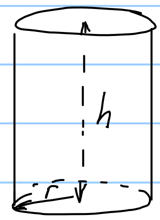
9.6. Extremums liés

La méthode (des multiplicateurs de Lagrange) permet de trouver des extremums d'une fonction f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ (fonction objectif) sous contraintes (d'autre fonctions $g_1, \dots, g_m$, $1 \leq m \leq n-1$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$).

9.6.1. Exemple

Trouver le cylindre de volume V donné et de surface minimale

$$V - \pi r^2 h \quad =: g(r,h) \overset{!}{=} 0$$
$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h \quad =: f(r,h)$$



Méthode 1: éliminer une des variables :

$$g(r,h) = 0 \iff h = \frac{V}{\pi r^2} \qquad \text{(contrainte)}$$

$$S(r) = f\left(r, \frac{V}{\pi r^2}\right) = 2\pi r^2 + 2\pi \cdot r \frac{V}{\pi r^2}$$
$$= 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}$$

$$S'(r) = 4\pi r - \frac{2V}{r^2} = 0 \Rightarrow \boxed{r = \left(\frac{V}{2\pi}\right)^{\frac{1}{3}} \quad (*)}$$

$$\Longrightarrow S = 3 \cdot (2\pi)^{1/3} V^{2/3}$$ (et c'est bien un minimum car $S'' > 0$)

Méthode 2: fonction de Lagrange. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, et

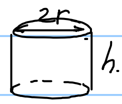
$$F(r,h,\lambda) := f(r,h) - \lambda g(r,h)$$
$$= 2\pi r^2 + 2\pi r h - \lambda (V - \pi r^2 h)$$

On cherche des points stationnaires de F ($\nabla F = 0$).

$$\nabla F(r,h,\lambda) = (\underbrace{4\pi r + 2\pi h + \lambda 2\pi r h}_{①}, \underbrace{2\pi r + \lambda \pi r^2}_{②}, \underbrace{-(V-\pi r^2 h)}_{③})^T$$
$$= (0,0,0)^T$$

$$② \Longrightarrow \lambda = -\frac{2}{r} \underset{①}{\Longrightarrow} 4\pi r + 2\pi h - \frac{2}{r} 2\pi r h = 0$$

$$\Rightarrow 4\pi r - 2\pi h = 0 \Rightarrow h = 2r$$



$$\underset{③}{\Rightarrow} V = \pi r^2 (2r) \Rightarrow r = \left(\frac{V}{2\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$$ (on retrouve (*))

9.6.2. Théorème des multiplicateurs de Lagrange

Théorème (condition nécessaire pour un extremum lié)

Soient les fonctions $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$ ouvert, de classe C^1 et un point (x_0, y_0) tel que $g(x_0,y_0) = 0$ et $\nabla g(x_0,y_0) \neq 0$ (*). Si f admet en (x_0,y_0) un extrémumum sous la contrainte g (c'est-à-dire on réduit l'étude de f aux points (x,y) tels que $g(x,y)=0$), alors il existe un nombre $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que la fonction de Lagrange

$$F : D \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y,\lambda) \longmapsto f(x,y) - \lambda \cdot g(x,y)$$

soit stationnaire en (x_0, y_0, λ_0).

Remarque: $\nabla F(x_0, y_0, \lambda_0) = 0 \iff$

$$\Big(\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) - \lambda_0 \frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0)}_{①},\ \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) - \lambda_0 \frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0)}_{②},\ \underbrace{-g(x_0,y_0)}_{③}\Big)^T$$

$$= (0,0,0)^T$$

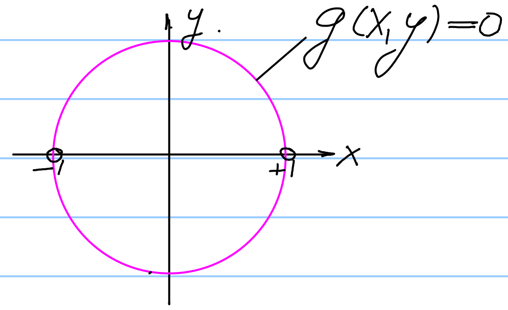
$\left.\begin{array}{l} ① = 0 \\ ② = 0 \end{array}\right\} \iff \nabla f(x_0,y_0) = \lambda_0 \nabla g(x_0,y_0)$ pour un $\lambda_0 \in \mathbb{R}$.

