

# Analyse II

## Examen

### Partie commune

### Printemps 2017

---

Les notations et la terminologie de cet énoncé sont celles utilisées dans les séries d'exercices et le cours d'Analyse II du semestre de printemps 2017.

---

- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  - +3 points si la réponse est correcte,
  - 0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs croix,
  - 1 point si la réponse est incorrecte.
- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :
  - +1 point si la réponse est correcte,
  - 0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs croix,
  - 1 point si la réponse est incorrecte.

## Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question mettre une croix dans la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'une seule réponse correcte par question.

**Question 1 :** La solution  $u(t)$  de l'équation différentielle

$$u' + u^2 \sin(t) = 0$$

pour  $t \in \mathbb{R}$  qui satisfait la condition initiale  $u(0) = \frac{1}{4}$  vérifie aussi :

- $u(\pi) = \frac{1}{2}$
- $u(\pi) = \frac{1}{6}$
- $u(\pi) = \frac{1}{4e^2}$
- $u(\pi) = \frac{e^2}{4}$

**Question 2 :** La solution  $y(x)$  de l'équation différentielle

$$y' + 3x^2 y = -6x^2 e^{-x^3}$$

pour  $x \in \mathbb{R}$  qui satisfait la condition initiale  $y(1) = 0$  vérifie aussi :

- $y(0) = 2$
- $y(0) = 1 - e^{-2}$
- $y(0) = -2$
- $y(0) = e^2 - 1$

**Question 3 :** La solution  $u(t)$  de l'équation différentielle

$$u'' + 2u' + u = e^{-t}$$

pour  $t \in \mathbb{R}$  qui satisfait les conditions initiales  $u(0) = 1$  et  $u'(0) = 0$  vérifie aussi :

- $u(-1) = -\frac{1}{2}e - e^{-1}$
- $u(-1) = \frac{5}{2}e$
- $u(-1) = \frac{1}{2}e$
- $u(-1) = e^{-1} - e^2 + \frac{1}{2}e^{-1}$

**Question 4 :** Soit la fonction  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(x, y) = \text{Log}(4 - (x + y)^2),$$

où  $D \subset \mathbb{R}^2$  est le plus grand sous-ensemble de  $\mathbb{R}^2$  sur lequel l'expression  $f(x, y)$  est bien définie. Alors :

- l'ensemble  $D$  est fermé et borné
- l'ensemble  $D$  est borné, mais pas fermé
- l'ensemble  $D$  est fermé, mais pas borné
- l'ensemble  $D$  n'est ni fermé, ni borné

**Question 5 :** Soit la courbe  $\gamma : [3, 8] \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par

$$\gamma(t) = \left( 3t, 2t^{\frac{3}{2}} \right)^T.$$

La longueur de la courbe est :

- 540
- 45
- 38
- 3

**Question 6 :** Considérer les deux limites suivantes :

$$(A) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y^2}{x^4 + y^8}, \quad (B) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 y}{x^4 + y^8}.$$

Alors :

- la limite (A) existe mais la limite (B) n'existe pas
- les deux limites existent
- la limite (B) existe mais la limite (A) n'existe pas
- les deux limites n'existent pas

**Question 7 :** Soient  $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u + v \neq 0\}$  et  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par

$$f(u, v) = \text{Log}(u^2 + 2uv + v^2).$$

Soit  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow D$  une fonction différentiable telle que  $g(0, 3) = (0, -3)$  et

$$J_g(0, 3) = \begin{pmatrix} -9 & 0 \\ -3 & 3 \end{pmatrix},$$

où  $J_g$  est la matrice jacobienne de  $g$ . Si  $h = f \circ g$ , alors :

- $\nabla h(0, 3) = (0, 0)^T$
- $\nabla h(0, 3) = (6, 0)^T$
- $\nabla h(0, 3) = (8, -2)^T$
- $\nabla h(0, 3) = (0, 6)^T$

**Question 8 :** Soit la fonction  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^5 + xy^4}{(x^2 + y^2)^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Alors :

