10.1.3. Intégrale de Riemann sur un ensemble borné

Définition: soit $D \subset \mathbb{R}^2$ borné, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ bornée et $E \supset D$ un rectangle fermé. Alors f est intégrable au sens de Riemann sur D si la fonction $\tilde{f} : E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\tilde{f}(\underline{x}) = \begin{cases} f(\underline{x}) & \text{si } \underline{x} \in D \\ 0 & \text{si } \underline{x} \in E \setminus D \end{cases}$$

est intégrable sur E et $\int_D f \, d\sigma := \int_E \tilde{f} \, d\sigma$.

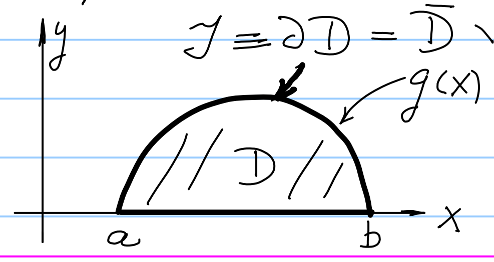
Remarque la valeur de cette intégrale ne dépend pas du choix du rectangle E.

Définition: (Ensemble mesurable au sens de Jordan)

Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ borné. On dit que D est mesurable au sens de Jordan si la fonction constante égale à un sur D est intégrable au sens de Riemann sur D. Dans ce cas on pose

$$|D| := \int_D 1 \, d\sigma \qquad (=: \text{aire de } D)$$

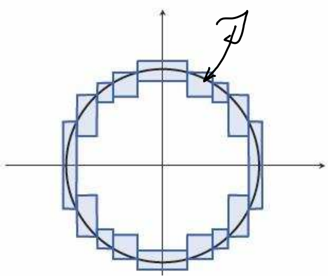
Conséquence:



$$\int_a^b g(x) \, dx = \int_D 1 \cdot d\sigma .$$

Définition un ensemble borné $J \subset \mathbb{R}^2$ qui est mesurable au sens de Jordan est appelé Jordan-négligeable si $|J| = 0$

Remarque: un ensemble borné $J \subset \mathbb{R}^2$ est Jordan-négligeable si et seulement si $\forall \varepsilon > 0$ il existe un nombre fini de rectangles $D_1, \dots D_N$, tels que $J \subset \bigcup_{i=1}^{N} D_i$ et $\sum_{i=1}^{N} |D_i| \leq \varepsilon$.



Théorème (sans démonstration) Un ensemble borné $D \subset \mathbb{R}^2$ est mesurable au sens de Jordan si et seulement si $\partial D = \bar{D} \setminus \mathring{D}$ est négligeable au sens de Jordan.

Théorème: soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un domaine compact $D \subset \mathbb{R}^2$ qui est mesurable au sens de Jordan. Alors f est intégrable sur D au sens de Riemann.

Démonstration: c'est une conséquence de la continuité uniforme de f sur D. (voir Analyse I)

10.1.4. Propriétés des intégrales doubles

<u>Proposition</u> : soit $D \subset \mathbb{R}^2$ compact et mesurable au sens de Jordan, $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$. des fonctions continues et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors :

1) $$\int_D (\alpha \cdot f + \beta g)\, d\sigma = \alpha \int_D f\, d\sigma + \beta \int_D g\, d\sigma$$

c'est la linéarité de l'intégrale (= additive et homogène).

2) $$\int_D f\, d\sigma = \int_{\overline{D_1}} f\, d\sigma + \int_{\overline{D_2}} f\, d\sigma$$

$D = D_1 \cup D_2$
$D_1 \cap D_2 = \emptyset$
D_1, D_2 avec "bords Jordan-négligeables"

$\overline{D_1}$ = adhérence de D_1
$\overline{D_2}$ = adhérence de D_2
(voir le chapitre 2.3)

3) si $f \leq g$, c-à-d. si $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in D$ alors

$$\int_D f\, d\sigma \leq \int_D g\, d\sigma$$

et donc en particulier

$$-\int_D |f|\, d\sigma \leq \int_D f\, d\sigma \leq \int_D |f|\, d\sigma$$

$$\Longleftrightarrow \left| \int_D f\, d\sigma \right| \leq \int_D |f|\, d\sigma$$

<u>Démonstration</u> : ce sont des conséquences directes de la définition des intégrales doubles