$③ = 0$ la contrainte.

Contre-exemple (au theoreme sans (*))

$f, g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(x,y) = x \ , \ g(x,y) = (x^2+y^2-1)^2$



$g(x,y) = 0$ la contrainte
$(\iff x^2+y^2=1)$

$f(1,0) = 1$ (maximum sous contrainte)
$f(-1,0) = -1$ (minimum sous contrainte)

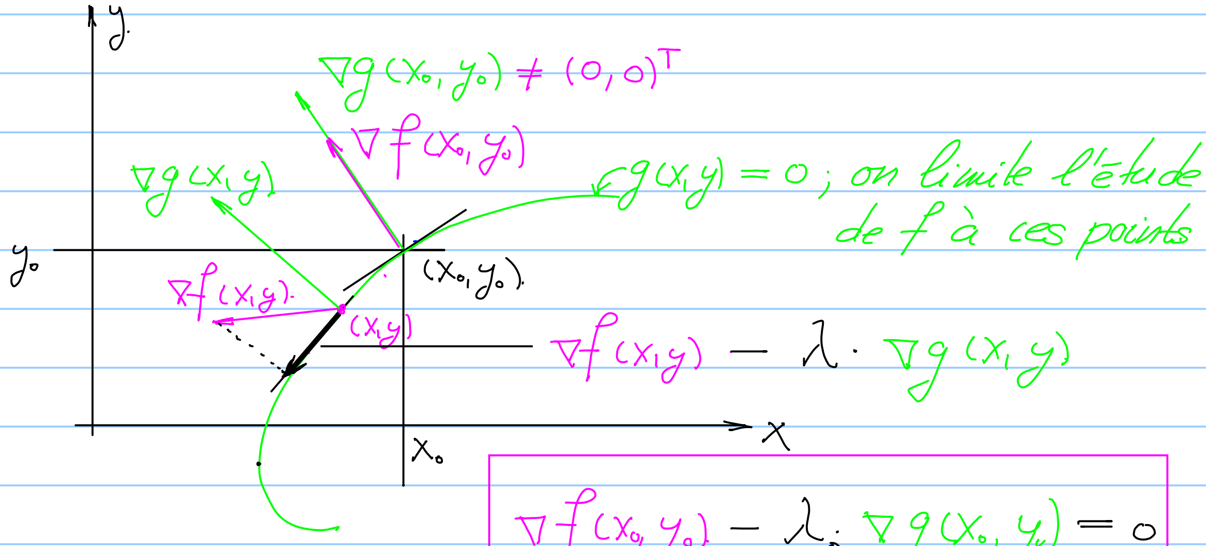
$$F(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda\, g(x,y) = x - \lambda (x^2+y^2-1)^2$$

$$\nabla F(x,y,\lambda) = \Big(\underbrace{1 - \lambda 4x(x^2+y^2-1)}_{①},\ \underbrace{\lambda \cdot 4y(x^2+y^2-1)}_{②},\ \underbrace{-(x^2+y^2-1)^2}_{③}\Big)^T$$

$$③ = 0 \Rightarrow x^2+y^2-1 = 0 \begin{cases} \Rightarrow ② = 0 \\ \Rightarrow ① = 1 \neq 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \nabla F(x,y,\lambda) = (1,0,0)^T \neq (0,0,0)^T$ pour tous les points (x,y) tels que $g(x,y) = 0$.

