

Notes “inofficielles” du cours

# Géométrie Riemannienne

automne 2010

P. Buser / EPFL



## Bibliographie

(Les livres marqués d'une \* sont disponibles pour consultation (avec prêt exclu) à la bibliothèque de la Section de Mathématiques dans le Learning Center)

W.M. Boothby\* :

*An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry*, Second edition, Academic Press, Orlando, Florida, 1986.  
ISBN 0-12-116052-1.

(Texte avec l'accent sur les fondements topologiques et analytiques)

I. Chavel :

*Riemannian geometry : a modern introduction*, Cambridge Tracts in mathematics 108, Cambridge University Press, Cambridge, Melbourne, New York, 1993.  
ISBN 0-521-43201-4.

(Texte avancé avec des chapitres choisis)

M.P. do Carmo\* :

*Riemannian geometry*, Birkhäuser Verlag, Boston, Basel, Berlin, 1992.  
ISBN 0-8176-3490-8.

(Texte proche du cours ; le livre procède de bonne vitesse sans être compliqué)

S. Gallot, D. Hulin, J. Lafontaine\* :

*Riemannian geometry*, Universitext, Third edition, Springer Verlag, New York, 2004.  
ISBN 3-540-20493-8.

(Un cours d'introduction assez accessible)

E. Hebey :

*Introduction à l'analyse non linéaire sur les variétés*, Arts et Sciences, Diderot Éditeur, Paris, 1997.  
ISBN 2-84134-031-7.

(Vise l'analyse sur les variétés ; les premières 150 pages donnent une introduction condensée mais lisible)

J.M. Lee\* :

*Riemannian manifolds, an introduction to curvature*, Graduate texts in mathematics 176, Springer Verlag, New York, etc. 1997.  
ISBN 0-387-98271-X.

(Un livre aisé dont le contenu est assez proche du cours)

P. Petersen\* :

*Riemannian geometry*, Graduate texts in mathematics 171, Second edition, Springer Verlag, New York, etc. 2006.  
ISBN 0-387-98271-X.

(Un livre dans la ligne du cours mais allant beaucoup plus loin)

## Chapitre A Variétés différentiables

Le concept de base pour ce cours est la *variété différentiable*. Nous en donnons une introduction et étudions quelques exemples.

### Notions topologiques

Rappelons d'abord la notion d'espace topologique.

**A.1 Définition.** Soit un ensemble non vide  $X$ . Une *topologie sur  $X$*  est une famille  $\mathcal{O}$  de sous-ensembles de  $X$  telle que les conditions suivantes sont vérifiées.

- (T<sub>1</sub>)  $\emptyset \in \mathcal{O}$  et  $X \in \mathcal{O}$  (où  $\emptyset$  est l'ensemble vide) ;
- (T<sub>2</sub>)  $V_1, \dots, V_n \in \mathcal{O}$  implique  $\bigcap_{i=1}^n V_i \in \mathcal{O}$  ;
- (T<sub>3</sub>)  $\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$  implique  $\bigcup_{V \in \mathcal{O}'} V \in \mathcal{O}$ .

Étant donné une telle famille  $\mathcal{O}$ , on appelle  $X$ , ou plus précisément le couple  $(X, \mathcal{O})$ , un *espace topologique*. Les  $V \in \mathcal{O}$  sont appelés les *ouverts* de la topologie.

Le couple  $(X, \mathcal{O})$  forme un *espace de Hausdorff* si de plus l'axiome suivant est vérifié.

- (T<sub>4</sub>) Pour tout  $p, q \in X$  avec  $p \neq q$  il existe  $V_p, V_q \in \mathcal{O}$  tels que  $p \in V_p$ ,  $q \in V_q$  et  $V_p \cap V_q = \emptyset$ .

Les notions élémentaires des espaces topologiques comme la compacité, les fonctions continues, les homéomorphismes etc. sont supposées connues.

**A.2 Exemple** (Espaces métriques). Rappelons qu'un ensemble non vide  $M$  muni d'une fonction  $\delta : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  est appelé un *espace métrique* (et  $\delta$  est une *fonction de distance* ou aussi une *métrique*) si les trois axiomes suivants sont vérifiés pour  $x, y, z \in M$ .

- (i)  $\delta(x, y) \geq 0$ , avec égalité si et seulement si  $x = y$  ;
- (ii)  $\delta(x, y) = \delta(y, x)$  ;
- (iii)  $\delta(x, y) + \delta(y, z) \geq \delta(x, z)$  (inégalité du triangle).

Considérons à présent un tel espace. Pour tout  $p \in M$  et  $\varepsilon > 0$  on a la *boule métrique de rayon  $\varepsilon$  centrée en  $p$*

$$B_p^\varepsilon(M) = \{x \in M \mid \delta(x, p) < \varepsilon\}.$$

Un sous-ensemble  $U \subset M$  est alors appelé un *ouvert* si pour tout  $p \in U$  il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $B_p^\varepsilon(M) \subset U$ . Les ouverts ainsi définis forment une topologie sur  $M$ . De plus,  $M$  est un espace de Hausdorff. On appelle cette topologie la *topologie induite* par la distance  $\delta$  ou aussi la *topologie métrique*.

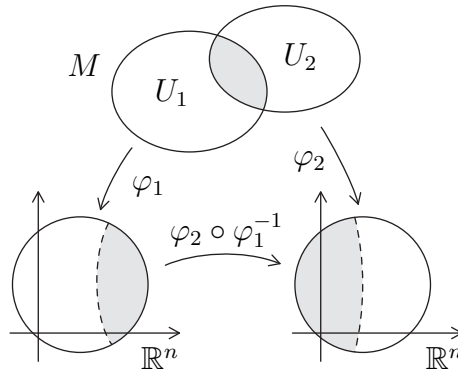


FIGURE A.1. Changement de cartes

Un cas particulier de l'exemple précédent est l'espace  $\mathbb{R}^n$  muni de la fonction de distance  $\delta(x, y) = \|x - y\|$ . La topologie induite par cette distance est la topologie usuelle de  $\mathbb{R}^n$ .

## Variétés

Nous procédons à l'introduction des variétés. Ce sont des espace topologiques qui sont “localement comme  $\mathbb{R}^n$ .”

**A.3 Définition.** Une *variété topologique de dimension  $n$*  est un espace de Hausdorff  $M$  tel que pour tout  $p \in M$  il existe un voisinage ouvert  $U \subset M$  avec  $p \in U$ , un voisinage ouvert  $U' \subset \mathbb{R}^n$  et un homéomorphisme

$$\varphi : U \rightarrow U'.$$

Les couples  $(U, \varphi)$  sont appelés des *cartes*,  $U$  étant le *domaine de la carte* et  $\varphi$  l'*application de coordonnées*. Au lieu de “carte” on dit parfois aussi “système de coordonnées”.

Un théorème de topologie dit qu'un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  ne peut être homéomorphe à un ouvert de  $\mathbb{R}^m$  si  $n \neq m$ . Par conséquent, *la dimension d'une variété topologique est uniquement déterminée*. Nous la noterons par  $\dim M$ . Pour indiquer que la variété  $M$  est de dimension  $n$  nous la noterons parfois par  $M^n$  :

$$\dim M^n = n.$$

**A.4 Définition.** Soit  $M$  une variété topologique de dimension  $n$ . Une famille  $\mathcal{A}$  de cartes de  $M$  est appelée un *atlas* si pour tout  $x \in M$  il existe une carte  $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$  telle que  $x \in U$ . Un sous-ensemble  $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$  est un *sous-atlas* de  $\mathcal{A}$  si  $\mathcal{A}'$  est lui-même un atlas de  $M$ .

Notons que si  $(U_1, \varphi_1)$  et  $(U_2, \varphi_2)$  sont deux cartes de  $M$  telles que  $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ , alors l'application de changement de cartes

$$(A.5) \quad \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2)$$

est un homéomorphisme. Dans la suite, nous nous intéresserons au cas où ces applications sont différentiables. Puisque nous nous limiterons partout aux applications et fonctions qui sont de classe  $C^\infty$ , nous adoptons la *convention de notation* suivante :

“différentiable” signifiera toujours différentiable de classe  $C^\infty$ .

Au lieu de “différentiable”, nous dirons parfois “dérivable”.

Pour la définition suivante, nous rappelons que pour des domaines ouverts  $\Omega, \Omega'$  dans  $\mathbb{R}^n$  une application  $f : \Omega \rightarrow \Omega'$  est appelée un *difféomorphisme* si  $f$  est un homéomorphisme et si  $f$  et son inverse  $f^{-1}$  sont différentiables.

**A.6 Définition** (Variété différentiable). Soit une variété topologique  $M = M^n$ . Deux cartes  $(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)$  de  $M$  sont *compatibles* (plus précisément, compatibles de classe  $C^\infty$ ), si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée,

- $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$  et l'application de changement de cartes (A.5) est un difféomorphisme,
- $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ .

Un atlas  $\mathcal{A}$  de  $M$  est *différentiable* si toutes les cartes de  $\mathcal{A}$  sont compatibles entre elles. Une *variété différentiable* est un couple  $(M, \mathcal{A})$  où  $M$  est une variété topologique et  $\mathcal{A}$  est un atlas différentiable de  $M$ .

**A.7 Remarque.** On peut restreindre la définition ci-dessus en ajoutant la condition que la variété  $M$  soit de *base dénombrable*, c.à.d. qu' $M$  contient un ensemble dénombrable dense. Nous avons renoncé à cette restriction car les objets principaux de ce cours, les variétés riemanniennes connexes, sont automatiquement de base dénombrable.

Étant donné un atlas différentiable, il est parfois nécessaire de le compléter : on dit qu'une carte de  $M$  est *compatible* avec un atlas différentiable  $\mathcal{A}$  si elle est compatible avec chaque carte de  $\mathcal{A}$ . Un atlas différentiable  $\mathcal{A}$  est *maximal* si toute carte compatible avec  $\mathcal{A}$  appartient déjà à  $\mathcal{A}$ . Un atlas maximal est appelé une *structure différentiable*. La proposition suivante dit qu'un atlas peut toujours être maximalisé.

**A.8 Proposition.** Soit  $\mathcal{A}$  un atlas différentiable de  $M = M^n$  et soit  $\mathcal{D}_{\mathcal{A}}$  l'ensemble de toutes les cartes compatibles avec  $\mathcal{A}$ . Alors  $\mathcal{D}_{\mathcal{A}}$  est une structure différentiable. Plus précisément,  $\mathcal{D}_{\mathcal{A}}$  est l'unique atlas différentiable maximal qui contient  $\mathcal{A}$  comme sous-atlas.

*Preuve.* Il suffit de démontrer que si deux cartes  $(U_1, \varphi_1)$ ,  $(U_2, \varphi_2)$  sont compatibles avec  $\mathcal{A}$ , alors elles sont compatibles entre elles.

Pour ceci il suffit de démontrer que pour tout  $x \in \varphi_1(U_1 \cap U_2)$  il existe un voisinage ouvert  $V$  de  $x$  dans  $\mathbb{R}^n$  tel que  $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$  restreint à  $V$  est différentiable. Soit donc  $p \in U_1 \cap U_2$  un point tel que  $\varphi_1(p) = x$ . Il existe  $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$  tel que  $p \in U$  et nous posons  $V = \varphi_1(U \cap U_1 \cap U_2)$ . Sur  $V$  on a

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} = (\varphi_2 \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \varphi_1^{-1}).$$

Étant donné que  $(U_2, \varphi_2)$  et  $(U_1, \varphi_1)$  sont compatibles avec  $(U, \varphi)$ , les applications  $\varphi_2 \circ \varphi^{-1}$  et  $\varphi \circ \varphi_1^{-1}$  sont différentiables, donc leur composition l’est aussi.  $\square$

Si  $\mathcal{A}$  est un atlas différentiable de  $M$ , nous dirons que  $\mathcal{D}_{\mathcal{A}}$  est la structure différentiable engendrée par  $\mathcal{A}$ .

Dans ce qui suit, on se donnera souvent une variété différentiable  $M = (M, \mathcal{A})$ . Sauf mention du contraire, il sera sous-entendu que nous lui associons la structure différentiable  $\mathcal{D}_{\mathcal{A}}$  engendrée par  $\mathcal{A}$  et que nous travaillons avec celle-ci. Une *carte* de  $M$  sera toujours une carte de  $\mathcal{D}_{\mathcal{A}}$ .

**A.9 Exemple** (Ouverts de  $\mathbb{R}^n$ ). Les exemples les plus simples sont les ouverts  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  munis de l’atlas  $\mathcal{A}_{\Omega}$  qui contient la seule carte  $(\Omega, \text{id}_{\Omega})$ , où  $\text{id}_{\Omega}(x) = x$  pour tout  $x \in \Omega$ . La structure différentiable  $\mathcal{D}_{\mathcal{A}}$  définie par cet atlas est appelée la *structure différentiable standard* de  $\Omega$ .

**A.10 Exemple** (Surfaces dans  $\mathbb{R}^3$ ). Les morceaux de surfaces réguliers du cours de géométrie de première année sont des exemples de variétés différentiables. Nous regarderons ces exemples dans chapitre suivant.

**A.11 Exemple** (La sphère standard). La *sphère standard*  $\mathbb{S}^n$  est l’ensemble

$$\mathbb{S}^n = \{u \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|u\| = 1\}.$$

En tant que sous-ensemble de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , elle est munie de la *topologie induite par celle de  $\mathbb{R}^{n+1}$*  : c’est la topologie dont les ouverts sont de la forme  $U = \Omega \cap \mathbb{S}^n$ , où  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

Afin d’obtenir un atlas différentiable, nous considérons les *projections stéréographiques*

$$\varphi_N : U_N = \mathbb{S}^n \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \varphi_S : U_S = \mathbb{S}^n \setminus \{S\} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

de centres de projection  $N = (0, \dots, 0, 1)$  et  $S = (0, \dots, 0, -1)$ , respectivement.



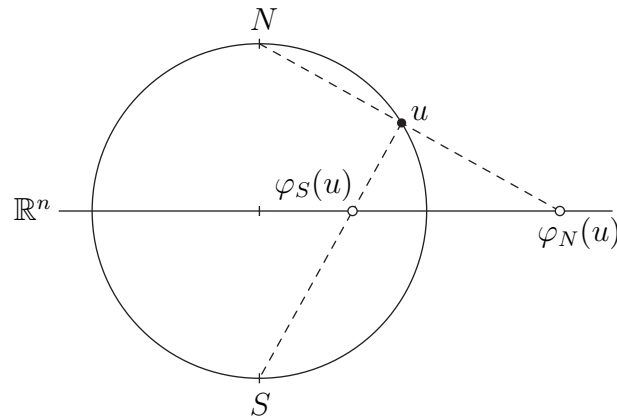


FIGURE A.2. La projection stéréographique

Ces projections sont illustrées dans la figure suivante, où l'espace  $\mathbb{R}^n$  est identifié avec l'ensemble  $\{x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_{n+1} = 0\}$ . Les équations pour  $x = \varphi_N(u)$  et  $y = \varphi_S(u)$  sont

$$(1) \quad x_i = \frac{u_i}{1 - u_{n+1}}, \quad y_i = \frac{u_i}{1 + u_{n+1}}, \quad (i = 1, \dots, n).$$

Les applications  $\varphi_N : U_N \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $\varphi_S : U_S \rightarrow \mathbb{R}^n$  sont des homéomorphismes. Pour  $x = \varphi_N^{-1}(x)$  et  $y = \varphi_S^{-1}(y)$  on a

$$(2a) \quad u_{n+1} = \frac{\|x\|^2 - 1}{\|x\|^2 + 1} = -\frac{\|y\|^2 - 1}{\|y\|^2 + 1},$$

$$(2b) \quad u_i = \frac{2x_i}{\|x\|^2 + 1} = \frac{2y_i}{\|y\|^2 + 1}, \quad i = 1, \dots, n.$$

(Utiliser que  $1 - u_{n+1}^2 = u_1^2 + \dots + u_n^2 = (x_1^2 + \dots + x_n^2)(1 - u_{n+1})^2$ .) Les applications de changement de cartes sont données par

$$(3) \quad \varphi_S \circ \varphi_N^{-1}(x) = \frac{1}{\|x\|^2} x, \quad \varphi_N \circ \varphi_S^{-1}(y) = \frac{1}{\|y\|^2} y, \quad x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

L'atlas  $\mathcal{A}_{\mathbb{S}^n}$  formé par les deux cartes  $(\varphi_N, U_N)$  et  $(\varphi_S, U_S)$  est donc différentiable. La structure différentiable  $\mathcal{D}_{\mathcal{A}_{\mathbb{S}^n}}$  ainsi définie sur  $\mathbb{S}^n$  s'appelle la *structure différentiable standard* de  $\mathbb{S}^n$ .

**A.12 Exemple** (Produit cartésien). Soient  $M, M'$  des variétés différentiables de dimensions  $n$  et  $n'$  respectivement. Le produit cartésien  $M \times M'$  porte une structure de variété différentiable naturelle, dite la *structure produit*, définie de manière suivante.