$\square$

10.1.5 Théorème de la valeur moyenne

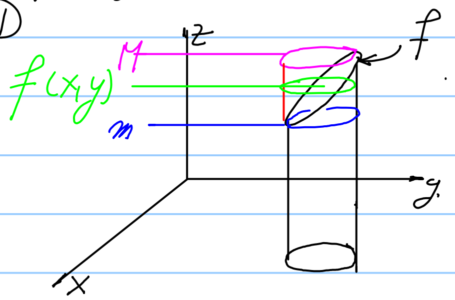
Théorème Soit $f : D \to \mathbb{R}$ continue, $D \subset \mathbb{R}^2$ compact connexe par arcs et mesurable au sens de Jordan. Alors il existe $(x,y) \in D$ tel que

$$\int_D f \, d\sigma = f(x,y) \, \underbrace{|D|}_{\text{aire de } D} \qquad (*)$$

Démonstration: (voir Analyse I)

$$m = \min_{(x,y)\in D} f(x,y) \leq f(x,y) \leq \max_{(x,y)\in D} f(x,y) = M.$$

$$\overset{3)}{\underset{2)}{\Longrightarrow}}$$



$$|D| \, m \leq \underbrace{\int_D f \, d\sigma}_{= |D| \cdot c \text{ avec } c \in [m,M]} \leq |D| \, M$$

$$\xrightarrow[\text{continuité \& connexe par arcs}]{} \exists (x,y) \in D \text{ tel que } f(x,y) = c$$

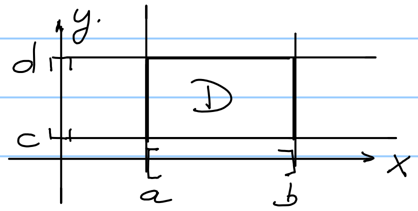
Remarque $(*) \Leftrightarrow \exists (x,y) \in D$ tel que

$$|D| \neq 0 \qquad f(x,y) = \frac{1}{|D|} \int_D f \, d\sigma$$

(= valeur moyenne de f sur D)

10.2. Techniques d'intégration pour les intégrales

<u>Théorème (Fubini)</u> Soit $D = [a,b] \times [c,d]$



et $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors l'intégrale $V \equiv \int_D f\, d\sigma$ peut être calculée par intégrations successives :

$$\boxed{V = \int_a^b dx \int_c^d dy\, f(x,y) \qquad (\ast\ast)}$$

<u>Explication</u>: on intègre d'abord sur y de "c" à "d" en traitant x comme un paramètre. Le résultat de cette opération est une fonction de x que l'on intègre de "a" à "b".

<u>Remarque</u>: le résultat est indépendant de l'ordre dans lequel les intégrales sont effectuées. V est donc aussi égal à

$$\boxed{V = \int_c^d dy \int_a^b dx\, f(x,y)}$$

Exemple $D = [0,1] \times [0,1]$, $f(x,y) = x^2 + y^2$.

(on a déjà montré par découpage que $\int_D f\, d\sigma = \frac{2}{3}$)

$$\int_D f\, d\sigma = \int_0^1 dx \int_0^1 dy\, (x^2+y^2) =$$

$$= \int_0^1 dx\, \left[x^2 y + \frac{1}{3} y^3 \right]_{y=0}^{y=1}$$

$$= \int_0^1 dx\, \left(x^2 + \frac{1}{3}\right) = \left[\frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{3} x\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{2}{3}.$$

On a aussi

$$\int_D f\, d\sigma = \int_0^1 dy \int_0^1 dx\, (x^2+y^2)$$

$$= \int_0^1 dy\, \left[\frac{1}{3} x^3 + y^2 x\right]_{x=0}^{x=1}$$

$$= \int_0^1 dy\, \left(\frac{1}{3} + y^2\right) = \left[\frac{1}{3} y + \frac{1}{3} y^3\right]_{y=0}^{y=1} = \frac{2}{3}.$$

10.2.2. Remarques concernant la notation

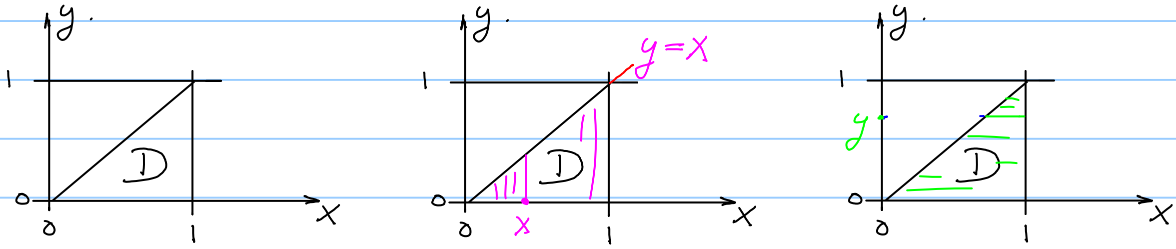
Souvent on trouve au lieu de $(**)$ la notation

$$\boxed{\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\, dy \right) dx \equiv \int_a^b dx \int_c^d dy\, f(x,y)}$$

et il faut savoir traduire d'une notation à l'autre ! Mais attention toujours écrire les parenthèses si on utilise la notation à gauche !

