

9. Extremums locaux et absolus d'une fonction de n variables

9.1. Définitions

Définition soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $\underline{x} \mapsto f(\underline{x})$, $D \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, $\underline{x}_0 \in D$. On dit que f admet en $\underline{x}_0$:

- 1) un maximum local (ou relatif) si $f(\underline{x}) \leq f(\underline{x}_0)$ pour tout $\underline{x}$ dans un voisinage de $\underline{x}_0$.
un minimum local (ou relatif) si $f(\underline{x}) \geq f(\underline{x}_0)$ pour tout $\underline{x}$ dans un voisinage de $\underline{x}_0$.
- 2) un maximum (global ou absolu) si $f(\underline{x}) \leq f(\underline{x}_0)$ pour tout $\underline{x} \in D$
un minimum (global ou absolu) si $f(\underline{x}) \geq f(\underline{x}_0)$ pour tout $\underline{x} \in D$
- 3) un point stationnaire (ou point critique) si f est différentiable en $\underline{x}_0$ et $\nabla f(\underline{x}_0) = 0$
- 4) un point-selle, si $\underline{x}_0$ est un point stationnaire et si dans tout voisinage de $\underline{x}_0$ il existe des points $\underline{x}_1$ et $\underline{x}_2$ tels que $f(\underline{x}_1) < f(\underline{x}_0) < f(\underline{x}_2)$

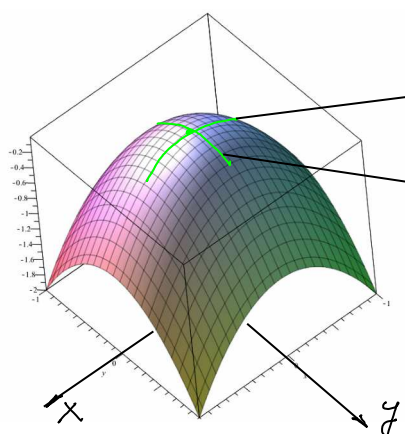
Terminologie: extremum $\Leftrightarrow$ maximum ou minimum

Remarque: la définition de point-selle dépend de l'auteur

9.2. f de classe $C^1(D)$; condition nécessaire pour un extremum

Théorème soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$, $D \subset \mathbb{R}^n$ ouvert $f \in C^1(D)$. Si f admet un extremum local en $x_0 \in D$, alors x_0 est un point stationnaire de f , c.-à-d. $\nabla f(x_0) = 0$

Démonstration ($n=2$) $(x,y) \mapsto f(x,y)$, $x_0 = (x_0, y_0)$:



$$f(x, y_0) = f_1(x)$$

$$f(x_0, y) = f_2(y)$$

Soit $f_1(x) := f(x, y_0)$. Alors:

$$f_1(x) = f(x, y_0) \leq f(x_0, y_0) = f_1(x_0) \quad (\text{cas d'un maximum})$$

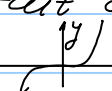
$$f_1(x) = f(x, y_0) \geq f(x_0, y_0) = f_1(x_0) \quad (\text{cas d'un minimum})$$

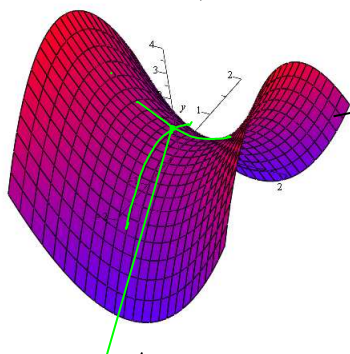
pour x dans un voisinage de x_0 . La fonction f_1 admet donc un maximum ou un minimum local en x_0 et f_1 est de classe C^1 , car $f_1'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y_0)$.

Donc $f_1'(x_0) = 0$ (voir Analyse I). Donc on a $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$.

Le même argument pour $f_2(y) = f(x_0, y)$ montre que $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$. Ceci montre que

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)^T = 0$$

Attention! un point stationnaire n'est pas forcément un extremum (ce n'était déjà pas le cas pour $n=1$; $f(x) = x^3$,  admet en $x=0$ un point stationnaire qui n'est ni un maximum ni un minimum), car on a aussi les points-selle



point-selle

$f(x, y) = x^2 - y^2$; $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \end{pmatrix}$
 $\nabla f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc $(0, 0)$ est un point stationnaire car f est de classe C^1 !
 $f_1(x) := f(x, 0) = x^2$ admet un minimum en $x = 0$.

$f_2(y) := f(0, y) = -y^2$ admet un maximum en $y = 0$.