Démonstration du théorème



$$\boxed{\nabla f(x_0,y_0) - \lambda_0 \nabla g(x_0,y_0) = 0}$$

(*) $\Longleftrightarrow$ le théorème des fonctions implicite s'applique

---

Théorème (cas général)

Soient les fonctions $f, g_1, \dots, g_m : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, $1 \leq m \leq n-1$, de classe C^1 et un point $\underline{x}_0 \in D$ tel que $g_i(\underline{x}_0) = 0$, $i = 1 \dots m$, et tel que les vecteurs $\nabla g_i(\underline{x}_0)$, $i = 1 \dots m$, soient linéairement indépendants (pour $m=1$ c'est la condition (*)). Si f admet en $\underline{x}_0$ un extremum sous les contraintes $g_i(\underline{x}) = 0$, $i = 1 \dots m$, alors il existe un vecteur $\underline{\lambda}_0 \in \mathbb{R}^m$ tel que la fonction de Lagrange

$$F : D \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(\underline{x}, \underline{\lambda}) \longmapsto f(\underline{x}) - \langle \underline{\lambda}, g(\underline{x}) \rangle$$

où $g(\underline{x}) := (g_1(\underline{x}), \dots, g_m(\underline{x}))^T \in \mathbb{R}^m$

soit stationnaire en $(\underline{x}_0, \underline{\lambda}_0)$.

$$\boxed{\text{Notation: } \left\langle \underline{\lambda}, g(\underline{x}) \right\rangle := \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \, g_i(\underline{x})}$$

Démonstration

On utilise le théorème des fonctions implicites pour exprimer m variables en termes des autres $n-m$ variables. Par exemple, soit

$$\begin{array}{cc} n-m & m \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{array} \quad m$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} \equiv (\nabla g_1, \dots, \nabla g_m)^T$$

$$\underline{x} = (x, y) \in U \times V \subset D$$

$$x = (x_1, \dots, x_{n-m}) \quad , \; y = (x_{n-m+1}, \dots, x_n)$$

alors $g : U \times V \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $g((x_0, y_0)) \equiv g(\underline{x}_0) = 0$

et si $\det\left(\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0\right)$ on a

localement que $y = h(x)$ avec $y_0 = h(x_0)$ et la fonction

$$s(x) = f(x, h(x))$$

satisfait $s'(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\, h'(x_0)$

ce qui implique si $s'(x_0) = 0$ et en utilisant que:

$$h'(x_0) = -\left(\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)\right)^{-1}\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)\right)$$

que:

$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}_{1 \times (n-m)} = \underbrace{\underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}_{1 \times m} \underbrace{\left(\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)\right)^{-1}}_{m \times m}}_{=: \underline{\lambda}_0} \underbrace{\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)\right)}_{m \times (n-m)}$$

9.6.3. Maximum et minimum d'une fonction de classe C^1 sur un domaine compact avec un bord de classe C^1

(A comparer avec la méthode vu en section 9.5.2.)

Soit $f, g : D \to \mathbb{R}$ de classe C^1, $D \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, telle que l'ensemble

$$C := \{ \underline{x} \in D : g(\underline{x}) \leq 0 \}$$

soit un ensemble compact. Alors, pour trouver le maximum et le minimum de f sur C :

i) on localise les points stationnaires de f dans $\mathring{C}$.

(ii) cette liste est vide, car f de classe C^1)

iiia) on localise les points où $g(\underline{x}) = 0$ et $\nabla g(\underline{x}) = 0$

iiib) on localise les points stationnaires de la fonction $F(\underline{x}, \lambda) = f(\underline{x}) - \lambda g(\underline{x})$ dans $D \times \mathbb{R}$

iv) on évalue f aux points trouvés sous i) – iii) et on compare les valeurs

Exemple

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} x_i$. Trouver les extremums de f sur la boule unité fermée.

$$C = \{ \underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : g(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 1 \leq 0 \}.$$

On a $D = \mathbb{R}^n$, f, g de classe C^1 sur D, C compact.