La topologie de  $M \times M'$  est la topologie produit. Un atlas  $\mathcal{A}$  pour  $M \times M'$  est formé en prenant tous les couples  $(U \times U', \varphi \times \varphi')$ , où  $(U, \varphi)$  est une carte de la structure différentiable de  $M$  et  $(U', \varphi')$  est une carte de celle de  $M'$ . Ici  $\varphi \times \varphi'$  signifie l'application définie par

$$\varphi \times \varphi'(x, x') = (\varphi(x), \varphi'(x'))$$

(avec la notation  $(x, x') = (x_1, \dots, x_n, x'_1, \dots, x'_{n'})$  pour  $x = (x_1, \dots, x_n)$  et  $x' = (x'_1, \dots, x'_{n'})$ ). Pour la vérification qu' $\mathcal{A}$  est un atlas différentiable il suffit de constater que si  $(U_1 \times U'_1, \varphi_1 \times \varphi'_1)$  et  $(U_2 \times U'_2, \varphi_2 \times \varphi'_2)$  sont deux cartes avec  $(U_1 \times U'_1) \cap (U_2 \times U'_2) \neq \emptyset$ , alors

$$(\varphi_2 \times \varphi'_2) \circ (\varphi_1 \times \varphi'_1)^{-1}(x, x') = (\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(x), \varphi'_2 \circ \varphi'_1^{-1}(x')).$$

## Fonctions et applications différentiables

La structure différentiable sur une variété donne accès aux outils de l'analyse. Dans la définition suivante,  $M = M^n$  est une variété différentiable de dimension  $n$ . Par “carte de  $M$ ” on entendra une carte de la structure différentiable  $\mathcal{D}_A$  de  $M$ .

**A.13 Définition.** Soit  $D \subset M$  un ouvert. Une fonction  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  est *différentiable en un point*  $p \in D$  s'il existe une carte  $(U, \varphi)$  de  $M$  avec  $p \in U$  et  $U \subset D$  tel que

$$(1) \quad f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}$$

est différentiable. La fonction  $f$  est *différentiable dans*  $D$  si  $f$  est différentiable en  $p$  pour tout  $p \in D$ . Nous utilisons les notations suivantes.

$$(2) \quad \mathcal{F}_p M = \text{l'ensemble des fonctions différentiables en } p,$$

$$(3) \quad \mathcal{F}(D) = \text{l'ensemble des fonctions différentiables dans } D.$$

La fonction  $f \circ \varphi^{-1}$  ci-dessus s'appelle la *représentation locale de*  $f$ . On dit aussi que  $f \circ \varphi^{-1}$  est *une représentation de*  $f$  *en coordonnées*, où encore la *représentation de*  $f$  *dans la carte*  $(U, \varphi)$ .

Nous remarquons que si  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  est différentiable, alors *toute* représentation locale  $f \circ \psi^{-1}$  est différentiable (exercice).

Considérons maintenant deux variétés différentiables  $M, M'$  de dimensions  $n$  et  $n'$  respectivement. La définition suivante est une généralisation de la précédente.

**A.14 Définition.** Soit  $D \subset M$  un ouvert. Une application  $f : D \rightarrow M'$  est *différentiable en*  $p$  s'il existe une carte  $(U, \varphi)$  de  $M$  avec  $p \in U \subset D$  et une carte  $(V, \psi)$  de

$M'$  avec  $f(U) \subset V$  telles que

$$(1) \quad \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \psi(V)$$

est différentiable. L'application  $f$  est *différentiable dans*  $D$  si  $f$  est différentiable en  $p$  pour tout  $p \in D$ .

Comme précédemment,  $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$  est appelée une représentation locale de  $f$  et nous remarquons que si  $f : M \rightarrow M'$  est différentiable, alors *toute* représentation locale de  $f$  est différentiable. On a aussi la propriété suivante pour des variétés différentiables  $M$ ,  $M'$ ,  $M''$  et des ouverts  $D \subset M$ ,  $D' \subset M'$ ,  $D'' \subset M''$ , dont nous laissons la vérification en exercice.

**A.15 Remarque.** Si  $f : D \rightarrow D'$  et  $g : D' \rightarrow D''$  sont différentiables, alors  $g \circ f : D \rightarrow D''$  est différentiable.  $\square$

Voici les applications qui préservent les structures différentiables :

**A.16 Définition.** Soient les variétés différentiables  $M$  et  $M'$ . Une application  $\phi : M \rightarrow M'$  est un *difféomorphisme* si  $\phi$  est bijective et si  $\phi$  et  $\phi^{-1}$  sont différentiables. Deux variétés différentiables sont dites *difféomorphes* s'il existe un difféomorphisme entre elles.

**A.17 Exemple** ( $\mathbb{S}^n$  et  $\hat{\mathbb{R}}^n$ ). Soit

$$\hat{\mathbb{R}}^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\},$$

où  $\infty$  est un élément quelconque non appartenant à  $\mathbb{R}^n$  et que nous appellerons "point à l'infini".  $\hat{\mathbb{R}}^n$  devient un espace de Hausdorff si nous prenons comme ouverts les sous-ensembles suivants

- les ouverts de  $\mathbb{R}^n$ ,
- les ensembles de la forme  $V = U \cup \{\infty\}$ ,

où  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  qui contient tous les points  $x$  de norme  $\|x\| > \rho$  pour un  $\rho > 0$ . (On appelle un tel  $V$  un *voisinage de l'infini*.) À l'aide de l'application  $h : \hat{\mathbb{R}}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$  définie par

$$h(x) = \begin{cases} x/\|x\|^2 & \text{si } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \\ 0 & \text{si } x = \infty, \end{cases}$$

on voit que l'espace  $\hat{\mathbb{R}}^n$  est une variété topologique de dimension  $n$ . Voici un atlas constitué de deux cartes :

$$\mathcal{A}_{\hat{\mathbb{R}}^n} = \{(\mathbb{R}^n, \text{id}_{\mathbb{R}^n}), (\hat{\mathbb{R}}^n \setminus \{0\}, h)\}.$$

Les applications de changement de cartes sont

$$\text{id}_{\mathbb{R}^n} \circ h^{-1}(x) = \frac{x}{\|x\|^2}, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad h \circ \text{id}_{\mathbb{R}^n}^{-1}(x) = \frac{x}{\|x\|^2}, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

La variété  $\hat{\mathbb{R}}^n$  est donc différentiable. Voici une bijection  $\phi : \mathbb{S}^n \rightarrow \hat{\mathbb{R}}^n$ , où  $\varphi_N : \mathbb{S}^n \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^n$  est la projection stéréographique de centre  $N = (0, \dots, 0, 1)$  comme dans l'exemple A.11 :

$$\phi(u) = \begin{cases} \varphi_N(u) & \text{si } u \in \mathbb{S}^n \setminus \{N\}, \\ \infty & \text{si } u = N. \end{cases}$$

Afin de montrer que  $\phi$  et  $\phi^{-1}$  sont différentiables, nous considérons des représentations locales. Pour le cas  $u \in \mathbb{S}^n \setminus \{N\}$  nous choisissons les cartes  $(\mathbb{S}^n \setminus \{N\}, \varphi_N)$  de  $\mathcal{A}_{\mathbb{S}^n}$  et  $(\mathbb{R}^n, \text{id}_{\mathbb{R}^n})$  de  $\mathcal{A}_{\hat{\mathbb{R}}^n}$ . La représentation locale y relative devient

$$\text{id}_{\mathbb{R}^n} \circ \phi \circ \varphi_N^{-1}(x) = x, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Pour le cas  $u \in \mathbb{S}^n \setminus \{S\}$ ,  $S = (0, \dots, 0, -1)$ , nous prenons  $(\mathbb{S}^n \setminus \{S\}, \varphi_S)$  et  $(\hat{\mathbb{R}}^n \setminus \{0\}, h)$  avec la représentation locale

$$h \circ \phi \circ \varphi_S^{-1}(x) = h \circ \varphi_N \circ \varphi_S^{-1}(x) = x, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

(voir l'exemple A.11). La situation pour  $\phi^{-1}$  est similaire, et on voit ainsi que  $\phi : \mathbb{S}^n \rightarrow \hat{\mathbb{R}}^n$  est un difféomorphisme.

## Chapitre B Constructions de variétés

Il existe de nombreuses façons d'obtenir des variétés différentiables. Dans ce chapitre, nous considérons le cas des sous-variétés de  $\mathbb{R}^n$  définies par des fonctions réelles, la construction de variétés par l'action d'un groupe, et la méthode des recollements.

### Sous-variétés

Une variété peut apparaître comme sous-ensemble d'une autre variété. Le prototype est donné par l'exemple suivant,

$$(B.1) \quad \mathbb{R}_{n+k}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+k} \mid x_{n+1} = \dots = x_{n+k} = 0\}.$$

En posant  $\pi_{n+k}^n(x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0) = (x_1, \dots, x_n)$  nous avons une fonction identifiant naturellement  $\mathbb{R}_{n+k}^n$  avec  $\mathbb{R}^n$ . La définition suivante est basée sur cet exemple. Dans ce qui suit, le mot "carte" signifiera toujours une carte de la structure différentiable.

**B.2 Définition** (Sous-variété différentiable). Soient des entiers  $n > 0$  et  $k \geq 0$ , et soit  $\mathcal{R}$  une variété différentiable de dimension  $n + k$ . Un sous-ensemble non vide  $M \subset \mathcal{R}$  est appelé une *sous-variété*, ou plus précisément, une *sous-variété différentiable de dimension  $n$  de  $\mathcal{R}$* , si pour tout  $p \in M$  il existe une carte  $(U, \varphi)$  de  $\mathcal{R}$  avec  $p \in U$  telle que  $\varphi(U \cap M)$  est un ouvert de  $\mathbb{R}_{n+k}^n$ .

Pour toute carte de  $\mathcal{R}$  de cette forme, on définit une carte correspondante  $(U_M, \varphi_M)$  de  $M$  en posant

$$U_M = U \cap M \text{ et } \varphi_M = \pi_{n+k}^n \circ \varphi|_M.$$

La structure différentiable de la variété  $M$  est celle définie par les cartes  $(U_M, \varphi_M)$ .

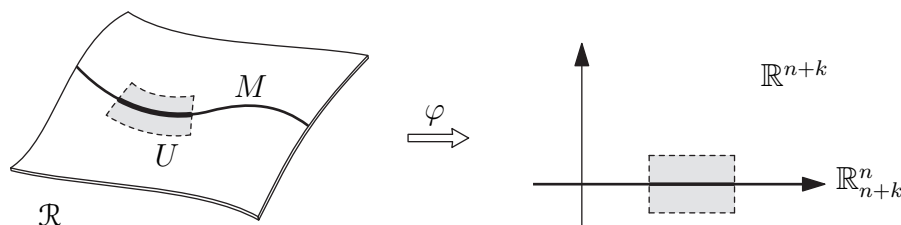


FIGURE B.1. Une sous-variété

**B.3 Exemple** (Cercle dans  $\mathbb{R}^2$ ). Nous décrivons le cercle de rayon  $\rho > 0$

$$M = \{u \in \mathbb{R}^2 \mid \|u\| = \rho\}$$

comme sous-variété de dimension 1 de  $\mathbb{R}^2$ .

Afin d’obtenir un atlas vérifiant les conditions de la définition B.2, il est utile de considérer d’abord la fonction auxiliaire  $f$  ci-après :

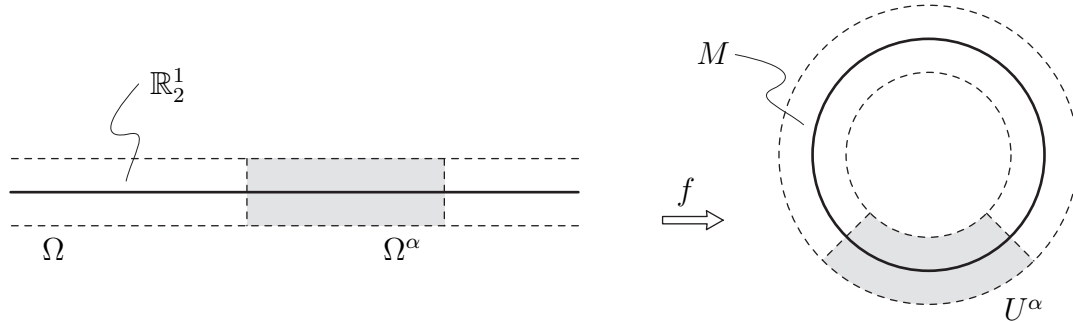


FIGURE B.2. Construction de cartes au voisinage d’un cercle

Soit  $\varepsilon$  avec  $0 < \varepsilon < \rho$  une constante,  $\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid -\varepsilon < x_2 < \varepsilon\}$ , et

$$f(x_1, x_2) = ((\rho + x_2) \cos x_1, (\rho + x_2) \sin x_1), \quad (x_1, x_2) \in \Omega.$$

La fonction  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  ainsi définie est différentiable. Pour tout  $x_2 \in ]-\varepsilon, \varepsilon[$ , l’ensemble  $\{f(x_1, x_2) \mid x_1 \in \mathbb{R}\}$  est un cercle de rayon  $(\rho + x_2)$  centré en  $(0, 0)$ , et on a

$$f(\Omega) = \{u \in \mathbb{R}^2 \mid \rho - \varepsilon < \|u\| < \rho + \varepsilon\}.$$

Pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ , la restriction  $f|_{\Omega^\alpha}$  de  $f$  au sous-ensemble

$$\Omega^\alpha = \{(x_1, x_2) \in \Omega \mid \alpha - \pi/2 < x_1 < \alpha + \pi/2\}$$

est un difféomorphisme de  $\Omega^\alpha$  sur son image  $U^\alpha := f(\Omega^\alpha)$ . Par conséquent, les couples  $(U^\alpha, \varphi^\alpha)$  avec  $\varphi^\alpha = (f|_{\Omega^\alpha})^{-1}$  sont des cartes de la structure différentiable de  $\mathbb{R}^2$  et les cartes correspondantes  $(U_M^\alpha, \varphi_M^\alpha)$  forment un atlas de  $M$  vérifiant les conditions de la définition B.2.

**B.4 Exemple** (Théorème des fonctions implicites). En Analyse, des variétés différentiables apparaissent par l’intermédiaire du théorème des fonctions implicites. Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+k}$  ( $k \geq 1$ ) un ouvert,  $f_1, \dots, f_k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  des fonctions différentiables et

$$M = \{u \in \Omega \mid f_1(u) = c_1, \dots, f_k(u) = c_k\},$$

où  $c_1, \dots, c_k$  sont des constantes. Si  $M \neq \emptyset$  et si pour tout  $u \in M$  les gradients  $\text{grad} f_1(u), \dots, \text{grad} f_k(u)$  sont linéairement indépendants, le théorème des fonctions implicites dit que  $M$  est une sous-variété différentiable de dimension  $n$  de  $\mathbb{R}^{n+k}$ .

À titre d'exemple (deux exemples, chacun avec  $k = 1$ ) nous considérons les fonctions  $f_{\mathbb{S}} : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $f_{\mathcal{H}} : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  données par

$$f_{\mathbb{S}}(u) = u_1^2 + \cdots + u_n^2 + u_{n+1}^2, \quad f_{\mathcal{H}}(u) = u_1^2 + \cdots + u_n^2 - u_{n+1}^2.$$

Les gradients,  $\text{grad} f_{\mathbb{S}}(u) = 2(u_1, \dots, u_n, u_{n+1})$ ,  $\text{grad} f_{\mathcal{H}}(u) = 2(u_1, \dots, u_n, -u_{n+1})$ , s'annulent uniquement en  $u = (0, \dots, 0, 0)$ . Par conséquent les ensembles ci-après sont des sous-variétés de dimension  $n$  de  $\mathbb{R}^{n+1}$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{S}^n &= \{u \in \mathbb{R}^{n+1} \mid u_1^2 + \cdots + u_n^2 + u_{n+1}^2 = 1\}, \\ \mathcal{H}^n &= \{u \in \mathbb{R}^{n+1} \mid u_1^2 + \cdots + u_n^2 - u_{n+1}^2 = -1\}. \end{aligned}$$

**B.5 Exemple** (Morceau de surface régulier dans  $\mathbb{R}^3$ ). Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un ouvert dont la fermeture  $\bar{\Omega}$  est compacte, et soit  $r : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$  une fonction différentiable écrite sous la forme

$$r(x) = (r_1(x), r_2(x), r_3(x)), \quad x \in \bar{\Omega}.$$

Si  $r : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$  est injective et si pour tout  $x \in \bar{\Omega}$  les deux dérivées partielles

$$\frac{\partial r(x)}{\partial x_i} = \left( \frac{\partial r_1(x)}{\partial x_i}, \frac{\partial r_2(x)}{\partial x_i}, \frac{\partial r_3(x)}{\partial x_i} \right), \quad i = 1, 2,$$

sont linéairement indépendants, alors d'après le théorème du rang sur les fonctions différentiables (voir par exemple Boothby [Th II.7.1 p.47]), il existe un  $\varepsilon > 0$  et un difféomorphisme

$$\phi : \Omega \times ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow U := \phi(\Omega \times ]-\varepsilon, \varepsilon[)$$

tel que

$$\phi(x_1, x_2, 0) = r(x_1, x_2)$$

pour tout  $(x_1, x_2) \in \Omega$ . Il s'ensuit que l'ensemble  $M = r(\Omega)$  est une sous-variété différentiable de dimension 2 de  $\mathbb{R}^3$  et que le couple

$$(U_M, \varphi_M) = (M, r^{-1})$$

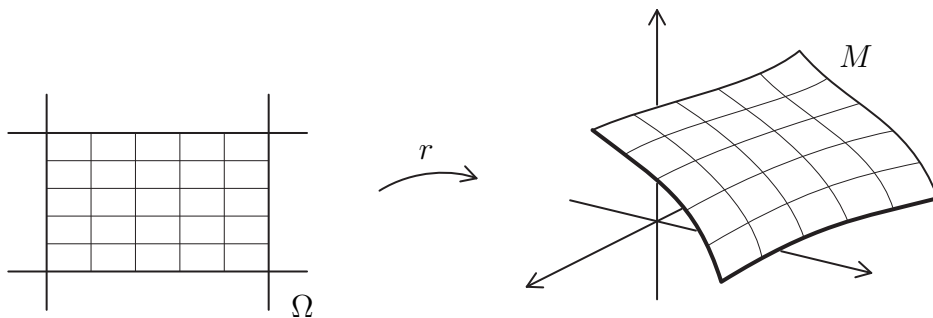


FIGURE B.3. Un morceau de surface paramétré dans  $\mathbb{R}^3$

(notation comme dans la définition B.2) est une carte de la structure différentiable.

