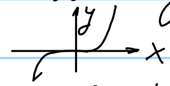
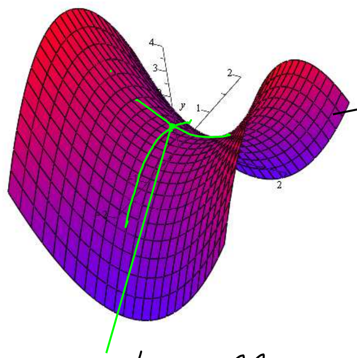
Attention ! un point stationnaire n'est pas forcément un extremum (ce n'était déjà pas le cas pour $n=1$; $f(x)=x^3$,  admet en $x=0$ un point stationnaire qui n'est ni un maximum ni un minimum), car on a aussi les points-selle



point-selle

$f(x,y)=x^2-y^2$; $\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}2x\\-2y\end{pmatrix}$

$\nabla f(0,0)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, donc $(0,0)$ est un point stationnaire car f est de classe C^1!

$f_1(x):=f(x,0)=x^2$ admet un minimum en $x=0$.

$f_2(y):=f(0,y)=-y^2$ admet un maximum en $y=0$.

9.3. Fonctions de classe C^2 : conditions suffisantes pour un extremum ($n=2$)

Théorème (classification des points stationnaires, $n=2$)

Soit $f: D\longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y)\longmapsto f(x,y)$, $D\subset\mathbb{R}^2$ ouvert, $f\in C^2(D)$. Soit $(x_0,y_0)\in D$ un point stationnaire de f (donc $\nabla f(x_0,y_0)=0$) et posons :

$$\Lambda_1\equiv\Lambda_1(x_0,y_0)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) \qquad =\det \boxed{}^{(1)}$$

$$\Lambda_2\equiv\Lambda_2(x_0,y_0)=\det\big(H_f(x_0,y_0)\big) \qquad =\det \boxed{}^{(2)}$$

où

$$H_f(x_0,y_0)\equiv \mathrm{Hess}(f)(x_0,y_0)=\begin{pmatrix}\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)}^{(1)} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)\end{pmatrix}^{(2)}$$

$H_f(x_0,y_0)$ symétrique car $f\in C^2(D)$.

Alors la nature du point stationnaire est donnée par le schéma suivant:

Λ_2	Λ_1	nature du point
>0	>0	minimum local
>0	<0	maximum local
<0		point selle
$=0$		?.

Terminologie: $\det(H_f(x_0,y_0))$ est appelé le hessien de la fonction f en (x_0,y_0)

Démonstration

Pour simplifier la notation on va supposer que $(x_0,y_0)=(0,0)$. On a alors :

$$f(x,y) = f(0,0) + \underbrace{0}_{\text{termes linéaires car } \nabla f(0,0)=0} + \frac{1}{2}\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, H_f(0,0)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\rangle + d^2\varepsilon(x,y)$$

Notation: $H_f(0,0) \equiv H_f \equiv \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$ ← notation simplifiée

Avec cette notation: $\Lambda_1 = r$, $\Lambda_2 = r\cdot t - s^2$

Voir algèbre linéaire

- H_f étant symétrique ses valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$
- $\det(H_f) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \quad (= r\cdot t - s^2 = \Lambda_2)$
- $tr(H_f) = \lambda_1 + \lambda_2 \quad (= r + t)$

• on peut diagonaliser H avec <u>une matrice orthogonale $\mathcal{U}$</u>, et

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

pour un certain $\alpha \in [0, 2\pi[$.

e_1', e_2', les vecteurs propres de H_f normalisés

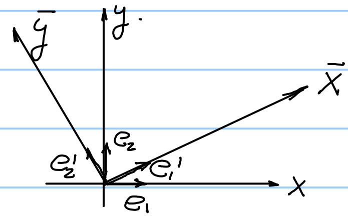
• $\mathcal{U}^T = \mathcal{U}^{-1}$ (matrice orthogonale, $\det \mathcal{U} = 1$)

• on a $\mathcal{U}^T H_f \mathcal{U} = \mathcal{U}^{-1} H_f \mathcal{U} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \equiv D_{iag}$ (*).