10.2.3. Intégration sur des domaines plus compliqués

Exemple 1: $f(x,y) = x^2 + y^2$.



$$I = \int_D f \, d\sigma = \frac{1}{3} \quad \left(= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \text{ par symétrie} \right)$$

$$I = \underbrace{\int_0^1 dx \int_0^x dy}_{\updownarrow} \, (x^2 + y^2) \equiv I_1$$

$$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 , \ 0 \leq y \leq x \} \qquad (*)$$

$$I = \underbrace{\int_0^1 dy \int_y^1 dx}_{\updownarrow} \, (x^2 + y^2) \equiv I_2 .$$

$$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1 , \ y \leq x \leq 1 \}$$

Mais attention !

Pour $(*)$ on peut aussi écrire

$$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x , \ 0 \leq x \leq 1 \} \text{ mais}$$

$$I \neq \int_0^x dy \int_0^1 dx \, f(x,y) \longleftarrow \underline{\underline{\text{nonsense}}} \, !$$

résultat dépend de x

$$I_1 = \int_0^1 dx \left[x^2 y + \tfrac{1}{3} y^3 \right]_{y=0}^{y=x} = \int_0^1 dx \, \left(x^3 + \tfrac{1}{3} x^3 \right)$$

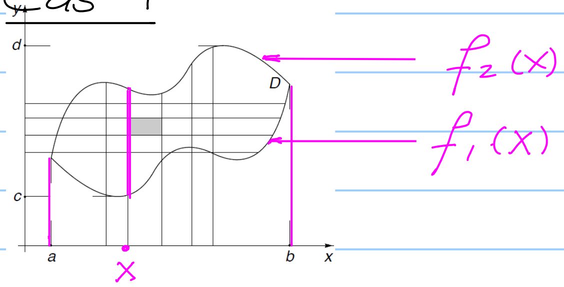
$$= \frac{4}{3} \int_0^1 x^3 \, dx = \frac{4}{3} \, \frac{1}{4} x^4 \Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

$$I_2 = \int_0^1 dy \left[\tfrac{1}{3} x^3 + y^2 x \right]_{x=y}^{x=1} = \int_0^1 dy \left(\tfrac{1}{3} + y^2 - \tfrac{1}{3} y^3 - y^3 \right)$$

$$= \left[\frac{1}{3} y + \frac{1}{3} y^3 - \frac{4}{3} \, \frac{1}{4} y^4 \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

10.2.4 Domaines délimités par des graphes

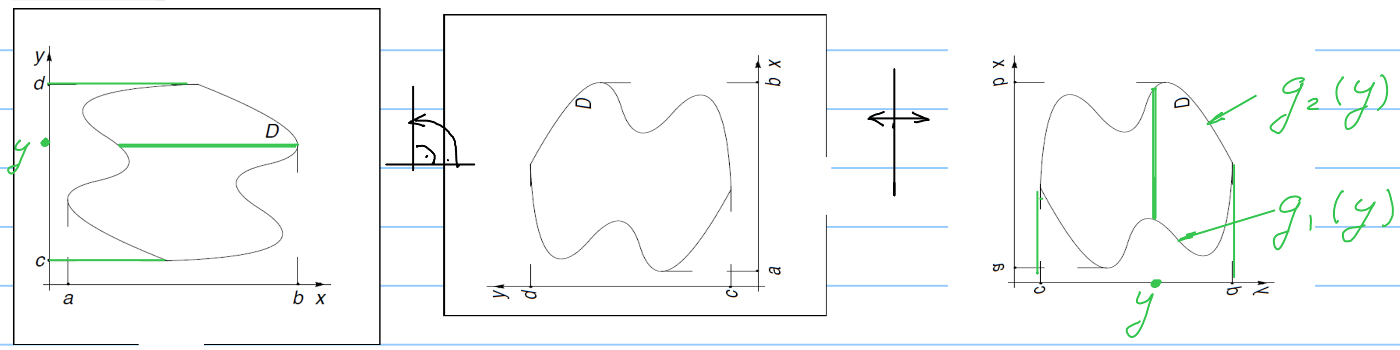
Cas 1



$$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; a \leq x \leq b, \; f_1(x) \leq y \leq f_2(x) \}$$

$$\int_D f \, d\sigma = \int_a^b dx \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} dy \; f(x,y)$$