Si les conditions décrites dans cet exemple sont vérifiées, on dit que le triple  $(r, \Omega, M)$ , est un *morceau de surface paramétré régulier*.

## Actions de groupes

Une construction très différente de celle ci-dessus s’obtient en faisant opérer des groupes de transformations d’une variété sur elle-même.

Commençons par une notion topologique.

**B.6 Définition** (Action proprement discontinue et sans points fixes). Soit  $X$  un espace topologique et  $G$  un groupe d’homéomorphismes  $h : X \rightarrow X$ . On dit que  $G$  opère *proprement discontinûment et sans points fixes* sur  $X$  si les deux conditions suivantes sont vérifiées.

(1) Pour tout  $x \in X$ , il existe un voisinage ouvert  $U$  de  $x$  tel que

$$U \cap h(U) = \emptyset, \text{ pour tout } h \in G \setminus \{\text{id}_X\}.$$

(2) Si  $x, y \in X$  et si  $x$  est différent de tous les points  $h(y)$ ,  $h \in G$ , alors il existe des voisinages ouverts  $U$  de  $x$  et  $V$  de  $y$  tel que

$$U \cap h(V) = \emptyset, \text{ pour tout } h \in G.$$

**B.7 Exemple** (Translations d’un ruban). Un exemple simple qui décrit bien la situation est le ruban  $X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid -1/2 < x_2 < 1/2\}$  avec le groupe  $G$  qui est l’ensemble des translations  $\tau_n : X \rightarrow X$  suivantes, où  $n \in \mathbb{Z}$ ,

$$\tau_n(x_1, x_2) = (x_1 + n, x_2), \quad (x_1, x_2) \in X.$$

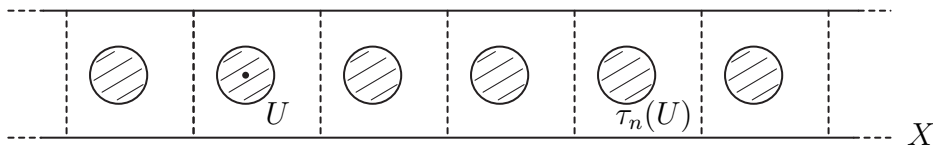


FIGURE B.4.

Revenons à la définition B.6. Un voisinage  $U$  vérifiant (1) s’appelle un *voisinage distingué*. Parce que  $G$  est un groupe,  $U$  est distingué si et seulement si

(1’)  $g(U) \cap h(U) = \emptyset, \text{ pour tout } g, h \in G \text{ avec } g \neq h.$



Pour la même raison la seconde condition de la définition B.6 est équivalente à

$$(2') \quad g(U) \cap h(V) = \emptyset, \quad \text{pour tout } g, h \in G.$$

Étant donné  $X$  et  $G$  on peut former l'espace quotient : pour tout  $x \in X$  la classe d'équivalence

$$[x]_G = \{h(x) \mid h \in G\}$$

(l'orbite du point  $x$ ) est définie, et l'espace quotient, noté  $X/G$ , est l'ensemble

$$X/G = \{[x]_G \mid x \in X\}.$$

L'application

$$\pi : X \rightarrow X/G, \quad \pi(x) = [x]_G,$$

s'appelle la *projection naturelle*. L'espace  $X/G$  est muni de la *topologie quotient* : un sous-ensemble  $W \subset X/G$  est, par définition, *ouvert* si et seulement si son image inverse

$$\pi^{-1}(W) = \{x \in X \mid \pi(x) \in W\}$$

est ouvert dans  $X$ .

Voici quelques propriétés de cette topologie.

**B.8.** *L'application  $\pi : X \rightarrow X/G$  est continue et ouverte.* La continuité de  $\pi$  est directement imposée par la définition de la topologie quotient. Pour démontrer que  $\pi$  est une *application ouverte*, c.-à-d. que l'image  $\pi(V)$  d'un ouvert est un ouvert, il suffit d'observer que  $\pi^{-1}(\pi(V)) = \bigcup_{h \in G} h(V)$  et que les  $h(V)$  sont ouverts.

**B.9.** *Pour tout voisinage distingué  $U$  dans  $X$  la restriction  $\pi|_U : U \rightarrow \pi(U)$  est un homéomorphisme.* Cette propriété découle immédiatement du point B.8.

**B.10.** *Le quotient  $X/G$  est un espace de Hausdorff.* Pour vérifier cette propriété soit  $p = \pi(x), q = \pi(y)$  et  $p \neq q$ . D'après le point (2') de la définition B.6, il existe des voisinages ouverts  $U, V$  de  $x$  et  $y$  respectivement tels qu'aucun point dans  $U$  est équivalent à un point dans  $V$ . D'après le point B.8, les images  $\pi(U), \pi(V)$  sont des voisinages ouverts et disjoints de  $p$  et de  $q$  dans  $X/G$ .

Pour la suite de cette section nous considérons le cas suivant :  $X$  est une variété différentiable de dimension  $n$  et  $G$  un groupe de *difféomorphismes* opérant proprement discontinûment et sans points fixes sur  $X$ .

Dans ces conditions, les points B.9 et B.10 impliquent que  $X/G$  est une variété topologique de dimension  $n$ . En effet, si  $(U, \phi)$  est une carte de la structure différentiable

de  $X$  et, en plus,  $U$  un voisinage distingué, alors le couple

$$(B.11) \quad (W, \phi) \quad \text{avec } W = \pi(U), \quad \phi = \varphi \circ (\pi|_U)^{-1}$$

est une carte de  $X/G$ . Les cartes de la forme (B.11) forment un atlas, nous les appellerons des *cartes distinguées* de  $X/G$ .

**B.12 Théorème.** *Les cartes distinguées forment un atlas différentiable de  $X/G$ .*

*Preuve.* Que tout point de  $X/G$  est contenu dans le domaine d’une telle carte est clair. Il reste à démontrer que les changements de cartes sont des application différentiables. Cette dernière propriété est une conséquence du lemme ci-après.  $\square$

**B.13 Lemme.** *Soient  $(W_i, \phi_i) = (\pi(U_i), \varphi_i \circ (\pi|_{U_i})^{-1})$ ,  $i = 1, 2$ , deux cartes distinguées de  $X/G$  et  $p \in W_1 \cap W_2$ . Alors il existe un voisinage ouvert  $D$  de  $\phi_1(p)$  dans  $\mathbb{R}^n$  et un membre  $g \in G$  tel que*

$$\phi_2 \circ \phi_1^{-1} = \varphi_2 \circ g \circ \varphi_1^{-1} \quad \text{dans } D.$$

*Preuve.* Soit  $q_i = (\pi|_{U_i})^{-1}(p)$ ,  $i = 1, 2$ , et  $g \in G$  l’élément du groupe vérifiant  $g(q_1) = q_2$ . Il existe un voisinage  $V$  de  $q_1$  dans  $X$  tel que  $V \subset U_1$  et  $g(V) \subset U_2$ . Pour tout  $q \in V$  l’image  $g(q)$  est l’unique point dans  $U_2$  équivalent à  $q$ . De ce fait on déduit que

$$(\pi|_{U_2})^{-1} \circ (\pi|_{U_1})(q) = g(q), \quad \text{pour tout } q \in V.$$

Par conséquent, le domaine  $D = \varphi_1(V)$  est un voisinage ouvert de  $\varphi_1(q_1) = \phi_1(p)$  dans  $\mathbb{R}^n$  vérifiant

$$\phi_2 \circ \phi_1^{-1}(x) = \varphi_2 \circ (\pi|_{U_2})^{-1} \circ (\pi|_{U_1}) \circ \varphi_1^{-1}(x) = \varphi_2 \circ g \circ \varphi_1^{-1}(x), \quad x \in D.$$

$\square$

**B.14 Définition** (Structure différentiable quotient). La structure différentiable sur  $X/G$  définie par l’atlas des cartes distinguées s’appelle la *structure différentiable quotient*.

**B.15 Exemple** (Espace projectif). L’application

$$\sigma : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n, \quad \sigma(x) = -x,$$

est un difféomorphisme et  $G = \{\sigma, \text{id}_{\mathbb{S}^n}\}$  est un groupe opérant proprement discontinûment et sans points fixes sur  $\mathbb{S}^n$ . Le quotient

$$\mathbb{RP}^n = \mathbb{S}^n / \{\sigma, \text{id}_{\mathbb{S}^n}\}$$

est une variété différentiable appelée l’*espace projectif réel* de dimension  $n$ . Dans les exercices du chapitre 4, nous démontrerons que pour  $n > 1$  ces variétés sont non-orientables.

**B.16 Exemple** (Tores de dimension  $n$ ). Soit  $\mathcal{V} = \{V^1, \dots, V^n\}$  une base vectorielle de  $\mathbb{R}^n$  et  $\Gamma_{\mathcal{V}}$  l'ensemble de toutes les translations  $\gamma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  de la forme

$$\gamma(x) = x + m_1 V^1 + \dots + m_n V^n,$$

avec  $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{Z}$ . Cet ensemble est un groupe de difféomorphismes, et on voit facilement qu'il opère proprement discontinûment et sans points fixes sur  $\mathbb{R}^n$ . Par exemple, si  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ , l'ensemble

$$U_x^\varepsilon = \{x + t_1 V^1 + \dots + t_n V^n \mid |t_i| < \varepsilon, i = 1, \dots, n\}$$

est un voisinage distingué de  $x$  dans  $\mathbb{R}^n$ . On appelle le quotient

$$T_{\mathcal{V}} = \mathbb{R}^n / \Gamma_{\mathcal{V}}$$

un *tore* de dimension  $n$ . On démontre dans les exercices que les tores de dimension 2 sont difféomorphes aux tores de révolution dans  $\mathbb{R}^3$ .

## Recollements

La construction que nous décrivons dans cette section imite le collage de morceaux de papier. Les éléments donnés au départ de cette construction sont : une variété différentiable  $M$  de dimension  $n$ , deux ouverts disjoints  $A, B \subset M$  et un difféomorphisme

$$h : A \rightarrow B$$

(*difféomorphisme de recollement*). En plus, on suppose que  $h$  vérifie la condition suivante dite *condition de Hausdorff* : si  $a_1, a_2, \dots$ , est une suite infinie dans  $A$ , et  $a, b \in M$  sont des points tels qu'on a les convergences  $a_n \rightarrow a$  et  $h(a_n) \rightarrow b$  pour  $n \rightarrow \infty$ , alors  $a \in A$  et  $b \in B$ .

Avec ces données on peut former des classes d'équivalences en définissant, pour tout  $x \in M$ ,

$$[x]_h = \begin{cases} \{x\} & \text{si } x \in M \setminus (A \cup B), \\ \{x, h(x)\} & \text{si } x \in A, \end{cases}$$

(et donc  $[y]_h = \{y, h^{-1}(y)\}$  si  $y \in B$ ). Tout comme dans la construction décrite dans le paragraphe précédent on forme l'espace quotient

$$M/h = \{[x]_h \mid x \in M\},$$

on a une projection naturelle, également nommée  $\pi$ ,

$$\pi : M \rightarrow M/h, \quad \pi(x) = [x]_h,$$

et on introduit la topologie quotient sur  $M/h$  par rapport à laquelle  $\pi$  est une application continue et ouverte. Grâce à la propriété de Hausdorff le quotient  $M/h$ , muni de cette topologie, est un espace de Hausdorff.

**B.17 Exemple.** Nous donnons trois exemples différents basés sur la variété

$$M = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 < x_1 < 2, -\frac{1}{2} < x_2 < \frac{1}{2}\}$$

et les ouverts

$$A = \{(x_1, x_2) \in M \mid -2 < x_1 < -1\}, \quad B = \{(x_1, x_2) \in M \mid 1 < x_1 < 2\}.$$

Voici trois difféomorphismes  $h_i : A \rightarrow B$

$$\begin{aligned} h_1(x_1, x_2) &= (x_1 + 3, x_2), \\ h_2(x_1, x_2) &= (x_1 + 3, -x_2), \\ h_3(x_1, x_2) &= (-x_1, x_2), \end{aligned} \quad (x_1, x_2) \in A.$$

On constate que  $h_1$  et  $h_2$  vérifient la condition de Hausdorff, mais tel n'est pas le cas pour  $h_3$ .

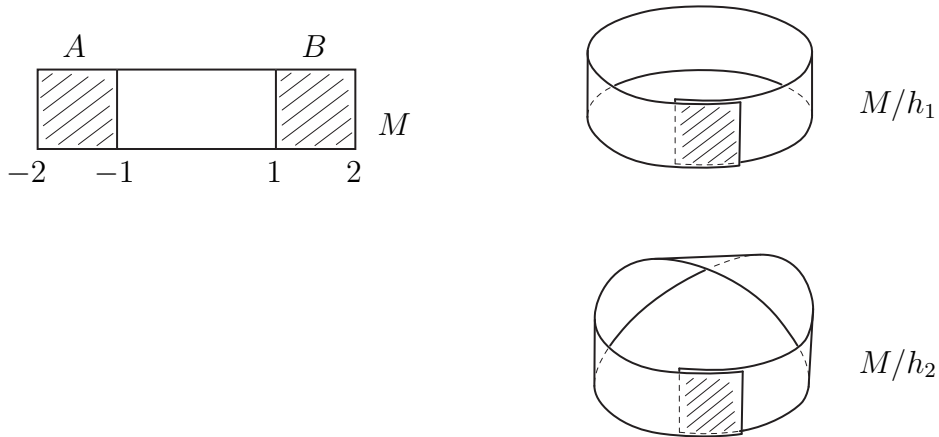


FIGURE B.5. Recollements visualisés par des rubans de papier

La figure B.5 montre une illustration des espaces  $M/h_1$ ,  $M/h_2$ , à l'aide d'un ruban de papier qui joue le rôle de  $M$  et qui est positionné dans  $\mathbb{R}^3$  de telle façon que deux points du ruban sont dans la même classe d'équivalence par rapport à  $h_i$  si et seulement s'ils ont la même position dans  $\mathbb{R}^3$ . L'espace  $M/h_3$  (qui est bien défini mais pas de Hausdorff) ne peut s'illustrer de cette façon car les sous-ensembles de  $\mathbb{R}^3$  sont toujours de Hausdorff.

Reprenons le cas général de  $M/h$ . Le but est d'introduire sur  $M/h$  une structure différentiable à l'aide d'un atlas convenable.

Appelons “bonne” une carte  $(U, \varphi)$  de la structure différentiable de  $M$  si  $\pi|_U$  est injective. Tout  $x \in M$  appartient au domaine d’une telle carte car autrement il existerait une suite infinie  $a_1, a_2, \dots$  dans  $A$  avec  $a_n \rightarrow x$  et  $h(a_n) \rightarrow x$  (pour  $n \rightarrow \infty$ ), ce qui implique  $x \in A$  et  $x \in B$  (d’après la propriété de Hausdorff), contradiction. Pour toute bonne carte  $(U, \varphi)$ , nous définissons une *carte induite*  $(W, \phi)$  de  $M/h$  en posant

$$W = \pi(U), \quad \phi = \varphi \circ (\pi|_U)^{-1}.$$

L’application  $\pi|_U : U \rightarrow W$  étant continue ouverte et bijective,  $\phi$  est bien un homéomorphisme de  $W$  sur  $\phi(W) = \varphi(U)$  dans  $\mathbb{R}^n$ . Nous appellerons des cartes  $(W, \phi)$  de cette forme des *cartes induites*.

**B.18 Théorème.** *Les cartes induites forment un atlas différentiable de  $M/h$ .*

*Preuve.* La remarque ci-dessus concernant les bonnes cartes implique que tout  $p \in M/h$  appartient au domaine d’une carte induite. Ces dernières forment donc un atlas. La différentiabilité est une conséquence du lemme suivant.  $\square$

**B.19 Lemme.** *Soient  $(W_i, \phi_i) = (\pi(U_i), \varphi_i \circ (\pi|_{U_i})^{-1})$ ,  $i = 1, 2$ , deux cartes induites de  $M/h$  et  $p \in W_1 \cap W_2$ . Alors il existe un voisinage ouvert  $D$  de  $\phi_1(p)$  dans  $\mathbb{R}^n$  et un choix  $g$  parmi les trois applications  $\text{id}_M$ ,  $h$ ,  $h^{-1}$  tel que*

$$\phi_2 \circ \phi_1^{-1}(x) = \varphi_2 \circ g \circ \varphi_1^{-1} \text{ dans } D.$$

*Preuve.* Soit  $q_i = (\pi|_{U_i})^{-1}(p)$ ,  $i = 1, 2$ . Si  $q_1 = q_2$ , nous prenons  $V = U_1 \cap U_2$ ,  $g = \text{id}_M$ ; si  $q_1 \in A$ ,  $q_2 \in B$  nous choisissons le voisinage  $V$  de  $q_1$  tel que  $V \subset A \cap U_1$ ,  $h(V) \subset B \cap U_2$  et prenons  $g = h$ ; si  $q_1 \in B$  nous procédons de même façon avec  $g = h^{-1}$ . Dans les trois cas on a  $(\pi|_{U_2})^{-1} \circ (\pi|_{U_1})(q) = g(q)$ , pour tout  $q \in V$ , et on peut conclure comme dans la démonstration du lemme B.13  $\square$

**B.20 Définition.** La structure différentiable sur  $M/h$  définie par l’atlas des cartes induites s’appelle la *structure différentiable induite*.

