

9.5. Extremums absolus

Revoir le chapitre 2.3 pour la définition des ensembles ouverts et fermés et les définitions du bord et de l'intérieur d'un ensemble

9.5.1. Définitions, théorèmes

Définition: un ensemble $B \subset \mathbb{R}^n$ est appelé borné s'il existe $0 < r < \infty$ tel que $B \subset \overline{B}(0, r)$

Définition un ensemble $C \subset \mathbb{R}^n$ qui est borné et fermé est appelé compact

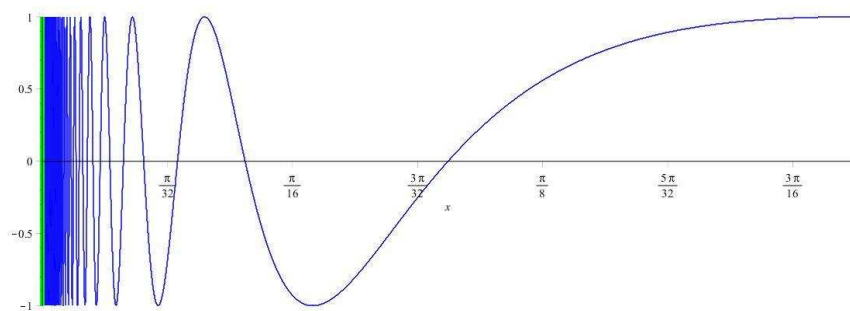
Définition un ensemble $D \subset \mathbb{R}^n$, $D \neq \emptyset$, est connexe s'ils n'existent pas deux sous ensembles ouverts $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ tels que:

$$X \cap Y = \emptyset, X \cap D \neq \emptyset, Y \cap D \neq \emptyset, D \subset X \cup Y$$

Exemple . $D = D_1 \cup D_2$, où.

$$D_1 = \left\{ (x, \sin(\frac{1}{x})) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq \frac{2}{\pi} \right\}$$

$$D_2 = \left\{ (0, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 1 \right\}.$$



$$\left. \begin{aligned} D_1 \cap D_2 &= \emptyset \\ D_1 \cap D &= D_1 \neq \emptyset \\ D_2 \cap D &= D_2 \neq \emptyset \\ D &= D_1 \cup D_2 \subset \mathbb{D} \end{aligned} \right\} (*)$$

mais D est connexe !

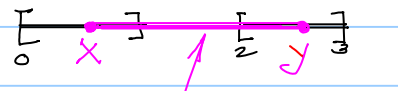
Définition un ensemble $D \subset \mathbb{R}^n$, $D \neq \emptyset$, est connexe par arcs si deux points x, y quelconques de D peuvent être joints dans D par un chemin.

une fonction continue de $[0,1] \rightarrow D$ (voir la section 3.0).

Remarque: connexe par arc implique connexe, mais pas vice-versa.
 D de l'exemple (*) n'est pas connexe par arc.

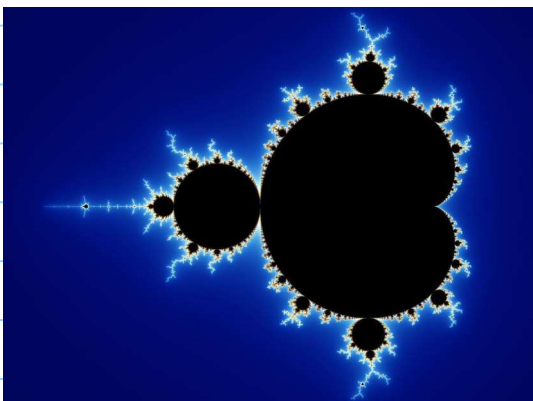
Exemples: $C = [0,1]$ ($\subset B(0,2) =]-2,2[$, donc borné)
 compact, connexe par arc.

$C = [0,1] \cup [2,3]$ ($\subset B(0,4) =]-4,4[$, donc borné)
 compact, mais ni connexe par arcs, ni connexe.


 un chemin qui relie x et y . (mais pas dans C)

prendre $X =]-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$
 $Y =]\frac{3}{2}, \frac{7}{2}[$ par exemple.

Ensemble de Mandelbrot



- ensemble compact ✓
- ensemble connexe ✓
- connexe par arc ?

https://fr.wikipedia.org/wiki/Ensemble_de_Mandelbrot

<https://www.youtube.com/watch?v=zXTpASSd9xE&feature=youtu.be>

Comment vérifier la continuité d'une fonction sur un ensemble compact ?

Critère: Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble ouvert et $C \subset D$ un ensemble compact. Alors la restriction d'une fonction continue $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ à C est une fonction continue sur C .