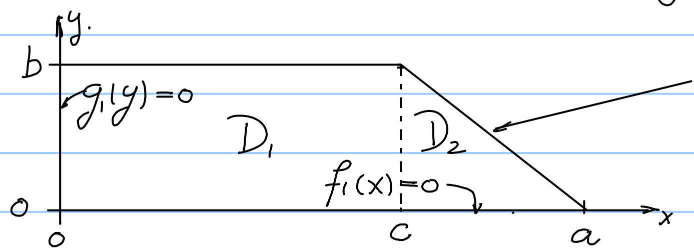
Cas 2



$$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; c \leq y \leq d, \; g_1(y) \leq x \leq g_2(y) \}$$

$$\int_D f \, d\sigma = \int_c^d dy \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} dx \; f(x,y)$$

Exemple explicite : $f(x,y) = x\cdot y$



$$\begin{cases} x = a - \frac{a-c}{b}\, y = g_2(y) \\ y = b - \frac{b}{a-c}(x-c) = f_2(x) \end{cases}$$

$$D = D_1 \cup D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d\,,\ 0 \leq x \leq g_2(y)\}$$

$$I = \int_D f\, d\sigma = \int_0^b dy \int_0^{a-\frac{a-c}{b}y} dx\ x\cdot y = \dots = (*)$$

ou, par décomposition du domaine :

$$I = \int_{D_1} f\, d\sigma + \int_{D_2} f\, d\sigma =$$

$$= \int_0^c dx \int_0^b dy\ x\cdot y + \int_c^a dx \int_0^{f_2(x)} dy\ x\cdot y$$

$$= \dots = \text{le même résultat}$$

Pour (*) on trouve :

$$(*) = \int_0^b dy \left[\tfrac{1}{2} x^2 \cdot y\right]_{x=0}^{x=a-\frac{a-c}{b}y} = \frac{1}{2}\int_0^b dy \left(a - \frac{a-c}{b}y\right)^2 y$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(a - \frac{a-c}{b}y\right)^2 \frac{1}{2}y^2\right]_0^b + \frac{1}{2}\left(\frac{a-c}{b}\right)\int_0^b \left(a - \frac{a-c}{b}y\right) y^2\, dy$$

intégration par parties

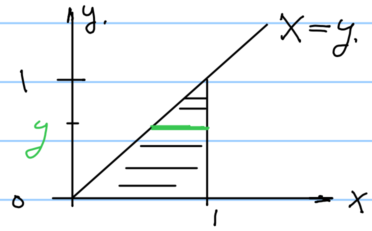
$$= \frac{1}{4} b^2c^2 + \frac{1}{6}(a-c)\, a\, b^2 - \frac{1}{8}(a-c)^2 b^2$$

$$= \frac{1}{8} b^2c^2 + \frac{1}{24} a^2b^2 + \frac{1}{12} a b^2 c$$

10.2.5 Application du théorème de Fubini

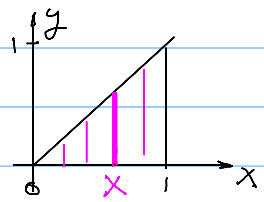
$$I = \int_0^1 \left(\int_y^1 \sin(x^2)\,dx \right) dy = \underbrace{\int_0^1 dy \int_y^1 dx}_{= ①} \sin(x^2)$$

Pas de fonction élémentaire comme primitive de $\sin(x^2)$



$①$: $D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1 ,\ y \leq x \leq 1 \}$

$\Leftrightarrow$



$②$: $D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 ,\ 0 \leq y \leq x \}$

$$I = \boxed{\int_0^1 dx} \boxed{\int_0^x dy} \sin(x^2) = \int_0^1 dx \left[\sin(x^2) \cdot y \right]_{y=0}^{y=x} =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 dx \ \sin(x^2) \cdot (2x) = \left[\frac{1}{2} \left(-\cos(x^2) \right) \right]_0^1$$

$$= -\frac{1}{2} \cos(1) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left(1 - \cos(1) \right)$$

Transcription du domaine sans le dessin

$$① \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq y \leq 1 \\ y \leq x \leq 1 \end{cases} \qquad \begin{matrix} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq x \end{matrix}$$