**B.21 Exemple.** La figure ci-après montre une variété différentiable  $M$  de dimension 2 formée de deux composantes connexes  $X, Y$ . Les deux petites flèches indiquent un difféomorphisme  $h$  envoyant la partie cylindrique à gauche sur celle à droite, et ceci de telle manière que la condition de Hausdorff est vérifiée. Le quotient  $M/h$  est une variété connexe.

Nous utiliserons de telles recollements dans le dernier chapitre du cours pour construire des exemples de variétés riemanniennes de courbure constante.

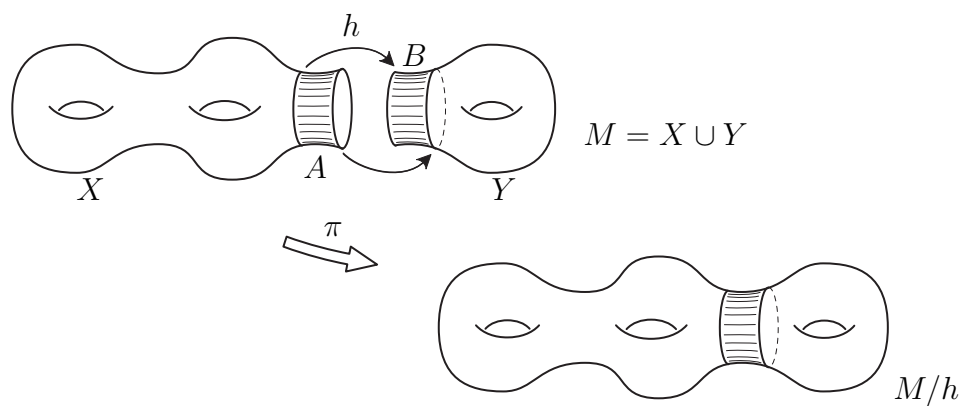


FIGURE B.6. Recollement de deux morceaux de surfaces

## Chapitre C Vecteurs tangents

Pour les courbes et les surfaces dans  $\mathbb{R}^n$ , on connaît la notion de vecteur tangent. Ces vecteurs servent à parler de direction, calculer les longueurs, définir le tenseur métrique, décrire le comportement d'une fonction, etc. Dans ce chapitre, nous généralisons cet outil pour les variétés différentiables quelconques.

Dans tout le chapitre,  $M$  signifiera une variété différentiable de dimension  $n$ . Par “carte” on entendra toujours une carte de la structure différentiable de  $M$ .

### Vecteurs de $\mathbb{R}^n$ .

Un *vecteur de  $\mathbb{R}^n$*  est, par définition, un membre de  $\mathbb{R}^{2n}$ . Nous utilisons deux notations :

$$(C.1) \quad V = (v_1, \dots, v_n, x_1, \dots, x_n) = (v_1, \dots, v_n)_x, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

On peut identifier  $V$  avec le segment de droite orienté dans  $\mathbb{R}^n$  allant du point  $x$  au point  $x + v$  où  $v = (v_1, \dots, v_n)$ . Le point  $x$  s'appelle l'*origine* de  $V$ , et on dit aussi que  $V$  est un *vecteur au point  $x$* .

Une des utilités des vecteurs de  $\mathbb{R}^n$  est qu'ils permettent d'étudier le comportement d'une fonction par l'intermédiaire des dérivées directionnelles : si  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction différentiable, où  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  est un voisinage ouvert du point  $x$ , la *dérivée de  $f$  en  $x$  suivant le vecteur  $V$*  est, par définition,

$$(C.2) \quad \mathcal{D}_V f(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial f(x)}{\partial x_i},$$

où les  $\partial/\partial x_i$  sont les dérivées partielles.

### Vecteurs tangents d'une variété différentiable.

Sur une variété différentiable, l'étude du comportement d'une fonction est d'un même intérêt que dans  $\mathbb{R}^n$ . Mais c'est difficile de parler de “direction” quand on se trouve sur une variété abstraite. On abordera alors l'approche inverse : on définit *d'abord* ce qu'on veut entendre par “dérivation” d'une fonction sur  $M$ , et ensuite on dira qu'une telle dérivation *est* un vecteur.

**C.3 Définition.** Soit  $M$  une variété différentiable et soit  $p \in M$ . Une application  $A : \mathcal{F}_p M \rightarrow \mathbb{R}$ , notée  $A[ \ ]$ , est appelée une *dérivation* en  $p$  si elle satisfait les règles

suivantes pour  $f, g \in \mathcal{F}_p M$  :

- (D<sub>1</sub>)  $A[f + g] = A[f] + A[g];$   
 (D<sub>2</sub>)  $A[fg] = A[f]g(p) + f(p)A[g];$   
 (D<sub>3</sub>)  $f$  constante au voisinage de  $p \implies A[f] = 0.$

L'ensemble de toutes les dérivations en  $p$  s'appelle l'*espace tangent* de  $M$  en  $p$ . Il est noté  $T_p M$ . Par définition, un *vecteur tangent* de  $M$  en  $p$  est un membre de  $T_p M$ .

Autrement dit, pour une variété différentiable, les termes “vecteur tangent” et “dérivation” sont synonymes.

Observons que l'application  $\mathcal{D}_V$  définie dans (C.2) satisfait les règles D<sub>1</sub>–D<sub>3</sub>. Nous verrons dans l'exemple C.13 que *toute* dérivation dans  $\mathbb{R}^n$  est de la forme  $\mathcal{D}_V$ .

**C.4 Exemple** (Dérivations associées à une carte). Soit  $(U, \varphi)$  une carte de  $M$ , soit  $p \in U$  et  $x = \varphi(p)$ . Pour  $i = 1, \dots, n = \dim(M)$ , nous définissons une application  $X_p^i : \mathcal{F}_p M \rightarrow \mathbb{R}$  en posant

$$X_p^i[f] = \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})(x)}{\partial x_i}, \quad f \in \mathcal{F}_p M.$$

Il est facile de voir que ces applications satisfont les règles D<sub>1</sub>–D<sub>3</sub>, et que donc  $X_p^i \in T_p M$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

**C.5 Exemple** (Vecteurs tangents d'une courbe). On entend par *courbe différentiable* sur  $M$  toute application différentiable (voir définition A.14)  $\alpha : I \rightarrow M$ , où  $I \subset \mathbb{R}$  est un intervalle ouvert. Pour tout  $t \in I$ , nous obtenons une application  $\dot{\alpha}(t) : \mathcal{F}_p M \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $p = \alpha(t)$ , en définissant

$$\dot{\alpha}(t)[f] \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{d}{dt}(f \circ \alpha)(t).$$

Pour vérifier que  $\dot{\alpha}(t)$  satisfait les règles D<sub>1</sub>–D<sub>3</sub>, il faut utiliser que  $(f + g) \circ \alpha = f \circ \alpha + g \circ \alpha$ ,  $(fg) \circ \alpha = (f \circ \alpha)(g \circ \alpha)$ . La dérivation  $\dot{\alpha}(t)$  s'appelle le *vecteur tangent de  $\alpha$  en  $t$* .

### Structure d'espace vectoriel sur $T_p M$ .

**C.6 Définition.** Pour tous  $A, B \in T_p M$  et tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ , nous définissons

$$\begin{aligned} (A + B)[f] &\stackrel{\text{déf}}{=} A[f] + B[f], \\ (\lambda A)[f] &\stackrel{\text{déf}}{=} \lambda(A[f]), \end{aligned} \quad f \in \mathcal{F}_p M.$$



C'est une exercice simple de vérifier que  $A + B$  et  $\lambda A$  ainsi définis sont des dérivations.  $T_p M$  muni de ces opérations est donc un espace vectoriel. Dans le prochain théorème nous voyons qu'il est de dimension  $n$ .

**C.7 Théorème.** Soient  $(U, \varphi)$  une carte de  $M$ ,  $p \in U$ , et  $X_p^1, \dots, X_p^n \in T_p M$  les dérivations associées comme dans l'exemple C.4. Alors  $\{X_p^1, \dots, X_p^n\}$  est une base vectorielle de  $T_p M$ .

**C.8 Définition.** La base  $\{X_p^1, \dots, X_p^n\}$  s'appelle la base canonique de  $T_p M$  associée à la carte  $(U, \varphi)$ , ou simplement la base associée.

*Preuve du théorème.* Commençons par l'indépendance linéaire. À cet effet, nous considérons les fonctions  $\varphi_k : U \rightarrow \mathbb{R}$ , dites *fonctions de coordonnées*, définies par

$$(C.9) \quad \varphi(p) = (\varphi_1(p), \dots, \varphi_n(p)), \quad p \in U.$$

La propriété clé de ces fonctions est que

$$(C.10) \quad X_p^i[\varphi_k] = \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \\ 0 & \text{si } i \neq k \end{cases}, \quad i, k = 1, \dots, n.$$

Si maintenant  $\sum_{i=1}^n \lambda_i X_p^i$  est une combinaison linéaire qui s'annule, alors on a

$$\lambda_k = \sum_{i=1}^n \lambda_i X_p^i[\varphi_k] = \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i X_p^i \right) [\varphi_k] = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

D'où l'indépendance. Il reste à démontrer que tout  $A \in T_p M$  est une combinaison linéaire de  $X_p^1, \dots, X_p^n$ . Posons

$$a_i = A[\varphi_i], \quad i = 1, \dots, n; \quad \mathcal{D} \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{i=1}^n a_i X_p^i.$$

D'après (C.10), on a  $\mathcal{D}[\varphi_i] = A[\varphi_i]$ ,  $i = 1, \dots, n$ , et d'après le lemme suivant, ceci implique que  $A = \mathcal{D}$ , i.e.

$$(C.11) \quad A = \sum_{i=1}^n A[\varphi_i] X_p^i,$$

ce qui conclut la démonstration. □

**C.12 Lemme.** Soient  $(U, \varphi)$  une carte de  $M$  et  $\varphi_i : U \rightarrow \mathbb{R}$  les fonctions de coordonnées,  $i = 1, \dots, n$  (voir (C.9)). Si deux dérivations  $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$  en un point  $p \in U$  vérifient

$$\mathcal{D}[\varphi_i] = \mathcal{D}'[\varphi_i], \quad i = 1, \dots, n,$$

alors  $\mathcal{D}[f] = \mathcal{D}'[f]$  pour tout  $f \in \mathcal{F}_p M$ .

*Preuve.* Pour simplifier l'écriture nous supposons que  $\varphi(p) = (0, \dots, 0)$ . Puisque  $f \in \mathcal{F}_p M$ , la représentation locale  $f_\varphi = f \circ \varphi^{-1}$  est différentiable au voisinage de 0 dans  $\mathbb{R}^n$ . Selon le théorème du développement limité, elle peut s'écrire

$$f_\varphi(x) = c + x_1 b_1(x) + \dots + x_n b_n(x),$$

où  $c$  est une constante et  $b_1, \dots, b_n$  sont des fonctions différentiables au voisinage de  $(0, \dots, 0)$ . En posant  $\beta_i = b_i \circ \varphi$  nous obtenons l'écriture analogue pour  $f$  au voisinage de  $p$  :

$$f = c + \varphi_1 \beta_1 + \dots + \varphi_n \beta_n.$$

Selon les règles D<sub>1</sub> – D<sub>3</sub> et sachant que  $\varphi_i(p) = 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ , nous obtenons

$$\mathcal{D}[f] = \sum_{i=1}^n \mathcal{D}[\varphi_i] \beta_i(p) = \sum_{i=1}^n \mathcal{D}'[\varphi_i] \beta_i(p) = \mathcal{D}'[f]. \quad \square$$

**C.13 Exemple** (Vecteurs tangents de  $\mathbb{R}^n$ ). Pour la variété différentiable  $M = \mathbb{R}^n$ , deux concepts de vecteurs sont définis : les membres  $V = (v_1, \dots, v_n)_x$  de  $\mathbb{R}^{2n}$  et les dérivations. Nous montrons que le théorème C.7 permet de *confondre* les deux types de vecteurs.

Dans la carte habituelle  $(\mathbb{R}^n, \text{id}_{\mathbb{R}^n})$  de  $\mathbb{R}^n$ , les dérivations  $X_p^i$  en un point  $x = p$  coïncident avec les dérivées partielles :

$$X_p^i[f] = \frac{\partial f(p)}{\partial x_i}, \quad i = 1 \dots, n.$$

Dans (C.2) nous avons associé à tout  $V = (v_1, \dots, v_n)_p$  une dérivation  $\mathcal{D}_V$ . Avec les notations introduites entre-temps, cette dérivation s'écrit

$$\mathcal{D}_V = \sum_{i=1}^n v_i X_p^i.$$

D'après le théorème C.7, la correspondance  $V \rightarrow \mathcal{D}_V$  est bijective (pour tout  $p \in \mathbb{R}^n$  fixé). Forte de cette bijection nous confondons dorénavant  $V$  avec  $\mathcal{D}_V$  et nous admettons des abus de notations comme par exemple

$$(v_1, \dots, v_n)_p = \sum_{i=1}^n v_i X_p^i,$$

$T_p \mathbb{R}^n = \{(v_1, \dots, v_n)_p \mid v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}\}$ , etc.

**C.14 Exemple** (Vecteur tangent d'une courbe). Soient  $\alpha : I \rightarrow M$  une courbe différentiable,  $(U, \varphi)$  une carte de  $M$ , et supposons que  $\alpha(I) \subset U$ . Dans ce cas, on

a la représentation locale

$$(1) \quad t \mapsto a(t) = \varphi \circ \alpha(t) = (a_1(t), \dots, a_n(t)), \quad t \in I.$$

Avec les fonctions de coordonnées  $\varphi_i$  (voir (C.9)), les composantes  $a_i$  s'écrivent  $a_i(t) = \varphi_i(\alpha(t))$ . D'après la définition du vecteur tangent d'une courbe, on a

$$\dot{\alpha}(t)[\varphi_i] = \frac{d}{dt}\varphi_i(\alpha(t)) = \frac{d}{dt}a_i(t) = \dot{a}_i(t), \quad i = 1, \dots, n.$$

En appliquant la formule (C.11) au vecteur  $A = \dot{\alpha}(t)$ , nous obtenons

$$(2) \quad \dot{\alpha}(t) = \sum_{i=1}^n \dot{a}_i(t) X_{\alpha(t)}^i.$$

Dans le cas particulier où  $M = \mathbb{R}^n$  et la carte choisie est  $(\mathbb{R}^n, \text{id}_{\mathbb{R}^n})$ , la courbe s'écrit  $\alpha(t) = (a_1(t), \dots, a_n(t))$ ,  $t \in I$ , et les conventions de notation introduites à la fin de l'exemple C.13 permettent d'écrire

$$(3) \quad \dot{\alpha}(t) = (\dot{a}_1(t), \dots, \dot{a}_n(t))_{\alpha(t)}.$$

**C.15 Théorème.** *Pour tout  $A \in T_p M$ , il existe une courbe différentiable  $\alpha : I \rightarrow M$  avec  $0 \in I$  telle que  $A = \dot{\alpha}(0)$ .*

*Preuve.* On prend une carte  $(U, \varphi)$  avec  $\varphi(p) = (0, \dots, 0)$ , et représente  $A$  dans la base associée :  $A = \alpha_1 X_p^1 + \dots + \alpha_n X_p^n$ . Dans  $\varphi(U)$ , on définit la courbe

$$t \mapsto a(t) = (a_1(t), \dots, a_n(t)) \stackrel{\text{déf}}{=} (t\alpha_1, \dots, t\alpha_n), \quad t \in I,$$

où  $I \subset \mathbb{R}$  est un petit intervalle autour de 0. Pour la courbe  $\alpha = \varphi^{-1} \circ a : I \rightarrow M$ , on obtient

$$\dot{\alpha}(0) = \sum_{i=1}^n \dot{a}_i(0) X_p^i = \sum_{i=1}^n \alpha_i X_p^i = A.$$

□

### L'application tangente.

**C.16 Définition.** Soient les variétés différentiables  $M$ ,  $M'$  (pas nécessairement de mêmes dimensions),  $D \subset M$  un ouvert et  $\phi : D \rightarrow M'$  une application différentiable. Pour tout  $p \in D$  nous définissons une application

$$\phi_* = \phi_{*p} : T_p M \rightarrow T_q M', \quad q = \phi(p),$$

en posant

$$(\phi_{*p}(A))[f] \stackrel{\text{d\'ef}}{=} A[f \circ \phi], \quad f \in \mathcal{F}_q M'.$$

C'est un exercice simple de vérifier que  $\phi_{*p}(A) : \mathcal{F}_q M' \rightarrow \mathbb{R}$  est une dérivation, et qu'on a donc bien  $\phi_{*p}(A) \in T_q M'$ . L'application  $\phi_{*p}$ , respectivement  $\phi_*$ , ainsi définie s'appelle l'*application tangente*.