9.3. Fonctions de classe C^2 : conditions suffisantes pour un extremum ($n=2$)

Théorème (classification des points stationnaires, $n=2$)

Soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$, $D \subset \mathbb{R}^2$ ouvert, $f \in C^2(D)$. Soit $(x_0, y_0) \in D$ un point stationnaire de f (donc $\nabla f(x_0, y_0) = 0$) et posons:

$$\Lambda_1 \equiv \Lambda_1(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) = \det \begin{pmatrix} \square \end{pmatrix}^{(1)}$$

$$\Lambda_2 \equiv \Lambda_2(x_0, y_0) = \det(H_f(x_0, y_0)) = \det \begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix}^{(2)}$$

où

$$H_f(x_0, y_0) \equiv \text{Hess}(f)(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)}^{(1)} & \boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)}^{(2)} \\ \boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)} & \boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)} \end{pmatrix}$$

$H_f(x_0, y_0)$ symétrique car $f \in C^2(D)$.

Alors la nature du point stationnaire est donnée par le schéma suivant:

Λ_2	Λ_1	nature du point
> 0	> 0	minimum local
> 0	< 0	maximum local
< 0		point selle
$= 0$		?

Terminologie: $\det(H_f(x_0, y_0))$ est appelé le hessien de la fonction f en (x_0, y_0)

Démonstration

Pour simplifier la notation on va supposer que $(x_0, y_0) = (0, 0)$. On a alors :

$$f(x, y) = f(0, 0) + \underset{\text{termes linéaires car } \nabla f(0, 0) = 0}{0} + \frac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, H_f(0, 0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle + o^2(x, y)$$

Notation: $H_f(0, 0) \equiv H_f \equiv \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$ — notation simplifiée

Avec cette notation: $\Lambda_1 = r$, $\Lambda_2 = r \cdot t - s^2$

Voir algèbre linéaire

- H_f étant symétrique ses valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$
- $\det(H_f) = \lambda_1 \cdot \lambda_2$ ($= r \cdot t - s^2 = \Lambda_2$)
- $\text{tr}(H_f) = \lambda_1 + \lambda_2$ ($= r + t$)

- on peut diagonaliser H avec une matrice orthogonale U , et

$$U = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

pour un certain $\alpha \in [0, 2\pi[$.

e_1', e_2' , les vecteurs propres de H_f normalisés

- $U^T = U^{-1}$ (matrice orthogonale, $\det U = 1$)

- on a $U^T H_f U = U^{-1} H_f U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \equiv \text{Diag} \quad (*)$

$$(*) \Leftrightarrow H_f = U \text{Diag} U^{-1} = U \text{Diag} U^T$$

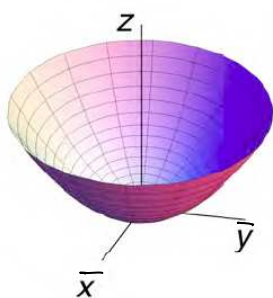
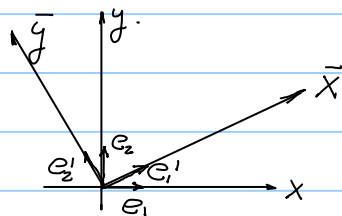
U définit un changement de coordonnées linéaire

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$$

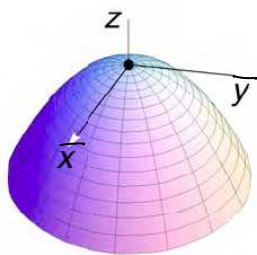
$$\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, H_f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle U \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}, H_f U \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}, U^T H_f U \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} \right\rangle$$

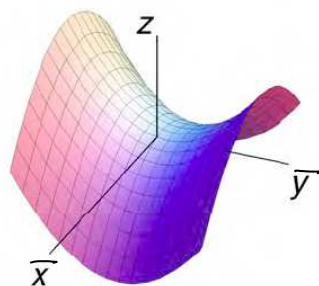
$$= \left\langle \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} \right\rangle = \lambda_1 \bar{x}^2 + \lambda_2 \bar{y}^2 \leftarrow \begin{cases} \text{utiliser} \\ \text{les} \\ \text{définitions} \end{cases}$$



$$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$$



$$\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$$



$$\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$$

(ou $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$)

$$\Rightarrow \Lambda_2 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$$

$$\Lambda_2 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$$

$$\Lambda_2 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$$

Discussion des conditions du théorème

- $\Lambda_2 = r \cdot t - s^2 > 0$, $\Lambda_1 = r > 0 \Rightarrow t > 0$ (sinon $\Lambda_2 < 0$)
 $\Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 = r + t > 0 \Rightarrow \lambda_1$ ou λ_2 est positive.
Mais $\Lambda_2 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0 \Rightarrow \lambda_1$ et λ_2 sont positives
- $\Lambda_2 = r \cdot t - s^2 > 0$, $\Lambda_1 = r < 0 \Rightarrow t < 0$ (sinon $\Lambda_2 < 0$)
 $\Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 = r + t < 0 \Rightarrow \lambda_1$ ou λ_2 est négative
Mais $\Lambda_2 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0 \Rightarrow \lambda_1$ et λ_2 sont négatives
- $\Lambda_2 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0 \Rightarrow \lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ ou $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$
- si $\Lambda_2 = 0$, la nature du point stationnaire dépend des termes d'ordre supérieur du développement limité.

