1.2 : soient (σ_1, σ_2) et (σ_1', σ_2') deux subdivisions, alors :

$$\underline{S}(f, \sigma_1, \sigma_2) \leq \overline{S}(f, \sigma_1', \sigma_2')$$

Démonstration : soit (σ_1'', σ_2'') le rafinement commun de (σ_1, σ_2) et (σ_1', σ_2').



alors $\underline{S}(f, \sigma_1, \sigma_2) \leq \underline{S}(f, \sigma_1'', \sigma_2'')$

$$\leq \overline{S}(f, \sigma_1'', \sigma_2'') \leq \overline{S}(f, \sigma_1', \sigma_2')$$

Conséquence : $-\infty < \underline{S} \leq \overline{S} < +\infty$

Remarque : d'une manière analogue on définit l'intégrale d'une fonction bornée définie sur un hyper-rectangle de $\mathbb{R}^n$ (produit cartésien de n intervalles fermés).

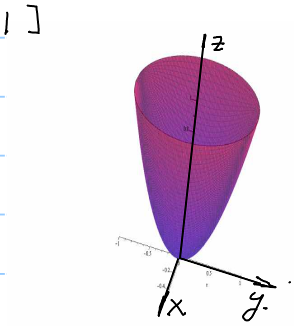
Notations : $\int_D f(x,y)\, d\sigma$, $\int_D f(x,y)\, dx \cdot dy$

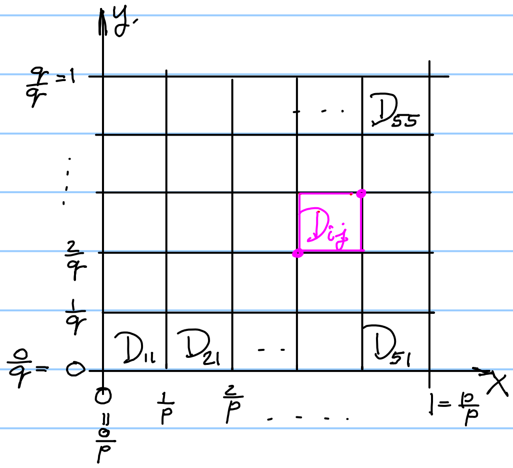
$\boxed{\int_D f\, d\sigma}$, $\int_D f$, $\int_D f(\underline{x})\, d\underline{x}$

$\iint_D f(x,y)\, \cancel{dx\, dy}$, $\iint_D f\, \cancel{d\sigma}$ etc.

Remarque: $\int_D f(x,y)\, d\sigma$ donne le volume du cylindre de base D délimité "en haut" (on suppose $f(x,y) \geq 0$ ici) par la surface $z = f(x,y)$.

Exemple: $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $D = [0,1] \times [0,1]$
$(x,y) \longmapsto x^2 + y^2$.

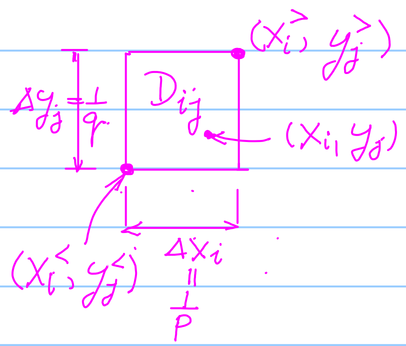




$p = q = n$,

$x_i^< = \frac{i-1}{p}$, $x_i^> = \frac{i}{p}$, $i = 1, \dots, p$

$y_j^< = \frac{j-1}{q}$, $y_j^> = \frac{j}{q}$, $j = 1, \dots, q$



Pour tout $x, y \in D$, $\Delta x > 0$, $\Delta y > 0$:

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) = (x+\Delta x)^2 + (y+\Delta y)^2$$
$$= \dots \geq x^2 + y^2 = f(x,y)$$

$\Longrightarrow$

$$\underbrace{f(x_i^<, y_j^<)}_{m_{ij}} \leq f(x_i, y_j) \leq \underbrace{f(x_i^>, y_j^>)}_{M_{ij}}.$$

et donc $\Delta x_i \Delta y_j = \frac{1}{pq}$

$$\underbrace{\frac{1}{pq} \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} f(x_i^<, y_j^<)}_{= \underline{S}(f, \sigma_1, \sigma_2) \equiv S^<} \leq SR \leq \underbrace{\frac{1}{pq} \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} f(x_i^>, y_j^>)}_{= \overline{S}(f, \sigma_1, \sigma_2) \equiv S^>}$$

$$SR \uparrow \quad \frac{1}{pq} \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} f(x_i, y_j)$$

(f continue).

$$S^< \leq SR \leq S^>$$

$$S^< = \frac{1}{pq}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\left(\left(\frac{i-1}{p}\right)^2 + \left(\frac{j-1}{q}\right)^2\right)$$

"théorème de Fubini"

$$= \underbrace{\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}}_{\xrightarrow[p\to\infty]{} \int dx}\left(\underbrace{\frac{1}{q}\sum_{j=1}^{q}}_{\xrightarrow[q\to\infty]{} \int dy}\left(\left(\frac{i-1}{p}\right)^2 + \left(\frac{j-1}{q}\right)^2\right)\right)$$

$$\underset{p=q=n}{=} \frac{2}{n^3}\sum_{i=1}^{n-1} i^2 = \frac{2}{n^3}\,\frac{(n-1)n\cdot(2n-1)}{6} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{2}{3}.$$

Analyse I, par récurrence

$$S^> = \text{mêmes idées} = \frac{2}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{2}{n^3}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{2}{3}.$$

Finalement, avec la remarque 10.1.2. on a

$$\frac{2}{3} = \lim_{n\to\infty} S^< \leq \underline{S} \leq \overline{S} \leq \lim_{n\to\infty} S^> = \frac{2}{3}$$

$\boxed{\text{Conclusion: la fonction } f \text{ est intégrable sur } D \text{ et } \int_D f\,d\sigma = \frac{2}{3}.}$

10.1.3. Intégrale de Riemann sur un ensemble borné

Definition: soit $D \subset \mathbb{R}^2$ borné, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ bornée et $E \supset D$ un rectangle fermé. Alors f est intégrable au sens de Riemann sur D si la fonction $\tilde{f} : E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\tilde{f}(\underline{x}) = \begin{cases} f(\underline{x}) & \text{si } \underline{x} \in D \\ 0 & \text{si } \underline{x} \in E \setminus D \end{cases}$$

est intégrable sur E et $\int_D f \, d\sigma := \int_E \tilde{f} \, d\sigma$.

Remarque la valeur de cette intégrale ne dépend pas du choix du rectangle E.

Definition: (Ensemble mesurable au sens de Jordan)

Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ borné. On dit que D est mesurable au sens de Jordan si la fonction constante égale à un sur D est intégrable au sens de Riemann sur D. Dans ce cas on pose

$$|D| := \int_D 1 \, d\sigma \qquad (=: \text{aire de } D)$$

Définition un ensemble borné $\mathcal{J} \subset \mathbb{R}^2$ qui est mesurable au sens de Jordan est appelé Jordan-négligeable si $|\mathcal{J}| = 0$