- $f$  n'est pas continue en  $(0, 0)$
- $f$  est continue en  $(0, 0)$ , mais  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$  n'existent pas
- $f$  est de classe  $C^1(\mathbb{R}^2)$
- $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$  existent mais  $f$  n'est pas différentiable en  $(0, 0)$

**Question 9 :** Soit la fonction  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^2 y + e^{yz} \\ yz + x \end{pmatrix}.$$

La matrice jacobienne de  $f$  évaluée en  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  est :

$\begin{pmatrix} 2xy & x^2 + ze^{yz} & ye^{yz} \\ 2zy & z & y \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2xy & 1 \\ x^2 + ze^{yz} & z \\ ye^{yz} & y \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2xy & x^2 + ze^{yz} & ye^{yz} \\ 1 & z & y \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2xy & 2zy \\ x^2 + ze^{yz} & z \\ ye^{yz} & y \end{pmatrix}$

**Question 10 :** Soient la fonction  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  et le champ de vecteurs  $\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  définis par

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \quad \text{et} \quad \mathbf{v}(x, y, z) = \left( \frac{1}{2}x^2, \frac{1}{2}y^2, \frac{1}{2}z^2 \right)^T.$$

Alors la fonction

$$g = \operatorname{div}(f \mathbf{v}) - f \operatorname{div}(\mathbf{v})$$

satisfait pour tout  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  :

$g(x, y, z) = f(x, y, z)$

$g(x, y, z) = 2 \langle \nabla f, \mathbf{v} \rangle(x, y, z)$ , avec  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le produit scalaire canonique sur  $\mathbb{R}^3$

$g(x, y, z) = f(x^2, y^2, z^2)$

$g(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3$

**Question 11 :** L'ensemble

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{4}z^2 = 4 \right\}$$

est le graphe d'une fonction différentiable dans un voisinage du point  $p = (-1, 2, -2) \in S$ .

L'équation du plan tangent à  $S$  en  $p$  est :

$x + y + z - 1 = 0$

$2x - 2y + z + 8 = 0$

$x + y + z + 1 = 0$

$x + y + z - 3 = 0$

**Question 12 :** Soit la fonction  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(x, y, z) = (1 + x)y^2|z|^3.$$

Alors la dérivée directionnelle de  $f$  au point  $(0, 1, 1)$  suivant le vecteur  $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T$  est égale à :

- 4
- $2\sqrt{3}$
- 6
- $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T$

**Question 13 :** Soient la fonction  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(x, y) = \frac{2x}{x^2 + y^2}$$

et le polynôme de Taylor d'ordre deux de  $f$  autour du point  $(x, y) = (1, -1)$ ,

$$p_2(x, y) = a_0 + a_1(x - 1) + a_2(y + 1) + a_3(x - 1)^2 + a_4(x - 1)(y + 1) + a_5(y + 1)^2,$$

avec  $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \in \mathbb{R}$ . Alors le coefficient  $a_4$  vaut :

- $a_4 = -1$
- $a_4 = 1$
- $a_4 = -2$
- $a_4 = 2$

**Question 14 :** La fonction  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(x, y) = x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 2xy - y^2$$

possède :

- deux points-selle et un point de minimum local
- deux points-selle et un point de maximum local
- trois points-selle
- un point-selle, un point de maximum local et un point de minimum local

**Question 15 :** Soit la fonction  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(x, y, z) = (x - z)^2 + y^2$$

et soit  $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4$ . Alors, sous la contrainte  $g(x, y, z) = 0$ ,

- la fonction  $f$  atteint son minimum absolu en un seul point
- la fonction  $f$  atteint son maximum absolu en un seul point
- la fonction  $f$  atteint son maximum absolu en  $(\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2})$
- la fonction  $f$  n'est pas bornée

**Question 16 :** Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Alors l'intégrale

$$\int_0^1 \left( \int_{-\sqrt{y}}^0 f(x, y) dx \right) dy + \int_1^{\sqrt{2}} \left( \int_{-\sqrt{2-y^2}}^0 f(x, y) dx \right) dy$$

est égale à :