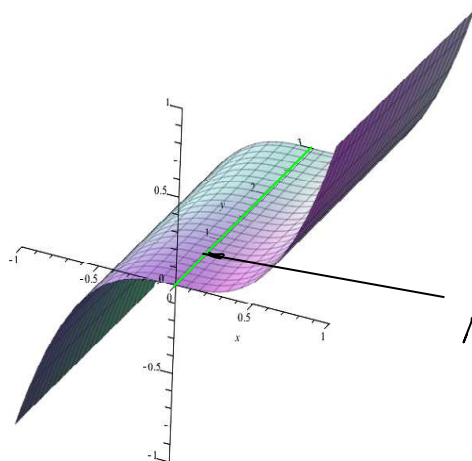
Exemple 1

$$f(x, y) = x^3$$

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{x=0}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$



points stationnaires

Tous les points de la forme $(0, y)$ sont des points stationnaires et des points-selles selon notre définition, mais le théorème ne s'applique pas.

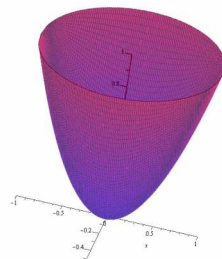
Exemple 2

a) $f(x,y) = x^2 + 4y^2 \in C^2(\mathbb{R}^2)$, $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 8y \end{pmatrix} \xrightarrow{x=y=0} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$(0,0)$ est un point stationnaire.

on a $H_f \equiv \text{Hess}(f)(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$

$\Lambda_1 = 2 > 0$, $\Lambda_2 = 2 \cdot 8 = 16 > 0$
 $\Rightarrow$ un minimum local



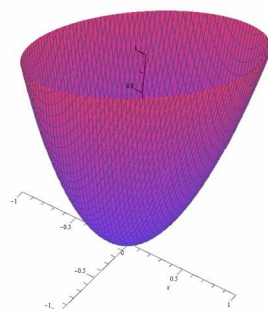
b) $f(x,y) = \frac{5}{2}x^2 - 3xy + \frac{5}{2}y^2$

$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 5x - 3y \\ -3x + 5y \end{pmatrix} \xrightarrow{x=y=0} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$(0,0)$ est un point stationnaire

$H_f = \text{Hess}(f)(0,0) = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$

$\Lambda_1 = 5$, $\Lambda_2 = 5 \cdot 5 - (-3)(-3) = 16 > 0$
 $\Rightarrow$ un minimum local



En fait: $f(x,y) = \frac{1}{2}((x+y)^2 + 4(x-y)^2) = \left(\underbrace{\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)}_{\bar{x}}\right)^2 + 4\left(\underbrace{\left(\frac{-x+y}{\sqrt{2}}\right)}_{\bar{y}}\right)^2$
 $= \bar{f}(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{x}^2 + 4\bar{y}^2$

même fonction que sous a) en d'autres coordonnées

On a $\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}}_{=U} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$

Changement de variables:

$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

↑
vecteurs propres normalisés de H_f

9.4. Fonctions de classe C^2 , conditions suffisantes pour un extremum ($n=3$)

Théorème Soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$ de classe $C^2(D)$, $D \subset \mathbb{R}^3$ ouvert. Soit $p_0 = (x_0, y_0, z_0) \in D$ un point stationnaire de f ($\nabla f(p_0) = 0$) et posons:

$$H \equiv \text{Hess}(f) = \begin{pmatrix} \boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p_0)}^{(1)} & \boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p_0)}^{(2)} & \boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(p_0)}^{(3)} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(p_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(p_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(p_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(p_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(p_0) \end{pmatrix}$$

$$\Lambda_1 = \det(\boxed{\phantom{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p_0)}}^{(1)}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p_0)$$

$$\Lambda_2 = \det(\boxed{\phantom{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p_0)} \phantom{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p_0)}}^{(2)}) = \dots$$

$$\Lambda_3 = \det(\boxed{\phantom{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p_0)} \phantom{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p_0)} \phantom{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(p_0)}}^{(3)}) = \det(H)$$

Alors la nature du point stationnaire est donnée par le tableau suivant:

(*) $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3$ $\lambda_1 \cdot \lambda_2$ λ_1 $\leftarrow$ pour H diagonal

Λ_3	Λ_2	Λ_1	nature du point
> 0	> 0	> 0	minimum local
< 0	> 0	< 0	maximum local
$\neq 0$	tous les autres cas (6 cas)		point-selle

Remarque: utiliser (*) (le tableau est aussi valable si H_f est diagonal) pour reconstruire le tableau

┌ Démonstration: comme pour $n=2$. Diagonaliser H_f avec une matrice orthogonale et discuter les signes des valeurs propres en termes de $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$. ┐

Remarque: on a le théorème analogue pour $n > 3$.