(*) $\Longleftrightarrow$ $H_f = \mathcal{U} D_{iag} \mathcal{U}^{-1} = \mathcal{U} D_{iag} \mathcal{U}^T$

$\mathcal{U}$ définit un changement de coordonnées linéaire

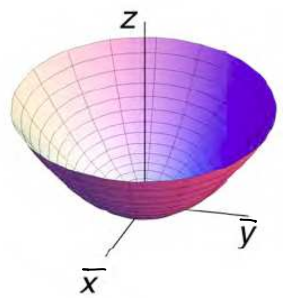
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathcal{U} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$$



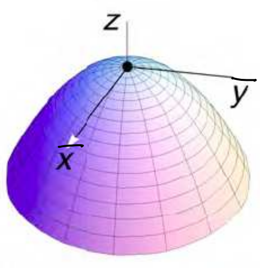
$$\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, H_f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \mathcal{U} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}, H_f \mathcal{U} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}, \mathcal{U}^T H_f \mathcal{U} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} \right\rangle$$

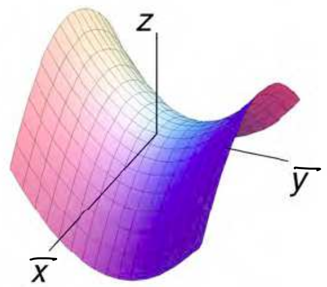
$$= \left\langle \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} \right\rangle = \lambda_1 \bar{x}^2 + \lambda_2 \bar{y}^2$$ ← utiliser les définitions



$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$



$\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$



$\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$
(ou $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$)

$\Longrightarrow$ $\Lambda_2 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$ $\quad$ $\Lambda_2 = \lambda \cdot \lambda_2 > 0$ $\quad$ $\Lambda_2 = \lambda \cdot \lambda_2 < 0$

Discussion des conditions du théorème

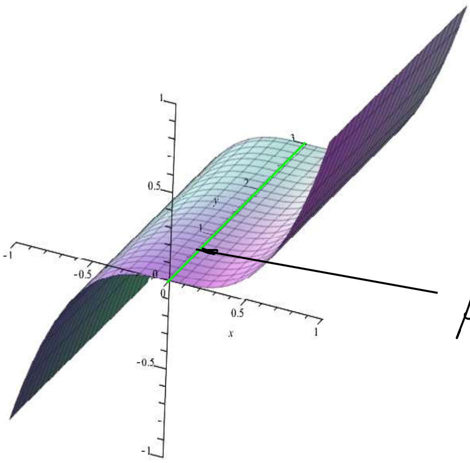
- $\Lambda_2 = r \cdot t - s^2 > 0$, $\Lambda_1 = r > 0 \implies t > 0$ (sinon $\Lambda_2 < 0$)
  $\implies \lambda_1 + \lambda_2 = r + t > 0 \implies \lambda_1$ <u>ou</u> λ_2 est positive.
  Mais $\Lambda_2 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0 \implies \lambda_1$ <u>et</u> λ_2 sont positives
- $\Lambda_2 = rt - s^2 > 0$, $\Lambda_1 = r < 0 \implies t < 0$ (sinon $\Lambda_2 < 0$)
  $\implies \lambda_1 + \lambda_2 = r + t < 0 \Rightarrow \lambda_1$ <u>ou</u> λ_2 est négative
  Mais $\Lambda_2 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0 \Rightarrow \lambda_1$ <u>et</u> λ_2 sont négatives
- $\Lambda_2 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0 \Rightarrow \lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ ou $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$
- si $\Lambda_2 = 0$, la nature du point stationnaire dépend des termes d'ordre supérieur du développement limité.

Exemple 1

$$f(x,y) = x^3$$

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 \\ 0 \end{pmatrix} \underset{x=0}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

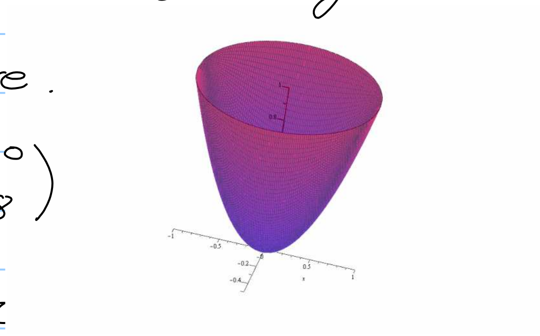


points stationnaires

Tous les points de la forme $(0,y)$ sont des points stationnaires et des points-selles selon notre définition, mais le théorème ne s'applique pas.