$\int_0^1 \left( \int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} f(x, y) dy \right) dx$

$\int_{-1}^1 \left( \int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} f(x, y) dy \right) dx$

$\int_{-1}^0 \left( \int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} f(x, y) dy \right) dx$

$\int_{-1}^0 \left( \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{-x^2} f(x, y) dy \right) dx$

**Question 17 :** Soit  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, -x \leq y \leq x\}$ .

Alors l'intégrale

$$\int_D (x^2 - y^2) dx dy$$

vaut :

$\frac{175\pi}{8}$

$\frac{7\pi}{8}$

$\frac{7}{4}$

$\frac{175}{4}$

**Question 18 :** Soit  $D$  la région de  $\mathbb{R}^3$  délimitée par les quatre plans  $x = 0, y = 0, z = 0$  et  $x + y + z = 1$ . Alors l'intégrale

$$\int_D \sin(x + y + z) dx dy dz$$

vaut :

$\sin(1) + 1$

$1$

$\frac{1}{2} \cos(1) + \sin(1) - 1$

$\frac{1}{2} \cos(1)$

## Deuxième partie, questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question, mettre une croix (sans faire de ratures) dans la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou dans la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire, si elle est parfois fausse).

**Question 19 :** Soit  $y(x)$  une solution de l'équation différentielle linéaire inhomogène du deuxième ordre  $y'' + x^2 y' = 4$ . Alors pour tout  $C \in \mathbb{R}$ , la fonction  $y_1(x) = y(x) + C$  est aussi une solution de cette équation différentielle.

VRAI       FAUX

**Question 20 :** Soit  $(u_n)_{n \geq 1}$ , avec  $u_n = (x_n, y_n, z_n) \in \mathbb{R}^3$ , une suite divergente. Alors  $(x_n)_{n \geq 1}$  est une suite divergente dans  $\mathbb{R}$ .

VRAI       FAUX

**Question 21 :** Soit  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  une fonction de classe  $C^2(\mathbb{R}^3)$ . Alors en tout point  $p \in \mathbb{R}^3$  la matrice jacobienne  $J_f(p)$  est une matrice symétrique.

VRAI       FAUX

**Question 22 :** Soient  $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  et  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue sur  $D$  telle que  $\lim_{t \rightarrow 0} f(t, t) = 1$ . Alors  $\lim_{t \rightarrow 0} f(t, 0) = 1$  et  $\lim_{t \rightarrow 0} f(0, t) = 1$ .

VRAI       FAUX

**Question 23 :** Soient  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  et  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  deux fonctions différentiables. Alors en tout point  $p \in \mathbb{R}^3$  les matrices jacobienes de  $f$ ,  $g$ , et  $f + g$  satisfont

$$J_{f+g}(p) = J_f(p) + J_g(p).$$

VRAI       FAUX

**Question 24 :** Soit  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  une fonction différentiable. Alors la fonction composée  $f = g \circ g$  est différentiable, et en tout point  $p \in \mathbb{R}^3$ , les matrices jacobienes de  $f$  et  $g$  satisfont

$$\det J_f(p) = (\det J_g(p))^2.$$

VRAI       FAUX

**Question 25 :** Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^2(\mathbb{R}^n)$ . Alors  $f$  est différentiable en tout point de  $\mathbb{R}^n$ .

VRAI       FAUX

**Question 26 :** Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction telle qu'au point  $p \in \mathbb{R}^n$  la dérivée directionnelle existe suivant tout vecteur unité  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ . Alors  $f$  est différentiable en  $p$ .

VRAI       FAUX

**Question 27 :** Soient  $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$  et  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction quelconque. Si  $f$  n'est pas bornée sur  $D$ , alors  $f$  n'est pas continue sur  $D$ .

VRAI       FAUX

**Question 28 :** Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Alors :

$$\int_0^1 \left( \int_0^1 f(x, y) dy \right) dx \leq \int_0^2 \left( \int_0^2 f(x, y) dy \right) dx .$$

VRAI       FAUX