Définition: une fonction $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ est appelée bornée (ou bornée sur D) si l'image de f est un ensemble borné, c.-à-d. s'il existe une constante $r > 0$ telle que $\text{Im}(f) \subset \overline{B(0, r)}$, ou encore, si pour tout $x \in D$, $-r \leq f(x) \leq r$.

On a les résultats suivants qui sont analogues aux résultats pour les fonctions d'une variable. Voir Analyse I pour les démonstrations et utiliser le critère de la série 7B, Ex. 3. (=X)

Théorème: toute fonction continue sur un ensemble compact est bornée et admet un minimum et un maximum absolu.

┌ Voir démonstration ① en bas ┘

Théorème toute fonction continue $f: C \rightarrow \mathbb{R}$, où $C \subset \mathbb{R}^n$ est un ensemble compact, est uniformément continue sur C .

┌ Voir démonstration ② en bas ┘

Théorème (de la valeur intermédiaire): toute fonction continue sur un ensemble compact, connexe par arc admet toutes les valeurs dans l'intervalle $[m, M]$, où m est le minimum et M le maximum de la fonction.

Démonstration ①

i) f bornée : sinon, $\forall n \in \mathbb{N}^* \exists x_n \in C$ t.q.
 $|f(x_n)| \geq n$. B.W. $\exists \tilde{x}_R = x_{n_R}$ qui
converge, $\lim_{R \rightarrow \infty} \tilde{x}_R = x \in C$ par (*).

$$\Rightarrow \underline{+\infty} = \lim_{R \rightarrow \infty} n_R \leq \lim_{R \rightarrow \infty} |f(\tilde{x}_R)|$$

$\uparrow$
continuité

$$= |f(\lim_{R \rightarrow \infty} \tilde{x}_R)| = |f(x)| \leq \underline{\infty} \quad *$$

ii) $M := \sup \{ f(x) : x \in C \}$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists x_n \in C$ t.q. $f(x_n) \geq M - \frac{1}{n}$.
(propriété du sup). B.W. $\exists \tilde{x}_R = x_{n_R}$ qui converge
 $\lim_{R \rightarrow \infty} \tilde{x}_R = x \in C$ par (*). $\liminf_{R \rightarrow \infty} f(\tilde{x}_R) = f(x) = M$.

par la continuité de f .

$m := \inf \{ f(x) : x \in C \}$ (même démonstration)

Démonstration ②

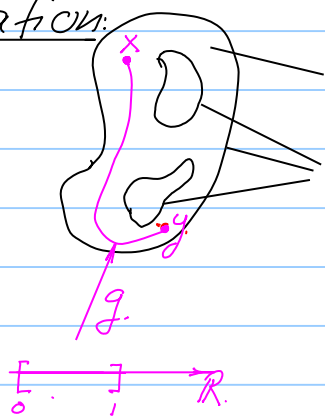
(démonstration par l'absurde)

Si f n'est pas uniformément continue sur C , $\exists \varepsilon > 0$,
 $\forall \delta > 0$, $\exists x, y \in C$, $\|x - y\| \leq \delta$ et $\|f(x) - f(y)\| > \varepsilon$. On
peut donc trouver deux suites $(x_k)_{k \geq 0}$ et $(y_k)_{k \geq 0}$
telles que $\forall \varepsilon > 0$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\|x_k - y_k\| \leq \frac{1}{k}$ et
 $\|f(x_k) - f(y_k)\| > \varepsilon$. De $(x_k)_{k \geq 0}$ on peut extraire par (A)
une sous-suite $(x_{k(p)})_{p \geq 0}$ telle que $\lim_{p \rightarrow \infty} x_{k(p)} = x \in C$
et on a :

$$\|y_{k(p)} - x\| \leq \|y_{k(p)} - x_{k(p)}\| + \|x_{k(p)} - x\| \leq \frac{1}{k(p)} + \|x_{k(p)} - x\|$$

ce qui montre que $\lim_{p \rightarrow \infty} y_{k(p)} = x$. Par la continuité
de la fonction f il existe p_0 tel que $\forall p \geq p_0$
 $\|f(x_{k(p)}) - f(y_{k(p)})\| \leq \varepsilon$ ~~—X—~~

Démonstration:



$C \subset \mathbb{R}^n$ compact, connexe par arc

les bords sont inclus dans C

puisque C est connexe par arc il existe $g: [0, 1] \rightarrow C$, continue, telle que $g(0) = x$ et $g(1) = y$.