Exemple 2

a) $f(x,y) = x^2 + 4y^2 \in C^2(\mathbb{R}^2)$, $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 8y \end{pmatrix} \underset{x=y=0}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$



$(0,0)$ est un point stationnaire.

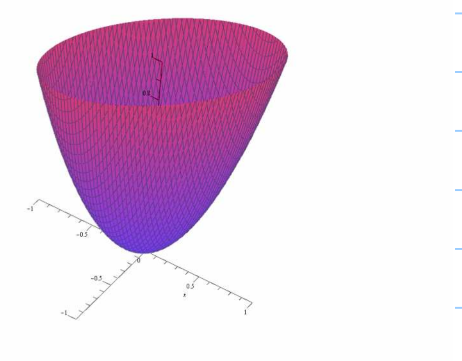
on a $H_f = \operatorname{Hess}(f)(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$

$\Lambda_1 = 2 > 0$, $\Lambda_2 = 2 \cdot 8 = 16 > 0$

$\Longrightarrow$ un minimum local

b) $f(x,y) = \frac{5}{2}x^2 - 3xy + \frac{5}{2}y^2$

$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 5x - 3y \\ -3x + 5y \end{pmatrix} \underset{x=y=0}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$



$(0,0)$ est un point stationnaire

$H_f = \operatorname{Hess}(f)(0,0) = \left(\boxed{\begin{matrix} \boxed{5} & -3 \\ -3 & 5 \end{matrix}}\right)$

$\Lambda_1 = 5$, $\Lambda_2 = 5 \cdot 5 - (-3)(-3) = 16 > 0$

$\Rightarrow$ un minimum local

En fait: $f(x,y) = \frac{1}{2}\left((x+y)^2 + 4(x-y)^2\right) = \Big(\underset{\overset{\parallel}{\bar{x}}}{\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)^2} + 4\underset{\overset{\parallel}{\bar{y}}}{\left(\frac{-x+y}{\sqrt{2}}\right)^2}\Big)$

$= \bar{f}(\bar{x},\bar{y}) = \bar{x}^2 + 4\bar{y}^2$

même fonction que sous a) en d'autres coordonnées

On a $\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}}_{=U}\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$

Changement de variables:

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

vecteurs propres normalisés de H_f

9.4. Fonctions de classe C^2, conditions suffisantes pour un extremum ($n=3$)

Théorème Soit $f: D \to \mathbb{R}$, $(x,y,z) \longmapsto f(x,y,z)$ de classe $C^2(D)$, $D \subset \mathbb{R}^3$ ouvert. Soit $p_0 = (x_0, y_0, z_0) \in D$ un point stationnaire de f ($\nabla f(p_0) = 0$) et posons:

$$H \equiv \operatorname{Hess}(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(p_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(p_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(p_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(p_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(p_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(p_0) \end{pmatrix}$$

$$\Lambda_1 = \det\left(\boxed{}^{(1)}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p_0)$$

$$\Lambda_2 = \det\left(\boxed{}^{(2)}\right) = \ldots$$

$$\Lambda_3 = \det\left(\boxed{}^{(3)}\right) = \det(H)$$

Alors la nature du point stationnaire est donnée par le tableau suivant:

(*) $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3$ $\quad$ $\lambda_1 \cdot \lambda_2$ $\quad$ λ_1 $\quad \leftarrow$ pour H diagonale

Λ_3	Λ_2	Λ_1	nature du point
>0	>0	>0	minimum local
<0	>0	<0	maximum local
$\neq 0$	tous les autres cas (6 cas)		point-selle

Remarque: utiliser (*) (le tableau est aussi valable si H_f est diagonal) pour reconstruir le tableau

Démonstration: comme pour $n=2$. Diagonaliser H_f avec une matrice orthogonale et discuter les signes des valeurs propres en termes de $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$.

Remarque: on a le théorème analogue pour $n>3$.