**C.17 Exercice.** Si  $\alpha : I \rightarrow D \subset M$  est une courbe différentiable et  $\alpha' = \phi \circ \alpha$ , alors

$$\phi_*(\dot{\alpha}(t)) = \dot{\alpha}'(t), \quad t \in I.$$

**C.18 Proposition.** L'application  $\phi_{*p} : T_p M \rightarrow T_{\phi(p)} M'$  est linéaire.

*Preuve.* Soit  $A, B \in T_p M$ . Pour tout  $f \in \mathcal{F}_q M'$ ,  $q = \phi(p)$  on a

$$\phi_{*p}(A + B)[f] = (A + B)[f \circ \phi] = A[f \circ \phi] + B[f \circ \phi] = \phi_{*p}A[f] + \phi_{*p}B[f].$$

Ceci démontre que  $\phi_{*p}(A + B) = \phi_{*p}A + \phi_{*p}B$ . La règle  $\phi_{*p}(\lambda A) = \lambda(\phi_{*p}A)$  se démontre de la même façon.  $\square$

**C.19 Proposition.** Si  $\phi : M \rightarrow M'$  et  $\psi : M' \rightarrow M''$  sont deux applications différentiables, et si  $p \in M$ ,  $q = \phi(p)$ , alors

$$(\psi \circ \phi)_{*p} = \psi_{*q} \circ \phi_{*p}.$$

*Preuve.* Voici deux façons de le vérifier. 1) En représentant  $A$  par une courbe  $\alpha :$

$$(\psi \circ \phi)_{*p}(\dot{\alpha}(0)) = (\psi \circ \phi \circ \alpha)'(0) = \psi_{*q}((\phi \circ \alpha)'(0)) = \psi_{*q}(\phi_{*p}(\dot{\alpha}(0))).$$

2) En considérant l'effet de la dérivation  $A$  sur les fonctions  $f \in \mathcal{F}_{\psi(q)} M'' :$

$$(\psi \circ \phi)_{*p}A[f] = A[f \circ \psi \circ \phi] = \phi_{*p}A[f \circ \psi] = (\psi_{*q}\phi_{*p}A)[f].$$

$\square$

**C.20 Proposition** ( $\phi_*$  en coordonnées). Soient  $(U, \varphi)$ ,  $(V, \psi)$  des cartes de  $M$ ,  $M'$  avec  $p \in U$ ,  $q = \phi(p) \in V$ , et  $\{X_p^1, \dots, X_p^n\}$ ,  $\{Y_q^1, \dots, Y_q^m\}$ , les bases associées en ces points. Si la représentation locale de  $\phi$  par rapport à ces cartes est donnée sous la forme

$$\psi \circ \phi \circ \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_m),$$

alors on a la formule suivante, où  $\partial y_j / \partial x_i$  est évalué en  $x = \varphi(p)$ ,

$$(1) \quad \phi_*(X_p^i) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial y_j}{\partial x_i} Y_q^j, \quad i = 1, \dots, n.$$

Si  $A = a_1 X_p^1 + \cdots + a_n X_p^n$ , et  $\phi_*(A) = b_1 Y_q^1 + \cdots + b_m Y_q^m$ , alors

$$(2) \quad b_j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial y_j}{\partial x_i} a_i, \quad j = 1, \dots, m.$$

*Preuve.* Ceci est une conséquence du calcul suivant pour  $f \in \mathcal{F}_q M'$  et  $f_\psi = f \circ \psi^{-1}$ , sachant que  $f \circ \phi \circ \varphi^{-1} = f_\psi \circ \psi \circ \phi \circ \varphi^{-1}$ ,

$$\begin{aligned} \phi_*(X_p^i)[f] &= X_p^i[f \circ \phi] = \frac{\partial(f \circ \phi \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i} \\ &= \frac{\partial f_\psi(y_1, \dots, y_m)}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f_\psi}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial y_j}{\partial x_i} Y_q^j[f]. \end{aligned}$$

□

**C.21 Remarque** (Changement de coordonnées). La proposition précédente contient comme cas particulier les *formules de changements de coordonnées*. C'est le cas où  $M = M'$ ,  $p \in U \cap V$  et  $\phi = \text{id}_M$ . Les formules de changement de coordonnées sont alors les formules (1), (2) ci-dessus avec la particularité que  $p = q$  et  $\phi_*(X_p^i) = X_p^i$ ,  $\phi_*(A) = A$ .

### Vecteurs tangents d'une sous-variété.

Soit  $M \subset \mathcal{R}$  une sous-variété différentiable de la variété différentiable  $\mathcal{R}$  et soient  $n$ ,  $n+k$  les dimensions respectives. Pour  $p \in M$ , les membres de  $T_p M$  n'appartiennent pas à  $T_p \mathcal{R}$ , car ils opèrent sur  $\mathcal{F}_p M$  et non pas sur  $\mathcal{F}_p \mathcal{R}$ . Mais il y a une façon naturelle de les *identifier* avec des membres de  $T_p \mathcal{R}$  : soit

$$(C.22) \quad \iota : M \rightarrow \mathcal{R}, \quad \iota(q) = q, \quad q \in M,$$

l'application qui inclut  $M$  dans  $\mathcal{R}$ . Cette application est différentiable ; on le vérifie le plus aisément en prenant des cartes  $(U_M, \varphi_M)$ ,  $(U, \varphi)$  comme dans la définition B.2, en constatant que

$$\varphi \circ \iota \circ \varphi_M^{-1}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0).$$

On a donc l'application tangente  $\iota_* : T_p M \rightarrow T_p \mathcal{R}$ . À tout vecteur  $A \in T_p M$  correspond ainsi un vecteur  $\iota_*(A) \in T_p \mathcal{R}$  qui opère de la manière suivante,

$$\iota_*(A)[f] = A[f \circ \iota] = A[f|_M], \quad f \in \mathcal{F}_p \mathcal{R}.$$

**C.23 Lemme.** *L'application  $\iota_* : T_p M \rightarrow T_p \mathcal{R}$  est un endomorphisme.*

*Preuve.* La linéarité est donnée par la proposition C.18. Pour démontrer l'implication  $\iota_*(A) = 0 \Rightarrow A = 0$ , il suffit de démontrer que pour tout  $f \in \mathcal{F}_p M$  il existe une

extension  $\tilde{f} \in \mathcal{F}_p\mathcal{R}$  telle que  $\tilde{f}|_M = f$ . Or, la fonction définie par  $\tilde{f} \circ \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_{n+k}) = f \circ \varphi_M^{-1}(x_1, \dots, x_n)$ , est une telle extension.  $\square$

Au vu du lemme C.23, nous identifierons dorénavant  $A$  avec  $\iota_*(A)$  et écrirons, par convention de simplification,  $A = \iota_*(A)$ ,  $T_pM \subset T_p\mathcal{R}$ .

**C.24 Exemple** (Vecteur tangent d’une sous-variété de  $\mathbb{R}^n$ ). Nous déterminons les vecteurs tangents de la sous-variété

$$M = \{x \in \Omega \mid h(x) = c\},$$

où  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$  est un ouvert,  $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction différentiable, et  $c$  une constante telle que  $\text{grad}(h)(x) \neq 0$  pour tout  $x \in M$  (exemple B.4).

Soit donc  $x = p \in M$  et  $A \in T_pM$ . L’image  $\iota_*(A) \in T_p\mathbb{R}^{n+1}$  par rapport à l’inclusion  $\iota : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  peut s’écrire sous la forme

$$\iota_*(A) = (a_1, \dots, a_{n+1})_p$$

(voir l’exemple C.13). Sachant que  $h|_M$  est constante, on a

$$A[h|_M] = \iota_*(A)[h] = \sum_{i=1}^{n+1} a_i \frac{\partial h(p)}{\partial x_i} = 0.$$

L’image  $\iota_*(T_pM)$  est donc un sous-espace vectoriel de l’espace

$$\text{grad}(h)(p)^\perp \stackrel{\text{déf}}{=} \{(v_1, \dots, v_{n+1})_p \in T_p\mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} v_i \frac{\partial h(p)}{\partial x_i} = 0\}.$$

Or,  $T_pM$ ,  $\iota_*(T_pM)$  et  $\text{grad}(h)(p)^\perp$  ont tous la dimension  $n$ . Par conséquent, on a  $\iota_*(T_pM) = \text{grad}(h)(p)^\perp$ . En identifiant  $T_pM$  avec  $\iota_*(T_pM)$ , nous pouvons donc écrire

$$T_pM = \text{grad}(h)(p)^\perp.$$

**C.25 Exercice.** Soient  $M' \subset \mathcal{R}'$ ,  $M \subset \mathcal{R}$  des sous-variétés différentiables avec les applications d’inclusion  $\iota' : M' \rightarrow \mathcal{R}'$ ,  $\iota : M \rightarrow \mathcal{R}$ , et soit  $\phi : \mathcal{R}' \rightarrow \mathcal{R}$  une application différentiable telle que  $\phi(M') \subset M$ . Dans ces conditions, l’application

$$\phi^M : M' \rightarrow M, \quad \text{définie par} \quad \phi^M(p') = \phi(p'), \quad p' \in M',$$

est différentiable, et pour tout  $A' \in T_{p'}M'$  on a

$$\phi_*(\iota'_*(A')) = \iota_*(\phi_*^M(A')).$$

En notation simplifiée :  $\phi_*(A') = \phi_*^M(A')$ .

**Le fibré tangent.**

Il s'avère utile de comprendre l'ensemble de tous les vecteurs tangents

$$(1) \quad TM \stackrel{\text{déf}}{=} \bigcup_{p \in M} T_p M$$

lui-même comme variété différentiable, l'idée étant qu'avec une carte de  $M$  non seulement les points mais aussi les vecteurs tangents en ces points obtiennent des coordonnées. Nous définirons la structure différentiable de  $TM$  via un atlas formé de cartes particulières  $(U^T, \varphi^T)$  qui sont construites à partir des cartes  $(U, \varphi)$  de  $M$ .

Soit donc  $(U, \varphi)$  une carte de  $M$  avec les bases associées  $\{X_p^1, \dots, X_p^n\}$  pour  $p \in U$  (définition C.8) et les fonctions de coordonnées  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  (C.9). Nous posons

$$(2) \quad U^T \stackrel{\text{déf}}{=} \bigcup_{p \in U} T_p M,$$

et définissons  $\varphi^T : U^T \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  comme étant l'application qui à tout  $A = \sum_{i=1}^n a_i X_p^i$  fait correspondre la suite des coordonnées de  $p$  et de  $A$  :

$$(3) \quad \varphi^T(A) \stackrel{\text{déf}}{=} (a_1, \dots, a_n, \varphi_1(p), \dots, \varphi_n(p)).$$

Observons que  $\varphi^T : U^T \rightarrow \mathbb{R}^n \times \varphi(U)$  est une bijection. Nous notons  $\mathcal{A}^T$  l'ensemble de tous les couples  $(U^T, \varphi^T)$ .

Avant d'introduire la topologie sur  $TM$  nous considérons le changement de cartes. Soit  $(V, \psi)$  une seconde carte,  $\{Y_q^1, \dots, Y_q^n\}$  les bases associées pour  $q \in V$ , et  $\psi_1, \dots, \psi_n$  les fonctions de coordonnées. Si  $p \in U \cap V$  alors  $A$  est aussi une combinaison linéaire des  $Y_p^i$ ,

$$A = \sum_{i=1}^n b_i Y_p^i,$$

et les coordonnées de  $A$  relativement à  $(V^T, \psi^T)$  sont  $(b_1, \dots, b_n, \psi_1(p), \dots, \psi_n(p))$ . Pour le changement de cartes on a donc

$$(4) \quad \psi^T \circ (\varphi^T)^{-1}(a_1, \dots, a_n, x_1, \dots, x_n) = (b_1, \dots, b_n, y_1, \dots, y_n),$$

où, pour  $j = 1, \dots, n$ , les  $y_j$  sont données par  $y_j = \psi_j \circ \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_n)$ , et les  $b_j$  par

$$b_j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial y_j}{\partial x_i} a_i$$

(remarque C.21). Ceci montre que la fonction  $\psi^T \circ (\varphi^T)^{-1}$  est différentiable, et il en est de même pour  $\varphi^T \circ (\psi^T)^{-1}$ .

À présent nous sommes prêts pour définir la topologie sur  $TM$  : par définition, un sous-ensemble  $D \subset TM$  est appelé *ouvert* si pour tout  $X \in D$  il existe  $(U^T, \varphi^T) \in \mathcal{A}^T$  avec  $X \in U^T$  et tel que  $\varphi^T(D \cap U^T)$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^{2n}$ . Sachant que les changements de coordonnées sont des homéomorphismes, c'est un exercice de routine de vérifier que les ouverts ainsi définis forment une topologie. Il est vite vu que cette topologie est de Hausdorff et donc  $TM$  une variété différentiable. Enfin, étant donné que les applications de changement de cartes sont des difféomorphismes,  $\mathcal{A}^T$  est un atlas différentiable de  $TM$ .

**C.26 Définition** (Fibré tangent). L'ensemble  $TM$  muni de la structure différentiable donnée par l'atlas  $\mathcal{A}^T$  ci-dessus est appelé le *fibré tangent* de  $M$ .

De la proposition C.20 nous tirons immédiatement la suivante :

**C.27 Proposition.** *Soient les variétés différentiables  $M$  et  $N$ . Si  $\phi : M \rightarrow N$  est différentiable, alors l'application tangente  $\phi_* : TM \rightarrow TN$  est différentiable.  $\square$*



## Chapitre D Champs de vecteurs

Dans tout le chapitre,  $M$  est une variété différentiable de dimension  $n$ .

**D.1 Définition.** Soit  $D \subset M$  un ouvert. Un *champ de vecteurs* sur  $D$  est une application  $Y : D \rightarrow TM$ ,  $p \mapsto Y_p$  telle que  $\pi_M(Y_p) = p$ , pour tout  $p \in D$ .

Autrement dit,  $Y$  associe à tout  $p \in D$  un vecteur  $Y_p \in T_pM$ . Au lieu de “champ de vecteurs” on dit aussi “champ vectoriel”.

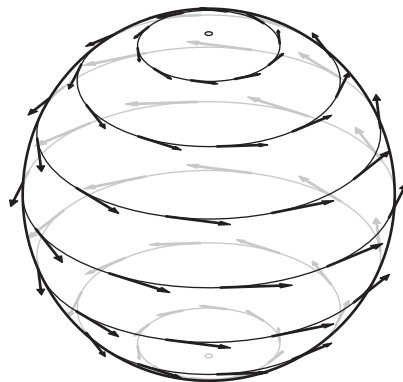


FIGURE D.1. Un champ de vecteurs sur  $\mathbb{S}^2$

**D.2 Exemple.** Considérons la sphère standard dans  $\mathbb{R}^3$

$$\mathbb{S}^2 = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1\}.$$

Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on a une rotation de  $\mathbb{R}^3$  donnée par la matrice suivante (relativement à la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ )

$$A_t = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette rotation induit un difféomorphisme  $\phi_t : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ ,

$$\phi_t(u) = (u_1, u_2, u_3)A_t, \quad u \in \mathbb{S}^2.$$

En fixant  $u \in \mathbb{S}^2$  et en considérant  $t$  comme variable on obtient la courbe différentiable  $c_u$  définie par

$$c_u(t) = \phi_t(u), \quad t \in \mathbb{R},$$

avec  $c_u(0) = u$ . Les vecteurs tangents sont donnés par  $\dot{c}_u(t) = (\dot{c}_1(t), \dot{c}_2(t), \dot{c}_3(t))_{c_u(t)}$  (exemple ??(2)). Pour  $t = 0$  on obtient

$$\dot{c}_u(0) = (-u_2, u_1, 0)_u \in T_u\mathbb{S}^2.$$

En laissant varier  $u \in \mathbb{S}^2$ , nous obtenons un champ de vecteurs sur  $\mathbb{S}^2$ , comme l'illustre la figure D.1. Notons qu'il s'annule en deux points de  $\mathbb{S}^2$ .

**D.3 Définition.** Les opérations définies pour les vecteurs en un point se prolongent aux champs de vecteurs de manière évidente : soit  $D \subset M$  un ouvert,  $X, Y : D \rightarrow TM$  des champs de vecteurs et  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction réelle. La *somme*  $X + Y$  et le *produit*  $fX$  sont les champs de vecteurs définis par

$$\begin{aligned} (X + Y)_p &= X_p + Y_p, \\ (fX)_p &= f(p)X_p, \quad p \in D. \end{aligned}$$

La *dérivée*  $Y[f]$  de  $f$  suivant  $Y$  est définie par

$$Y[f](p) = Y_p[f], \quad p \in D.$$

Pour les champs de vecteurs et les fonctions dont les domaines de définition ne coïncident pas, ces opérations sont également définies mais restreintes à l'intersection de ces domaines. Ainsi, si par exemple  $Y : D \rightarrow TM$ ,  $f : D' \rightarrow \mathbb{R}$  et  $D \cap D' \neq \emptyset$ , alors  $Y[f]$  désigne la fonction  $D' \cap D \ni p \mapsto Y_p[f]$ , etc.

**D.4 Définition.** Un champ de vecteurs  $Y : D \rightarrow TM$  est *différentiable en*  $p \in D$ , si pour tout  $f \in \mathcal{F}_p(M)$ , on a  $Y[f] \in \mathcal{F}_p(M)$ . On dit que  $Y$  est *différentiable sur*  $D$  s'il est différentiable en  $p$ , pour tout  $p \in D$ .