Soit $x, y \in C$ tels que $f(x) = m$ et $f(y) = M$ et soit $g: [0, 1] \rightarrow C$ un chemin qui relie x à y , c.-à-d. tel que $g(0) = x$ et $g(1) = y$. Puisque f et g sont continues, la fonction $h = f \circ g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, $h(0) = m$, $h(1) = M$ et h prend donc toutes les valeurs dans l'intervalle $[m, M]$ (voir Analyse I).
Conséquence: f prend toutes les valeurs dans $[m, M]$ sur toute courbe dans C qui relie x à y .

Théorème Soit $C \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble compact, $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f atteint ses extremums

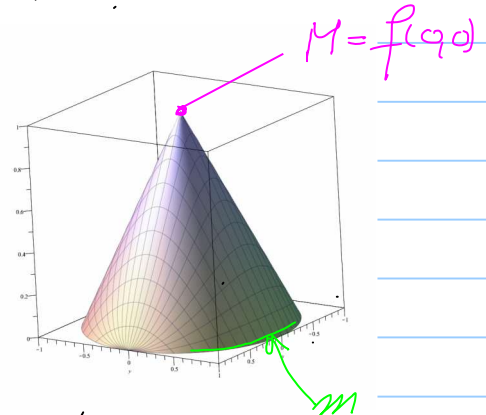
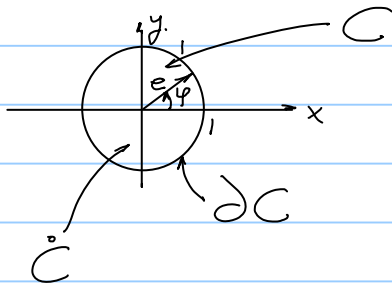
- i) dans $\underbrace{\text{l'intérieur de } C}_{\equiv \overset{\circ}{C}}$ en un point stationnaire
- ii) dans l'intérieur de C en un point où f n'est pas différentiable
- iii) sur le bord ($\equiv$ la frontière) de C ($\equiv \partial C$)

Attention! si $\nabla f(x_0) = 0$ pour x_0 un point dans l'intérieur de C , alors x_0 est de type i) ou ii), selon si f est différentiable en x_0 ou pas.

9.5.2. Exemples, $n=2$ (discussion de fonctions)

i) $f(x,y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ sur $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$.

f est continue sur C , car f continue sur $\mathbb{R}^2$



i) $\nabla f(x,y) = \left(\frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)^T$ existe sur $B(0,1) \setminus \{(0,0)\}$

$$\Rightarrow \nabla f(x,y) \neq (0,0)^T$$

$\Rightarrow$ pas de points stationnaires

ii) en $(0,0)$ la fonction n'est pas différentiable (sinon le gradient y serait bien défini).

$$f(0,0) = 1$$

iii) pour les points du bord on a $x^2 + y^2 = 1$ et $f(\text{point du bord}) = 0$. La fonction f admet donc le minimum en ces points

Conclusions de i) - iii)

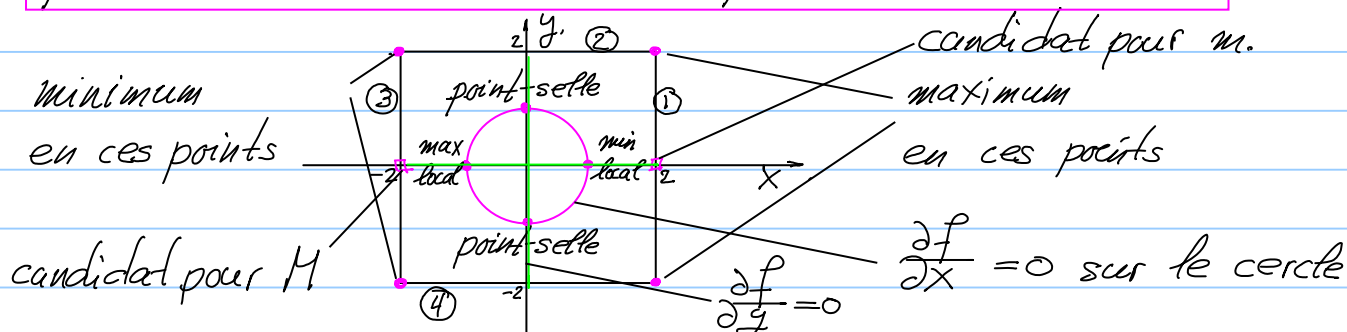
- le maximum de f est M
- le minimum de f est $m = 0$

• $f: C \xrightarrow{\text{surjective}} [0,1] = [m,M]$ car C est compact et convexe par arc, et f est continue sur C .