9.5. Extremums absolus

Revoir le chapitre 2.3 pour la définition des ensembles ouverts et fermés et les définitions du bord et de l'intérieur d'un ensemble

9.5.1. Définitions, théorèmes

Définition: un ensemble $B \subset \mathbb{R}^n$ est appelé borné s'il existe $0<r<\infty$ tel que $B \subset B(0,r)$

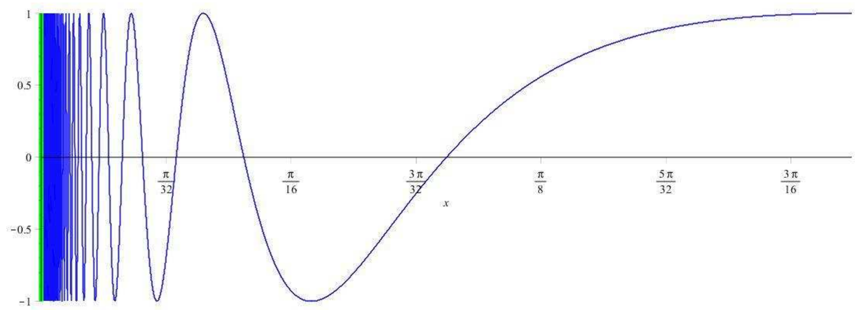
Définition un ensemble $C \subset \mathbb{R}^n$ qui est borné et fermé est appelé compact

Définition un ensemble $D \subset \mathbb{R}^n$, $D \neq \phi$, est connexe s'ils <u>n'existent pas</u> deux sous ensembles <u>ouverts</u> $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ tels que :

$$X \cap Y = \phi, \quad X \cap D \neq \phi, \quad Y \cap D \neq \phi, \quad D \subset X \cup Y$$

Exemple. $D = D_1 \cup D_2$, où

$$\left.\begin{aligned} D_1 &= \{ (x, \sin(\tfrac{1}{x})) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq \tfrac{2}{\pi} \} \\ D_2 &= \{ (0, y) \subset \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 1 \}. \end{aligned}\right\} (*).$$



$D_1 \cap D_2 = \phi$

$D_1 \cap D = D_1 \neq \phi$

$D_2 \cap D = D_2 \neq \phi$

$D = D_1 \cup D_2 \subset D$

mais <u>D est connexe</u> !

Définition un ensemble $D \subset \mathbb{R}^n$, $D \neq \phi$, est <u>connexe par arcs</u> si deux points x, y quelconques de D peuvent être joints dans D par <u>un chemin</u>.

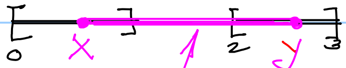
une fonction <u>continue</u> de $[0,1] \to D$ (voir la section 3.0).

Remarque: connexe par arc implique connexe, mais pas vice-versa. D de l'exemple $(*)$ n'est pas connexe par arc.

Exemples: $C = [0,1]$ $(\subset B(0,2) =]-2,2[$, donc borné$)$ compact, connexe par arc.

$C = [0,1] \cup [2,3]$ ($\subset B(0,4) =]-4,4[$, donc borné)

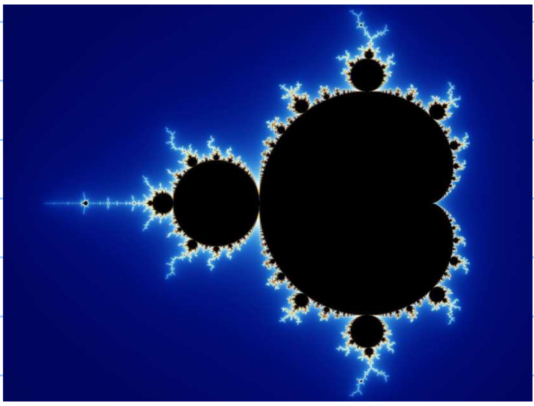
compact, mais ni convexe par arcs, ni convexe.



un chemin qui relie x et y. (mais pas dans C)

prendre $X =]-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$ $Y =]\frac{3}{2}, \frac{7}{2}[$ par exemple.