On note  $\chi_p(M)$  l'ensemble des champs de vecteurs différentiables en  $p$ , et  $\chi(D)$  l'ensemble des champs de vecteurs différentiables sur  $D$ .

**D.5 Exemple** (Champs de bases associés). Soit  $(U, \varphi)$  une carte de  $M$ . En tout point  $p \in U$ , on a la base canonique  $X_p^1, \dots, X_p^n$  de  $T_pM$  associée à la carte  $(U, \varphi)$  (définition C.8). En considérant  $p$  comme une variable, on obtient les champs de vecteurs  $X^1, \dots, X^n$  sur  $U$ . Pour une fonction différentiable  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  avec la représentation locale  $f_\varphi = f \circ \varphi^{-1}$ , la fonction  $X^i[f]$  est représentée par  $\frac{\partial f_\varphi}{\partial x_i}$ . Les champs de vecteurs  $X^1, \dots, X^n$  sont donc différentiables. On les appelle les *champs de bases associés* à la carte  $(U, \varphi)$ .

**D.6 Proposition.** Soit  $(U, \varphi)$  une carte de  $M$  et soient  $X^1, \dots, X^n$  les champs de bases associés. Tout champ de vecteurs  $Y : U \rightarrow TM$  s'écrit

$$Y = \sum_{j=1}^n b_j X^j$$

avec des fonctions  $b_1, \dots, b_n : U \rightarrow \mathbb{R}$  uniquement déterminées.  $Y$  est différentiable si et seulement si les fonctions  $b_1, \dots, b_n$  sont différentiables.

*Preuve.* L'existence et l'unicité des  $b_j$  sont claires. Si les  $b_j$  sont différentiables alors  $Y$  aussi, car les champs de vecteurs  $X^j$  sont différentiables. Supposons réciproquement que  $Y$  est différentiable. Pour les fonctions  $\varphi_k : U \rightarrow \mathbb{R}$ , définies par

$$\varphi_k(\varphi^{-1}(x_1, \dots, x_n)) = x_k, \quad k = 1, \dots, n,$$

on a  $X^j[\varphi_k] = \delta_{jk}$  (voir (C.10)), et donc  $Y[\varphi_k] = b_k$ . D'où la différentiabilité de  $b_1, \dots, b_n$ .  $\square$

### Commutateurs.

Si  $D \subset M$  est un ouvert et  $X, Y \in \chi(D)$ , alors pour toute fonction différentiable  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , on peut définir une "dérivée seconde" par

$$XY[f] = X[Y[f]].$$

Avec la formule (D.9(4)) on verra que  $XY$  est différent de  $YX$ , en général. La différence entre les deux, notée

$$(D.7) \quad [X, Y] := XY - YX$$

est appelée le *commutateur* de  $X$  et  $Y$ . L'application  $[\ , \ ]$ , qui à  $X$  et  $Y$  associe le commutateur  $[X, Y]$ , est appelée le *crochet de Lie*.

La proposition suivante montre que le commutateur est de nouveau un champ de vecteurs (ce qui n'est pas le cas de  $XY$ , où de  $YX$  pris séparément).

**D.8 Proposition.** Pour  $X, Y \in \chi(D)$ , il existe un champ de vecteurs  $Z \in \chi(D)$  uniquement déterminé, tel que pour tout  $p \in D$  et  $f \in \chi_p(M)$ , on a

$$Z[f](p) = X[Y[f]](p) - Y[X[f]](p).$$

*Preuve.* La preuve est laissée en exercice.  $\square$

**D.9 Proposition.** Soient  $X, Y, Z \in \chi(D)$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  des constantes et  $f, g$  des fonctions différentiables sur  $D$ . Alors on a les règles suivantes.

- (1)  $[X, Y] = -[Y, X]$  (antisymétrie)
- (2)  $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$  (linéarité)
- (3)  $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$  (identité de Jacobi)
- (4)  $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX[g]Y - gY[f]X$

*Preuve.* La preuve est laissée en exercice. □

**D.10 Remarque.** Un espace vectoriel  $V$  munie d’un opérateur (appelé “crochet”)  $[\cdot, \cdot] : V \times V \rightarrow V$  satisfaisant (1), (2), (3) ci-dessus est appelé une *algèbre de Lie*. Dans notre cas,  $\chi(D)$  est donc une algèbre de Lie.

### Champs de vecteurs le long d’une application.

On est souvent dans la situation où un champ de vecteurs n’est pas défini sur un ouvert mais seulement sur un sous-ensemble, comme par exemple une courbe. Il s’agit là de la notion d’un champ de vecteurs le long d’une application.

**D.11 Définition.** Soient les variétés différentiables  $\Omega$  et  $M$ , et soit  $\phi : \Omega \rightarrow M$  une application différentiable. Un *champ de vecteurs le long de  $\phi$*  est une application

$$Y : \Omega \rightarrow TM$$

satisfaisant

$$\pi_M \circ Y = \phi,$$

où  $\pi_M : TM \rightarrow M$  est la projection canonique. Remarquons que la condition  $\pi_M \circ Y = \phi$  veut dire que  $Y(q) \in T_{\phi(q)}M$ , pour tout  $q \in \Omega$ . On dit que  $Y$  est *différentiable en  $q \in \Omega$*  si pour tout  $f \in \mathcal{F}_{\phi(q)}(M)$ , on a  $Y[f] \in \mathcal{F}_q(\Omega)$ . Le champ de vecteurs  $Y$  le long de  $\phi : \Omega \rightarrow M$  est *différentiable* s’il est différentiable en tout  $q \in \Omega$ . On note  $\chi_\phi$  l’ensemble des champs de vecteurs différentiables le long de  $\phi$ .

**D.12 Remarque** (Champs induits). Soit  $\phi : \Omega \rightarrow M$  comme ci-dessus. Tout  $X \in \chi(\Omega)$  induit un champ de vecteurs  $\phi_*X$  le long de  $\phi$ , défini par  $\phi_*X(q) = \phi_{*q}(X(q))$ ,  $q \in \Omega$  (voir la définition C.16). Pour  $f \in \mathcal{F}_{\phi(q)}(M)$  on a

$$(1) \quad \phi_*X[f] = X[f \circ \phi]$$

et  $\phi_*X$  est donc différentiable.

Pour  $Z \in \chi(M)$ , on a également un champ de vecteurs différentiable le long de  $\phi$ , c'est  $Z \circ \phi$  opérant sur  $f \in \mathcal{F}_{\phi(q)}(M)$  par

$$(2) \quad (Z \circ \phi)[f] = Z[f] \circ \phi.$$

**D.13 Proposition.** Soit  $\phi : \Omega \rightarrow M$  une application différentiable et  $Y : \Omega \rightarrow TM$  un champ de vecteurs le long de  $\phi$ . Si  $(U, \varphi)$  est une carte de  $M$  avec les champs de bases associés  $X^1, \dots, X^n$  et  $\Omega' \subset \Omega$  un ouvert tel que  $\phi(\Omega') \subset U$ , alors il existe des fonctions  $b_1, \dots, b_n : \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$  uniquement déterminées telles que

$$Y(q) = \sum_{j=1}^n b_j(q) (X^j \circ \phi)(q), \quad q \in \Omega'.$$

$Y$  est différentiable sur  $\Omega'$  si et seulement si les fonctions  $b_1, \dots, b_n$  sont différentiables.

*Preuve.* Elle est analogue à celle de la proposition D.6. □

**D.14 Remarque** (Champs tangents d'une sous-variété). Soit  $S$  une sous-variété de dimension  $r$  de  $M$  et  $\iota : S \rightarrow M$  l'inclusion canonique. D'après le lemme C.23 et la remarque qui le suit, tout  $A \in T_p S$ ,  $p \in S$ , s'identifie à  $\iota_* A \in T_p M$ .

Ceci nous permet de voir tout  $Y \in \chi(S)$  comme un champ de vecteurs le long de  $\iota$  en l'identifiant avec  $\iota_* Y$ . On dit parfois aussi que  $Y = \iota_* Y$  est un *champ de vecteurs tangents de  $S$  dans  $M$* .

Si  $(U, \varphi)$  est une carte de  $M$  avec les champs de bases associés  $X^1, \dots, X^n$  et  $U' := U \cap S \neq \emptyset$ , alors la proposition D.13 permet d'écrire

$$Y_p = \sum_{j=1}^n b_j(p) X_p^j, \quad p \in U',$$

avec des fonctions différentiables  $b_1, \dots, b_n : U' \rightarrow \mathbb{R}$ . Notons que dans cette écriture le nombre de composantes de  $Y$  est  $n$  et non  $r$ .

### Le théorème du hérisson.

Nous donnons une application des champs de vecteurs portant sur la topologie de  $\mathbb{S}^2$ . Le théorème que nous énonçons est aussi vrai pour les sphères de dimensions  $> 2$ , mais la preuve n'est plus aussi élémentaire que celle présentée ici. Une preuve pour le cas général se trouve, par exemple dans [Milnor, *Topology from the differential viewpoint*].

Avec la vision que les piquants d’un hérisson forment un champ de vecteurs le long de sa surface et que le hérisson est considéré comme “coiffé” si les aiguilles sont tangentes partout, le théorème confirme qu’un hérisson ne se laisse pas coiffer (et surtout pas si on le prend pour une sphère).

**D.15 Théorème** (du hérisson). *Pour tout  $Y \in \chi(\mathbb{S}^2)$ , il existe au moins un point  $p \in \mathbb{S}^2$  tel que  $Y_p = 0$ .*

Le lecteur devrait d’abord se convaincre qu’il est facile de trouver un champ de vecteurs  $Y \in \chi(\mathbb{S}^1)$  qui ne s’annule nulle part.

*Preuve.* Supposons par l’absurde que  $Y \in \chi(\mathbb{S}^2)$  est tel que  $Y_p \neq 0$  pour tout  $p \in \mathbb{S}^2$ . Nous ramenons la situation à  $\mathbb{R}^2$  à l’aide de la paramétrisation suivante de  $\mathbb{S}^2 \setminus (0, 0, \pm 1)$ .

$$f : \Omega \rightarrow \mathbb{S}^2, \quad \Omega = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid -\pi/2 < t < \pi/2\},$$

$$f(s, t) = (\cos t \cos s, \cos t \sin s, \sin t), \quad (s, t) \in \Omega.$$

Pour tout  $(s, t) \in \Omega$ , il existe un voisinage ouvert  $\tilde{U}$  de  $(s, t)$  dans  $\Omega$  tel que la restriction  $f|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \rightarrow f(\tilde{U})$  est un difféomorphisme. En posant  $\tilde{Y}(s, t) := (f|_{\tilde{U}})^{-1}_* Y(p)$ , où  $p = f(s, t)$ , nous obtenons un champ de vecteurs  $\tilde{Y} \in \chi(\Omega)$  satisfaisant

$$f_* \tilde{Y} = Y(f(s, t)), \quad (s, t) \in \Omega.$$

Notons que ce champ de vecteurs est périodique en  $s$  avec période  $2\pi$ . Nous considérons le comportement de  $\tilde{Y}$  le long des droites  $\gamma_t : \mathbb{R} \rightarrow \Omega$ ,  $\gamma_t(s) = (s, t)$  (voir Fig.D.2).

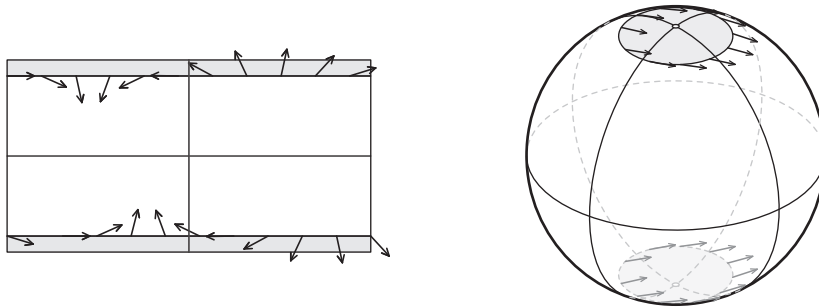


FIGURE D.2. Révolutions du champ de vecteurs  $\tilde{Y}$

Soit d’abord  $t' = \pi/2 - \varepsilon$ , avec  $\varepsilon > 0$  assez petit. L’image  $c_{t'} = f \circ \gamma_{t'}$  est un cercle au bord du disque sphérique  $B' = f(\tilde{B}')$  de centre  $(0, 0, 1)$  et de rayon  $\varepsilon$ , où  $\tilde{B}' = \{(s, t) \in \Omega \mid t > t'\}$ . Nous choisissons  $\varepsilon$  tel que pour  $p, q \in B'$  l’angle en valeur absolue entre  $Y(p)$  et  $Y(q)$  est plus petit que  $\pi/16$ .

Il existe  $s_0 \in \mathbb{R}$  tel que  $\dot{c}_{t'}(s_0)$  et  $Y(c_{t'}(s_0))$  ont la même direction. Pour  $s$  dans les quatre intervalles

$$I_k = [s_0 + k\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}, s_0 + k\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}], \quad k = 0, 1, 2, 3,$$

le comportement de  $Y$  le long de  $c_{t'}$  est le suivant. Sur  $I_0$  le produit scalaire entre  $Y(c_{t'}(s))$  et  $\dot{c}_{t'}(s)$  est positif, sur  $I_2$  il est négatif. Sur  $I_1$  le vecteur  $Y(c_{t'}(s))$  pointe vers l'extérieur de  $B'$ , sur  $I_3$  il pointe vers l'intérieur.

Par conséquent, le comportement de  $\tilde{Y}$  le long de  $\gamma_{t'}$  est le suivant, sachant que  $\tilde{B}'$  est situé en dessus de  $\gamma_{t'}$ . La première composante de  $\tilde{Y}(s, t')$  est positive sur  $I_0$  et négative sur  $I_2$ . La deuxième composante est négative sur  $I_1$  et positive sur  $I_3$ . Pour  $s$  allant de  $s_0$  à  $s_0 + 2\pi$  les vecteurs  $\tilde{Y}(s, t')$  effectuent donc une révolution d'angle  $2\pi$  dans le sens de rotation positif. Vu la périodicité de  $\tilde{Y}$  la même chose est vraie si on prend  $s$  allant de  $0$  à  $2\pi$ .

Pour  $t'' = -\pi/2 + \varepsilon$  et  $B'' = f(\tilde{B}'')$  avec  $\tilde{B}'' = \{(s, t) \in \Omega \mid t < t''\}$ , le comportement de  $Y$  et  $\tilde{Y}$  le long de  $c_{t''}$ , respectivement  $\gamma_{t''}$  est le même, sauf que cette-fois-ci,  $\tilde{B}''$  est situé en dessous de  $\gamma_{t''}$  et les vecteurs  $\tilde{Y}(s, t'')$  effectuent une révolution d'angle  $-2\pi$  lorsque  $s$  va de  $0$  à  $2\pi$ .

Montrons maintenant que cette situation ne peut se produire. La stratégie est de démontrer que l'angle de révolution de  $\tilde{Y}$  le long de  $\gamma_t$  doit être le même pour tous les  $t$ , en contradiction de ce que nous avons vu pour  $t'$  et  $t''$ .

Fixons  $t \in (-\pi/2, \pi/2)$ . Alors il existe une fonction différentiable  $\alpha_t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que le long de  $\gamma_t$  le champ de vecteurs  $\tilde{Y}$  s'écrit

$$\tilde{Y}(s, t) = \|\tilde{Y}(s, t)\| (\cos \alpha_t(s), \sin \alpha_t(s)), \quad s \in \mathbb{R}.$$

Ceci est possible parce que tout  $\tilde{Y}(s, t)$  est de longueur non nulle et donc a une direction bien définie. La valeur initiale  $\alpha_t(0)$  est définie à un multiple entier de  $2\pi$  près. Nous la choisissons telle qu'en faisant varier  $t \in (-\pi/2, \pi/2)$ , la fonction  $t \mapsto \alpha_t(0)$ , est également continue.

Puisque  $\tilde{Y}$  est périodique en  $s$  avec période  $2\pi$ , le nombre

$$\rho_t := \alpha_t(2\pi) - \alpha_t(0)$$

est un multiple entier de  $2\pi$ . Selon ce que nous avons vu, on a  $\rho_{t'} = 2\pi$  et  $\rho_{t''} = -2\pi$ .

Remarquons maintenant qu'il existe  $\delta > 0$  tel que pour tout  $\tau \in (t - \delta, t + \delta)$  et tout  $s \in [0, 2\pi]$ , l'angle entre  $\tilde{Y}(s, t)$  et  $\tilde{Y}(s, \tau)$ , en valeur absolue, est plus petit que  $\pi/4$ .

Pour  $s = 0$  on a donc  $|\alpha_t(0) - \alpha_\tau(0)| < \pi/4$ . Comme la fonction  $s \mapsto |\alpha_t(s) - \alpha_\tau(s)|$  est continue et n'atteint pas la valeur  $\pi/4$  on a  $|\alpha_t(s) - \alpha_\tau(s)| < \pi/4$  pour tout  $s \in [0, 2\pi]$ .

Il s'ensuit que  $|\rho_t - \rho_\tau| < \pi/2$ . Mais  $\rho_t - \rho_\tau$  est un multiple entier de  $2\pi$  et on a donc  $\rho_t - \rho_\tau = 0$ .

Comme ceci est vrai pour tout  $t$ , on a ainsi démontré que la fonction  $t \mapsto \rho_t$  est constante sur  $(-\pi/2, \pi/2)$ , une contradiction.