2) $f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 + xy^2 - x$ sur

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|, |y|\} \leq 2\} \subset \mathbb{R}^2$$

f continue sur C car f continue sur $\mathbb{R}^2$.



i) $\nabla f(x,y) = (x^2 + y^2 - 1, 2xy)^T \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ 2xy = 0 \end{cases}$

les points stationnaires sont :

$$\{(1,0), (0,1), (-1,0), (0,-1)\}$$

$$f(1,0) = -\frac{2}{3}, \quad f(0,\pm 1) = 0, \quad f(-1,0) = \frac{2}{3}.$$

ii) f est différentiable car un polynôme (pas de points dans cette liste).

iii) quatre parties:

- $x=2; -2 \leq y \leq 2: f(2,y) = \frac{2}{3} + 2y^2$ ①
- $y=2; -2 \leq x \leq 2: f(x,2) = \frac{1}{3}x^3 + 3x$ ②
- $x=-2; -2 \leq y \leq 2: f(-2,y) = -\frac{2}{3} - 2y^2$ ③
- $y=-2; -2 \leq x \leq 2: f(x,-2) = \frac{1}{3}x^3 + 3x$ ④

① valeur minimale en $y=0: f(2,0) = \frac{2}{3}$

valeur maximale en $y=\pm 2: f(2,\pm 2) = \frac{26}{3}$

② $\frac{d}{dx}f(x,2) = x^2 + 3 > 0$, $f(x,2)$ est croissant.

valeur minimale en $x=-2: f(-2,2) = -\frac{26}{3}$

valeur maximale en $x=2$: $f(2,2) = \frac{26}{3}$

③ voir ①, valeur minimale en $y=\pm 2$: $f(-2,\pm 2) = -\frac{26}{3}$

valeur maximale en $y=0$: $f(-2,0) = -\frac{2}{3}$

④ identique à ②: $f(-2,-2) = -\frac{26}{3}$, $f(2,-2) = \frac{26}{3}$

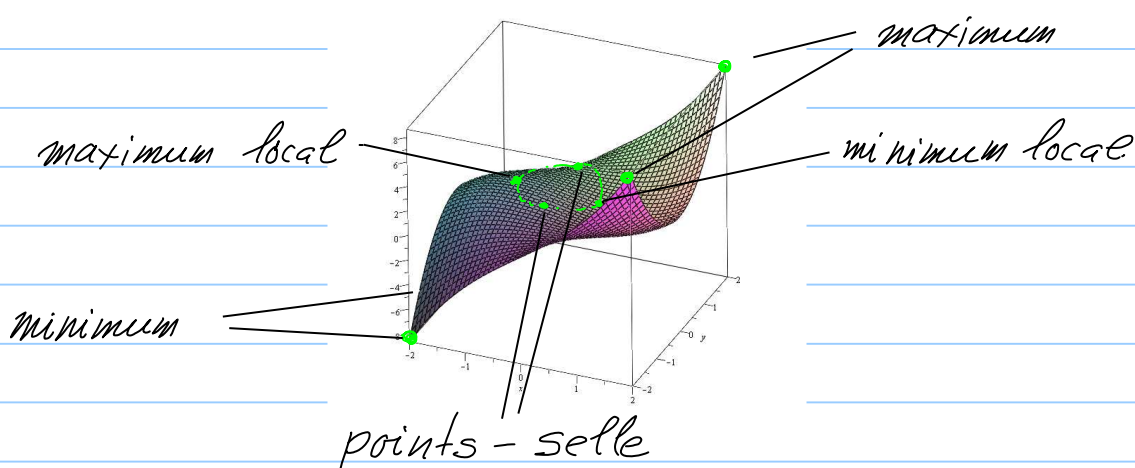
Discussion des points stationnaires (suite de i)

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}, \quad \Lambda_1 = 2x, \quad \Lambda_2 = 4(x^2 - y^2)$$

$(1,0)$: $\Lambda_2 = 4 > 0$, $\Lambda_1 = 2 > 0 \Rightarrow$ minimum local.

$(-1,0)$: $\Lambda_2 = 4 > 0$, $\Lambda_1 = -2 < 0 \Rightarrow$ maximum local

$(0,\pm 1)$: $\Lambda_2 = -4 < 0 \Rightarrow$ points-selle



Conclusion: $m = -\frac{26}{3}$, $M = \frac{26}{3}$ (comparer les valeurs)

9.5.3. Remarques pour le cas $n > 2$

- même procédure que pour $n=2$
- sur le bord on aura typiquement des fonctions de $\mathbb{R}^{n-1}$ dans $\mathbb{R}$
- procéder d'une manière réursive