Ensemble de Mandelbrot



- ensemble compact ✓
- ensemble convexe ✓
- convexe par arc ?

https://fr.wikipedia.org/wiki/Ensemble_de_Mandelbrot

https://www.youtube.com/watch?v=zXTpASSd9xE&feature=youtu.be

Comment vérifier la continuité d'une fonction sur un ensemble compact ?

__Critère:__ Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble ouvert et $C \subset D$ un ensemble compact. Alors la restriction d'une fonction continue $f: D \to \mathbb{R}$ à C est une fonction continue sur C.

__Définition:__ une fonction $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ est appelée bornée (ou bornée sur D) si l'image de f est un ensemble borné, c.-à-d. s'il existe une __constante__ $r > 0$ telle que $\mathrm{Im}(f) \subset B(0, r)$, ou encore, si pour tout $x \in D$, $-r \leq f(x) \leq r$

On a les résultats suivants qui sont analogues aux résultat pour les fonctions d'une variable. Voir Analyse I pour les démonstrations et utiliser le critère de la série 7B, Ex. 3 = (*)

__Théorème:__ toute fonction continue sur un ensemble compact est bornée et admet un minimum et un maximum absolu

⌈Voir démonstration ① en bas⌋

__Théorème__ toute fonction continue $f: C \to \mathbb{R}$, où $C \subset \mathbb{R}^n$ est un ensemble compact, est uniformement continue sur C

⌈Voir démonstration ② en bas⌋

__Théorème (de la valeur intermédiaire)__: toute fonction continue sur un ensemble __compact__, __connexe par arc__ admet toutes les valeurs dans l'intervalle $[m, M]$, où m est le minimum et M le maximum de la fonction

Démonstration ①

i) f bornée : sinon, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\exists$ $x_n \in C$ t.q. $|f(x_n)| \geq n$. BW $\exists$ $\tilde{x}_k = x_{n_k}$ qui converge, $\lim\limits_{k\to\infty} \tilde{x}_k = x \in C$ par (*)

$$\Rightarrow \underline{+\infty} = \lim_{k\to\infty} n_k \leq \lim_{k\to\infty} |f(\tilde{x}_k)|$$

$$\underset{\text{continuité}}{=} \left|f\left(\lim_{k\to\infty} \tilde{x}_k\right)\right| = |f(x)| \underline{< \infty} \quad \text{*}$$

ii) $\underline{M := \sup\{f(x) : x \in C\}}$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exists$ $x_n \in C$ t.q. $f(x_n) \geq M - \frac{1}{n}$. (propriété du sup). B.W. $\exists$ $\tilde{x}_k = x_{n_k}$ qui converge $\lim\limits_{k\to\infty} \tilde{x}_k = x \in C$ par (*). $\lim\limits_{k\to\infty} f(\tilde{x}_k) = f(x) = M$.

par la continuité de f.

$\underline{m := \inf\{f(x) : x \in C\}}$ (même démonstration)

Démonstration 2

(démonstration par l'absurde)

Si f n'est pas uniformement continue sur C, $\exists \varepsilon>0$, $\forall \delta>0$, $\exists x, y \in C$, $\|x-y\| \leq \delta$ et $\|f(x)-f(y)\|>\varepsilon$. On peut donc trouver deux suites $(x_k)_{\geq 0}$ et $(y_k)_{k\geq 0}$ telles que $\exists \varepsilon>0$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\|x_k - y_k\| \leq \frac{1}{k}$ et $|f(x_k) - f(y_k)| > \varepsilon$. De $(x_k)_{k\geq 0}$ on peut extraire une sous-suite $(x_{k(p)})_{p\geq 0}$ telle que $\lim_{p\to\infty} x_{k(p)} = x \in C$ par (*)

et on a :

$$\|y_{k(p)} - x\| \leq \|y_{k(p)} - x_{k(p)}\| + \|x_{k(p)} - x\| \leq \frac{1}{k(p)} + \|x_{k(p)} - x\|$$

ce qui montre que $\lim_{k\to\infty} y_{k(p)} = x$. Par la continuité de la fonction f il existe p_0 tel que $\forall p \geq p_0$ $|f(x_{k(p)}) - f(y_{k(p)})| \leq \varepsilon$ $\cancel{\quad}$