□



## Chapitre 1 Métriques riemanniennes

**1.1 Définition.** Soit  $M$  une variété différentiable. Un *tenseur métrique* ou une *métrique riemannienne* est une application qui, à chaque couple de vecteurs  $A, B \in T_p M$  (où  $p \in M$ ), fait correspondre un nombre  $g(A, B) \in \mathbb{R}$  tel que les conditions suivantes sont satisfaites.

( $R_1$ ) Pour tout  $p \in M$  l'application

$$(A, B) \mapsto g(A, B), \quad A, B \in T_p M,$$

est une forme bilinéaire, symétrique et définie positive.

( $R_2$ ) Si  $U \subset M$  est un ouvert et  $X, Y \in \chi(U)$ , alors la fonction

$$p \mapsto g(X, Y)(p) \stackrel{\text{déf}}{=} g(X_p, Y_p), \quad p \in U,$$

est différentiable.

Une *variété riemannienne* est un couple  $(M, g)$ , où  $M$  est une variété différentiable et  $g$  une métrique riemannienne sur  $M$ .

**1.2 Exemples.** (1) *L'espace euclidien.* L'espace  $\mathbb{R}^n$  muni du produit scalaire standard

$$g_0(A, B) = \sum_{i=1}^n a_i b_i,$$

où  $A = (a_1, \dots, a_n)_x, B = (b_1, \dots, b_n)_x \in T_x \mathbb{R}^n, x \in \mathbb{R}^n$ , est une variété riemannienne.

(2) *Sous-variétés de  $\mathbb{R}^n$ .* Soit  $M$  une sous-variété différentiable de  $\mathbb{R}^n$ . Pour tout  $p \in M$ , on a  $T_p M \subset T_p \mathbb{R}^n$  (exemple C.24). En posant

$$g(A, B) \stackrel{\text{déf}}{=} g_0(A, B), \quad A, B \in T_p M, \quad p \in M,$$

on obtient la *métrique riemannienne induite* par  $g_0$  sur  $M$ . Dans ce cas,  $g$  est aussi appelé la *première forme fondamentale* de  $M$ .

(3) *Métrique hyperbolique.* Dans la boule

$$\mathbb{D}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\},$$

on considère le tenseur  $g_H$  défini par

$$g_H(A, B) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{4}{(1 - \|x\|^2)^2} g_0(A, B), \quad A, B \in T_x \mathbb{R}^n, \quad x \in \mathbb{D}^n.$$

Cette métrique riemannienne est appelée la *métrique hyperbolique* sur  $\mathbb{D}^n$ . Elle sera l'objet d'une étude approfondie plus loin.

**1.3 Définition.** Étant donné une variété riemannienne  $M = (M, g)$ , on définit la *longueur*  $\|A\|_g$  d'un vecteur  $A \in T_p M$  par

$$\|A\|_g = \sqrt{g(A, A)}.$$

L'angle  $\sphericalangle_g(A, B) \in [0, \pi]$  entre deux vecteurs  $A, B \in T_p M \setminus \{0\}$  est défini par

$$\cos \sphericalangle_g(A, B) = \frac{g(A, B)}{\|A\|_g \|B\|_g}.$$

Si  $M$  est une variété, un *arc de courbe différentiable* est une application différentiable  $c : [a, b] \rightarrow M$ , où  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  est un intervalle fermé. Si de plus  $M$  est munie d'une métrique riemannienne, la *longueur* d'un tel arc est définie par

$$\ell(c) = \ell_g(c) = \int_a^b \|\dot{c}(t)\|_g dt.$$

Une application continue  $c : [a, b] \rightarrow M$  est appelée un arc de courbe *lisse par morceaux* (l.p.m.) s'il existe une partition de l'intervalle  $[a, b]$  avec des points de division  $a = a_0 < a_1 < \dots < a_N = b$  telle que pour tout  $i = 1, \dots, N$ , la restriction

$$c_i = c|_{[a_{i-1}, a_i]} : [a_{i-1}, a_i] \rightarrow M,$$

est un arc de courbe différentiable. La longueur de  $c$  est, par définition, la somme des longueurs des parties  $c_i$ , et nous écrivons

$$\ell(c) = \ell(c_1) + \dots + \ell(c_N) = \int_a^b \|\dot{c}(t)\|_g dt.$$

### Composantes du tenseur métrique.

Étant donné une carte  $(U, \varphi)$  de  $M = (M, g)$  avec les champs de bases  $X^1, \dots, X^n$  associés, on appelle *composantes du tenseur métrique* les  $n \times n$  fonctions  $g_{ij}$  définies par

$$(1.4) \quad g_{ij}(p) = g_{ij}(\varphi(p)) = g(X_p^i, X_p^j), \quad p \in U.$$

(Nous interpréterons parfois les  $g_{ij}$  comme des fonctions de  $p \in U$ , mais aussi comme des fonctions de  $x = \varphi(p) \in \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ .)

**1.5 Exemple.** Dans la carte standard  $(\mathbb{D}^n, \text{id}_{\mathbb{D}^n})$ , la métrique hyperbolique  $g_H$  sur  $\mathbb{D}^n$  possède les composantes

$$g_{ij}(x) = \frac{4\delta_{ij}}{(1 - \|x\|^2)^2}, \quad x \in \mathbb{D}^n.$$

Soit  $(U, \varphi)$  comme ci-dessus et soit  $(V, \psi)$  une seconde carte de  $M$  avec l'application de coordonnées  $p \mapsto y = \psi(p)$  et les champs de bases associés  $Y^1, \dots, Y^n$ . Nous notons  $\tilde{g}_{kl}$  les composantes de  $g$  relativement à cette nouvelle carte. Si  $U \cap V \neq \emptyset$ , et si le changement de coordonnées est donné par

$$x \mapsto y = (y_1, \dots, y_n) = \psi \circ \varphi^{-1}(x), \quad x \in \varphi(U \cap V),$$

alors les composantes satisfont la règle de transformation suivante (où  $n = \dim(M)$ ).

$$(1.6) \quad \boxed{g_{ij}(x) = \sum_{k,l=1}^n \frac{\partial y_k(x)}{\partial x_i} \frac{\partial y_l(x)}{\partial x_j} \tilde{g}_{kl}(y)}$$

pour  $x \in \varphi(U \cap V)$ , et  $y = \varphi(x)$ .

*Preuve.* D'après la remarque C.21,

$$(1.7) \quad X^i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial y_k}{\partial x_i} Y^k,$$

et on a une écriture semblable pour  $X^j$ . En remplaçant ces expressions dans  $g_{ij} = g(X^i, X^j)$  on obtient la formule (1.6).  $\square$

**1.8 Lemme** (Existence de “bonnes cartes”). *Soit  $M = (M, g)$  une variété riemannienne de dimension  $n$  et soit  $p \in M$ . Alors, il existe une carte  $(U, \varphi)$  de  $M$  avec  $p \in U$  et  $\varphi(p) = 0$ , telle que les composantes  $g_{ij}$  de  $g$  satisfont*

$$g_{ij}(0) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

*Preuve.* Il existe certainement une carte  $(U, \psi)$  avec  $p \in U$  telle que  $\psi(p) = 0$ . Soit  $A^1, \dots, A^n$  une base orthonormée de  $T_p M$  (pour le produit scalaire  $g$  sur  $T_p M$ ). Les vecteurs  $\psi_* A^1, \dots, \psi_* A^n$  forment une base de  $T_0 \mathbb{R}^n$ . Nous prenons alors l'application

linéaire  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  telle que  $L_*\psi_*A^1, \dots, L_*\psi_*A^n$  est la base canonique de  $T_0\mathbb{R}^n$  et posons  $\varphi = L \circ \psi$ . D'après les formules de changement de coordonnées (remarque C.21),  $A^1, \dots, A^n$  est maintenant la base associée de  $T_pM$  pour la carte  $(U, \varphi)$  et on a  $g_{ij}(0) = g(A^i, A^j) = \delta_{ij}$ .

□

### La variété riemannienne comme espace métrique.

Dans ce paragraphe nous montrons que, sur une variété riemannienne connexe, il existe une distance naturelle.

Rappelons d'abord qu'un espace topologique est appelé *connexe* s'il n'est pas l'union de deux ouverts disjoints non vides.

**1.9 Proposition.** *Soit  $M$  une variété différentiable connexe. Pour tout  $p, q \in M$ , il existe un arc de courbe lisse par morceaux  $c : [a, b] \rightarrow M$  avec  $c(a) = p$  et  $c(b) = q$ .*

*Preuve.* Fixons  $p \in M$  et considérons l'ensemble  $M_p$  de tous les points  $q \in M$ , pour lesquels un tel arc existe. Alors  $M_p \neq \emptyset$  car  $p \in M_p$ . Soit  $q \in M$ . Il existe une carte

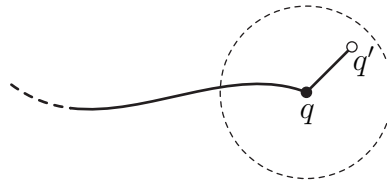


FIGURE 1.1. Le chemin est prolongé de  $q$  à  $q'$

$(U, \varphi)$  de  $M$  avec  $q \in U$  telle que  $\varphi(U)$  est de la forme  $\varphi(U) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < \rho\}$  pour un  $\rho > 0$ . Si  $q' \in U$ , il existe un arc différentiable de  $q$  à  $q'$  (par exemple l'image inverse du segment de droite reliant  $\varphi(q)$  et  $\varphi(q')$ ). Par conséquent,  $p$  se relie à  $q$  par un arc lisse par morceaux si et seulement si  $p$  se relie à  $q'$  par un tel arc. Cet argument montre que  $M_p$  et  $M \setminus M_p$  sont ouverts. Puisque  $M$  est connexe et  $M_p \neq \emptyset$  alors  $M \setminus M_p = \emptyset$ . □

Pour le reste du chapitre, nous supposons que  $M = (M, g)$  est une variété riemannienne *connexe*. Pour  $p, q \in M$  nous notons  $\mathcal{C}_{pq}$  l'ensemble des arcs de courbe lisses par morceaux reliant  $p$  et  $q$ . Les éléments de  $\mathcal{C}_{pq}$  sont aussi appelés les *chemins* de  $p$  à  $q$ .

**1.10 Définition.** Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne connexe. Pour tout  $p, q \in M$ , la *distance* (relativement à  $g$ ) est définie par

$$\delta(p, q) = \delta_g(p, q) \stackrel{\text{déf}}{=} \inf_{c \in \mathcal{C}_{pq}} \ell_g(c).$$

Pour le théorème suivant, nous rappelons que toute fonction de distance sur un ensemble non vide induit une topologie sur cet ensemble, appelée la topologie métrique (voir l'exemple A.2).

**1.11 Théorème.** Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne connexe. Alors  $M$  munie de la fonction  $\delta = \delta_g : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  est un espace métrique. La topologie métrique induite par  $\delta$  coïncide avec la topologie de la variété  $M$ .

*Preuve.* Il faut d'abord démontrer les axiomes suivants.

- (i)  $\delta(p, q) \geq 0$  avec égalité si et seulement si  $p = q$  ;
- (ii)  $\delta(p, q) = \delta(q, p)$  ;
- (iii)  $\delta(p, q) \leq \delta(p, r) + \delta(r, q)$ .

Nous commençons avec l'inégalité du triangle (iii). Si  $c' \in \mathcal{C}_{pr}$  et  $c'' \in \mathcal{C}_{rq}$ , alors les

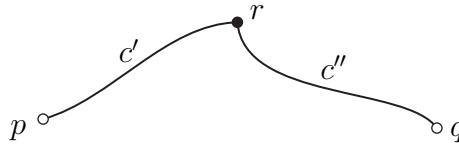


FIGURE 1.2. Inégalité du triangle

deux arcs mis bout-à-bout forment un chemin de longueur  $\ell_g(c') + \ell_g(c'')$  reliant  $p$  et  $q$ . Par conséquent,

$$\delta(p, q) \leq \ell_g(c') + \ell_g(c'').$$

Comme cette inégalité est vraie pour tout  $c' \in \mathcal{C}_{pr}$  et tout  $c'' \in \mathcal{C}_{rq}$ , on peut passer à l'infimum et on obtient (iii).

Pour (ii) il suffit de noter que si  $c : [a, b] \rightarrow M$  appartient à  $\mathcal{C}_{pq}$ , alors le *chemin inverse*

$$t \mapsto c^{-1}(t) = c(a + b - t), \quad t \in [a, b],$$

appartient à  $\mathcal{C}_{qp}$  et  $\ell_g(c^{-1}) = \ell_g(c)$  (exercice).

Pour (i), il est clair que  $\delta(p, q) \geq 0$  et  $\delta(p, p) = 0$  (pour ce dernier : prendre le *chemin constant*  $t \mapsto c_p(t) = p$ ,  $t \in [0, 1]$ .) Soit maintenant  $q \neq p$ . C'est la preuve de  $\delta(p, q) > 0$  qui donne du travail.

Il existe une carte  $(U, \varphi)$  de  $M$  avec  $p \in M$ ,  $\varphi(p) = 0$  et telle que  $g_{ij}(0) = \delta_{ij}$  (lemme 1.8). Nous choisissons un ouvert  $U' \subset U$  avec  $p \in U'$  tel que

$$|g_{ij}(x) - \delta_{ij}| < \frac{1}{2n^2}, \quad x \in \varphi(U').$$

Cette inégalité implique que tout chemin  $c'$  dans  $U'$  satisfait

$$(*) \quad \frac{1}{2}\ell_E(\varphi \circ c') \leq \ell_g(c') \leq 2\ell_E(\varphi \circ c'),$$

où  $\ell_E$  signifie la longueur euclidienne d'une courbe dans  $\mathbb{R}^n$ . Considérons la boule euclidienne

$$B = B_0^\rho(\mathbb{R}^n) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < \rho\}$$

avec  $\rho$  assez petit, de sorte que  $\bar{B} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq \rho\} \subset \varphi(U')$  et tel que  $q \notin \varphi^{-1}(B)$ . Notons que  $\varphi^{-1}(B)$  est ouvert et que  $\varphi^{-1}(\bar{B})$  est un sous-ensemble fermé de  $M$  (et non seulement de  $U$ ). Que  $\varphi^{-1}(\bar{B})$  est fermé dans  $M$  est vrai car l'image  $\varphi^{-1}(\bar{B})$  du compact  $\bar{B}$  par l'application continue  $\varphi^{-1}$  est compacte, et dans un espace de Hausdorff tout compact est fermé (c'est ici que la propriété de Hausdorff de  $M$  intervient).

Soit maintenant  $c : [a, b] \rightarrow M$  un chemin avec  $c(a) = p$  et  $c(b) = q$ . Ce chemin quitte l'ouvert  $\varphi^{-1}(B)$  et nous notons  $b'$  la valeur minimale des  $t$  pour lesquels  $c(t) \notin \varphi^{-1}(B)$ . Puisque  $\varphi^{-1}(\bar{B})$  est fermé,  $c(b') \in \varphi^{-1}(\bar{B} \setminus B)$ . On a donc une partie  $c' = c|_{[a, b']}$  telle que  $\varphi \circ c'$  relie le centre  $0 = \varphi(p)$  de la boule  $B$  avec son bord, et qui a donc une longueur euclidienne  $\geq \rho$ . Avec (\*), on conclut que  $\ell_g(c) \geq \rho/2$ , pour tout  $c \in \mathcal{C}_{pq}$ , d'où  $\delta(p, q) > 0$ .

Pour l'équivalence des deux topologies sur  $M$  nous traduisons d'abord l'argument que nous venons de donner. Puisque tous les points  $q$  à l'extérieur de  $\varphi^{-1}(B)$  ont une distance  $\geq \rho/2$  de  $p$ , la boule métrique (voir l'exemple A.2)

$$B_p^{\rho/2}(M) = \{p' \in M \mid \delta(p, p') < \rho/2\}$$

est contenue dans  $\varphi^{-1}(B)$ . Avec l'inégalité de droite dans (\*), on prouve l'inclusion dans l'autre sens. Nous avons ainsi

$$(**) \quad B_p^{\rho/2}(M) \subset \varphi^{-1}(B) \subset B_p^{2\rho}(M).$$

Notons ici que  $\rho$  peut être choisi arbitrairement petit.

Nous pouvons maintenant comparer la topologie de la variété  $M$  avec la topologie métrique.

Soit d'abord  $\Omega$  un ouvert au sens de la variété  $M$ . Pour tout  $p \in \Omega$ , il existe un voisinage  $\varphi^{-1}(B)$  de  $p$  comme ci-dessus et une boule métrique  $B_p^{\rho/2}(M) \subset \varphi^{-1}(B) \subset \Omega$ . Donc  $\Omega$  est aussi un ouvert dans la topologie métrique.

Soit, réciproquement,  $\Omega$  un ouvert dans la topologie métrique et considérons  $p \in \Omega$ . Il existe  $\rho > 0$  et  $B$  comme ci-dessus tels que  $\varphi^{-1}(B) \subset B_p^{2\rho}(M) \subset \Omega$ . Ceci étant possible pour tout  $p \in \Omega$ , il suit que  $\Omega$  est un ouvert de  $M$ . Le théorème est ainsi démontré.  $\square$

Nous terminons ce chapitre avec les “morphisms” des variétés riemanniennes.

**1.12 Définition.** Soient  $(M, g)$  et  $(M', g')$  des variétés riemanniennes de dimension  $n$ . Une application  $\phi : M \rightarrow M'$  est appelée une *isométrie locale* si pour tout  $p \in M$  et  $A, B \in T_p M$ , on a

$$g'(\phi_* A, \phi_* B) = g(A, B).$$

Une isométrie locale  $\phi$  s'appelle une *isométrie* si de plus  $\phi : M \rightarrow M'$  est un difféomorphisme.

On vérifie aisément que si  $\phi : M \rightarrow M'$  et  $\psi : M' \rightarrow M''$  sont des isométries locales, alors  $\psi \circ \phi$  est une isométrie locale. De même, si  $\phi : M \rightarrow M'$  est une isométrie, alors  $\phi^{-1} : M' \rightarrow M$  est une isométrie. Ceci implique en particulier que l'ensemble

$$(1.13) \quad \text{Isom}(M) = \{ \phi : M \rightarrow M \mid \phi \text{ est une isométrie} \}$$

est un groupe. On l'appelle le *groupe des isométries de  $M$* .

On vérifie également que les isométries préservent les longueurs des courbes et, par conséquent, les distances.

Sans en donner de démonstration nous mentionnons que la réciproque est également vraie :

**1.14 Théorème\*.** *Soient les variétés riemanniennes connexes  $M$  et  $M'$ . Une application bijective  $\phi : M \rightarrow M'$  qui préserve les distances est une isométrie au sens de la définition 1.12.*

## Chapitre 2 La dérivée covariante

Dérivée des champs de vecteurs, déplacer parallèlement un vecteur le long d'une courbe, etc. : ce sont des opérations indispensables en géométrie euclidienne. Nous montrons dans ce chapitre que ces opérations existent aussi sur une variété riemannienne.

Pour en donner une définition qui met en évidence l'analogie avec le cas euclidien, nous nous servons des cartes dans lesquelles le tenseur métrique ressemble – au moins localement – au tenseur métrique standard de  $\mathbb{R}^n$ .

**2.1 Définition.** Soit  $M^n$  une variété riemannienne,  $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$  une carte autour d'un point  $p \in M$ , dans laquelle le tenseur métrique est donné par les composantes  $\tilde{g}_{ij} = \tilde{g}_{ij}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$ , et notons  $\tilde{\varphi}(p) = \tilde{a}$ . La carte  $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$  est dite *normale en p* si

$$\tilde{g}_{ij}(\tilde{a}) = \delta_{ij}, \quad \frac{\partial \tilde{g}_{ij}(\tilde{a})}{\partial \tilde{x}_k} = 0, \quad i, j, k = 1, \dots, n.$$

**2.2 Exemple.** Si  $S$  est une surface de  $\mathbb{R}^3$  et  $T_p S \subset \mathbb{R}^3$  le plan tangent en  $p$  qu'on identifie avec  $\mathbb{R}^2$ , on obtient une carte normale en  $p$  en projetant les points au voisinage de  $p$  orthogonalement sur  $T_p S$  (voir les exercices).

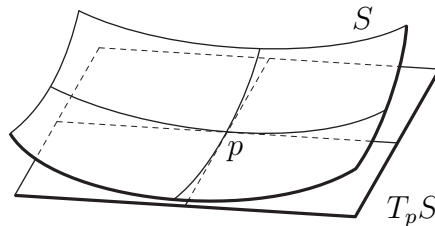


FIGURE 2.1.

En anticipant le fait que des cartes normales existent toujours (l'existence est déléguée au lemme 2.9), nous donnons maintenant une définition de la dérivée d'un champ de vecteurs le long d'une courbe qui généralise, pour une variété riemannienne, la dérivation habituelle d'un champ le long d'une courbe dans  $\mathbb{R}^n$ . On appellera cette dérivation la *dérivation covariante*, plus précisément, la *dérivation covariante de Levi-Civita*.

Dans ce qui suit, les courbes et les champs de vecteurs sont supposés différentiables, sans que l'on ne le répète, et  $M$  est une variété riemannienne de dimension  $n$ .



**2.3 Définition.** Soit  $c : I \rightarrow M$  une courbe et  $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$  une carte normale en  $c(t_0)$  avec les champs de bases associés  $\tilde{X}^1, \dots, \tilde{X}^n$ . Pour un champ de vecteurs

$$Y(t) = \sum_{i=1}^n \tilde{b}_i(t) \tilde{X}_{c(t)}^i$$

le long de  $c$ , la *dérivée covariante* en  $t_0$  est, par définition

$$\frac{D}{dt}Y(t_0) = \sum_{i=1}^n \dot{\tilde{b}}_i(t_0) \tilde{X}_{c(t_0)}^i.$$

Nous démontrerons dans la formule (2.7) que cette définition ne dépend pas du choix de la carte normale. Observons que pour la variété riemannienne  $(\mathbb{R}^n, g_0)$ , la carte standard  $(\mathbb{R}^n, \text{id}_{\mathbb{R}^n})$  est une carte normale en tout point de  $\mathbb{R}^n$ . Dans le cas euclidien, la dérivée covariante coïncide donc avec la dérivée habituelle.

Pour déterminer la dérivée  $\frac{D}{dt}Y(t)$  en  $t = t_0$  directement via la définition 2.3, on a besoin d'une carte normale en  $c(t_0)$ , donc d'une carte spécialement adaptée au point  $c(t_0)$ . Ceci est rarement maniable, et nous trouverons dans (2.7) la bonne formule pour le calcul. L'intérêt d'introduire la dérivée covariante comme nous l'avons fait ici, est que les propriétés géométriques s'y voient plus facilement.

Par exemple, les règles suivantes sont une conséquence immédiate de la définition 2.3. Dans ces règles,  $X, Y$  sont des champs de vecteurs le long de  $c$ , et  $f$  est une fonction différentiable. L'écriture de  $t_0$  est supprimée.

#### 2.4 Règles de calcul.

- (i)  $\frac{D}{dt}(X + Y) = \frac{D}{dt}X + \frac{D}{dt}Y,$
- (ii)  $\frac{D}{dt}(fX) = \frac{df}{dt}X + f \frac{D}{dt}X,$
- (iii)  $\frac{d}{dt}g(X, Y) = g\left(\frac{D}{dt}X, Y\right) + g\left(X, \frac{D}{dt}Y\right).$  □

Notre but est maintenant de calculer la dérivée covariante dans une carte quelconque. L'expression obtenue nous permettra, entre autres, de conclure que la définition 2.3 ne dépend pas du choix de la carte normale.

Soit donc  $(U, \varphi)$  une carte quelconque autour de  $p = c(t_0)$  avec les champs de bases associés  $X^1, \dots, X^n$ , posons

$$a = \varphi(p),$$

et notons  $g_{ij}(x)$  et  $\tilde{g}_{km}(\tilde{x})$  les composantes du tenseur métrique relativement aux cartes  $(U, \varphi)$ ,  $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ . Pour le changement de cartes, nous écrivons

$$\tilde{x} = y(x) = \tilde{\varphi}(\varphi^{-1}(x)) = (y_1(x), \dots, y_n(x)).$$

Selon (1.6), les deux familles de composantes sont liées par la règle de transformation

$$(1) \quad g_{ij}(x) = \sum_{k,m=1}^n \frac{\partial y_k(x)}{\partial x_i} \frac{\partial y_m(x)}{\partial x_j} \tilde{g}_{km}(y(x)).$$

Sachant que  $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$  est une carte normale en  $p$ , on a  $\tilde{g}_{km}(y(a)) = \delta_{km}$ , et par conséquent

$$(2) \quad g_{ij}(a) = \sum_{m=1}^n \frac{\partial y_m(a)}{\partial x_i} \frac{\partial y_m(a)}{\partial x_j}.$$

Nous aurons aussi besoin des dérivées en ce point : puisque les dérivées de  $\tilde{g}_{km}$  s'annulent en  $y(a)$ , les dérivées de  $g_{ij}$  en  $a$  deviennent

$$(3) \quad \frac{\partial g_{ij}(a)}{\partial x_l} = \sum_{m=1}^n \frac{\partial^2 y_m(a)}{\partial x_i \partial x_l} \frac{\partial y_m(a)}{\partial x_j} + \sum_{m=1}^n \frac{\partial^2 y_m(a)}{\partial x_j \partial x_l} \frac{\partial y_m(a)}{\partial x_i}.$$

Pour calculer la dérivée covariante dans la carte  $(U, \varphi)$ , nous écrivons pour la courbe :

$$\varphi(c(t)) = x(t) = (c_1(t), \dots, c_n(t)),$$

et pour les vecteurs  $X^i$  le long de  $c$  :  $X^i(t) \stackrel{\text{déf}}{=} X_{c(t)}^i$ . Le travail consiste à trouver l'expression pour la dérivée covariante de  $X^i(t)$ . Cette dérivée s'exprime dans la base  $X_{c(t_0)}^1, \dots, X_{c(t_0)}^n$  :

$$(4) \quad \frac{D}{dt} X^j(t_0) = \sum_{k=1}^n v_k X_{c(t_0)}^k,$$

avec des  $v_k \in \mathbb{R}$  à déterminer. Selon la formule de transformation pour les changements de cartes, on a

$$X^j(t) = \sum_{m=1}^n \frac{\partial y_m(x(t))}{\partial x_j} \tilde{X}_{c(t)}^m,$$

et la dérivée en  $t = t_0$  devient

$$\frac{D}{dt} X^j(t_0) = \sum_{i,m=1}^n \frac{\partial^2 y_m(a)}{\partial x_i \partial x_j} \dot{c}_i(t_0) \tilde{X}_{c(t_0)}^m,$$

(avec  $a = x(t_0) = \varphi(c(t_0))$ ). Selon la même formule de transformation, appliquée à  $X_{c(t_0)}^k$  dans (4), on a aussi

$$\frac{D}{dt}X^j(t_0) = \sum_{k,m=1}^n v_k \frac{\partial y_m(a)}{\partial x_k} \tilde{X}_{c(t_0)}^m.$$

En comparant les coefficients, sachant que les  $\tilde{X}_{c(t_0)}^m$  forment une base :

$$\sum_{k=1}^n v_k \frac{\partial y_m(a)}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 y_m(a)}{\partial x_i \partial x_j} \dot{c}_i(t_0).$$

C'est maintenant la formule (2) qui donne l'idée de comment on peut mettre les  $v_k$  en évidence : en multipliant les deux côtés de cette équation par  $\frac{\partial y_m(a)}{\partial x_l}$  et en prenant la somme sur  $m$  nous obtenons avec (2) :

$$\sum_{k=1}^n v_k g_{kl}(a) = \sum_{i=1}^n \Gamma_{ijl}(a) \dot{c}_i(t_0),$$

où  $\Gamma_{ijl}(a)$  est une abréviation :

$$(5) \quad \Gamma_{ijl}(a) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{m=1}^n \frac{\partial^2 y_m(a)}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial y_m(a)}{\partial x_l}.$$

Pour mettre les  $v_k$  en évidence, on prend alors l'inverse  $(g^{lm}) = (g_{kl})^{-1}$  de la matrice  $(g_{kl})$ , c'est-à-dire les  $n \times n$  constantes  $g^{lm}(a)$  satisfaisant

$$\sum_{l=1}^n g_{kl}(a) g^{lm}(a) = \delta_{km}.$$

En multipliant avec  $g^{lm}(a)$  et en prenant la somme sur  $l$ , nous obtenons

$$(6) \quad v_m = \sum_{i,l=1}^n \Gamma_{ijl}(a) g^{lm}(a) \dot{c}_i(t_0), \quad m = 1, \dots, n.$$

À présent, il se produit un miracle : les  $\Gamma_{ijl}(a)$  ont aussi une apparence dans la relation (3), et cette observation va nous permettre de les exprimer uniquement en termes des composantes du tenseur métrique dans la carte  $(U, \varphi)$ , sans faire intervenir les fonctions  $y_m$  qui dépendent encore de la carte normale  $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ .

En effet, avec (3) et (5) on peut écrire

$$\frac{\partial g_{ij}(a)}{\partial x_l} = \Gamma_{ilj}(a) + \Gamma_{jli}(a).$$

Les  $\Gamma$  peuvent être isolés en permutant les indices cycliquement :

$$\begin{aligned} -\Gamma_{ilj}(a) - \Gamma_{jli}(a) &= -\frac{\partial g_{ij}(a)}{\partial x_l}, \\ \Gamma_{jil}(a) + \Gamma_{lij}(a) &= \frac{\partial g_{jl}(a)}{\partial x_i}, \\ \Gamma_{lji}(a) + \Gamma_{ijl}(a) &= \frac{\partial g_{li}(a)}{\partial x_j}. \end{aligned}$$

En prenant la somme à gauche et à droite, et en observant que  $\Gamma_{ijl}(a) = \Gamma_{jil}(a)$ , etc., nous obtenons

$$(7) \quad \Gamma_{ijl}(a) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{jl}(a)}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{il}(a)}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}(a)}{\partial x_l} \right).$$

Avec (4) et (6), la dérivée covariante de  $X^j(t)$  en  $t = t_0$  devient

$$(8) \quad \frac{D}{dt} X^j(t_0) = \sum_{k=1}^n \left\{ \sum_{i,l=1}^n \Gamma_{ijl}(a) g^{lk}(a) \dot{c}_i(t_0) \right\} X_{c(t_0)}^k.$$

Dans cette expression, la carte normale  $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$  n'intervient plus (au vu de (7)), et ceci implique que la définition 2.3 ne dépend pas du choix de la carte normale.

Afin de pouvoir mieux citer les résultats obtenus, nous introduisons les notations suivantes.

**2.5 Définition.** Soit  $(U, \varphi)$  une carte d'une variété riemannienne avec les champs de bases associés  $X^1, \dots, X^n$ , notons  $g_{ij}(x)$  les composantes du tenseur métrique et  $g^{lm}(x)$  les composantes du tenseur inverse, de sorte que  $\sum_{l=1}^n g_{kl}(x) g^{lm}(x) = \delta_{km}$ . On appelle *symboles de Christoffel* les fonctions suivantes, définies sur  $\varphi(U)$ ,

$$\begin{aligned} \Gamma_{ijl}(x) &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{jl}(x)}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{il}(x)}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}(x)}{\partial x_l} \right), \\ \Gamma_{ij}^k(x) &= \sum_{l=1}^n \Gamma_{ijl}(x) g^{lk}(x). \end{aligned}$$

Comme pour les composantes de  $g$ , il est commode de considérer les symboles de Christoffel aussi comme fonctions sur  $U$ , et nous écrivons, sans changer la notation,  $\Gamma_{ijl}(p) = \Gamma_{ijl}(\varphi(p))$ ,  $\Gamma_{ij}^k(p) = \Gamma_{ij}^k(\varphi(p))$ ,  $p \in U$ . Observons que

$$(2.6) \quad \Gamma_{ijl} = \Gamma_{jil}, \quad \Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k.$$

Résumons donc le résultat obtenu en faisant intervenir ces symboles : Si  $c : I \rightarrow U$  est un arc de courbe dans  $U$  avec la représentation locale  $\varphi(c(t)) = (c_1(t), \dots, c_n(t))$ , alors la dérivée covariante d'un champ de vecteurs  $Y(t) = \sum_{j=1}^n b_j(t) X_{c(t)}^j$  est donnée par

$$(2.7) \quad \frac{D}{dt} Y(t) = \sum_k^n \left\{ \dot{b}_k(t) + \sum_{i,j=1}^n \dot{c}_i(t) b_j(t) \Gamma_{ij}^k(c(t)) \right\} X_{c(t)}^k$$

(utiliser la formule (8) ci-dessus et les règles de calcul 2.4).

### Existence des cartes normales

**2.8 Lemme.** *Pour tout point  $p$  d'une variété riemannienne, il existe une carte normale en  $p$ .*

*Preuve.* Dans le lemme 1.8 nous avons déjà construit une carte  $(U, \varphi)$  autour de  $p$  avec  $\varphi(p) = 0$  et  $g_{ij}(0) = \delta_{ij}$ . Il s'agit alors d'y apporter une modification telle que les dérivées partielles de  $g_{ij}$  s'annulent en 0. Les formules (3), (5), (7) ci-dessus suggèrent de faire un changement de cartes en posant

$$y_k = x_k + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n c_{ijk} x_i x_j$$

avec les constantes  $c_{ijk} = \frac{1}{2} (\frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk}(0) + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ik}(0) - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij}(0))$ . Sur un voisinage de 0 suffisamment petit, l'application ainsi définie est bien un changement de cartes. On vérifie que

$$\frac{\partial g_{ij}(0)}{\partial x_l} = c_{ilj} + c_{jli} + \frac{\partial \tilde{g}_{ij}(0)}{\partial y_l},$$

ce qui implique que  $\frac{\partial \tilde{g}_{ij}(0)}{\partial y_l} = 0$ , pour  $i, j, l = 1, \dots, n$ , et la nouvelle carte est normale en  $p$ .  $\square$

### Dérivation covariante au voisinage d'un point

La dérivée covariante se généralise pour les champs de vecteurs définis sur des ouverts de  $M$ . Pour ceci nous commençons par la notion de *connexion* sur  $M$ .

**2.9 Notations.** Pour  $p \in M$ ,  $\chi_p(M)$  désigne l'ensemble des champs de vecteurs différentiables définis sur un ouvert de  $M$  qui contient  $p$ . Deux champs de vecteurs

$X, Y \in \chi_p(M)$  sont *équivalents en  $p$* , auquel cas nous noterons  $X \sim_p Y$ , s'il existe un voisinage ouvert  $U$  de  $p$  tel que  $X(q) = Y(q)$  pour tout  $q \in U$ . En d'autres termes,

$$X \sim_p Y \iff X = Y \text{ au voisinage de } p.$$

**2.10 Définition.** Une *connexion* sur  $M$  est une application  $\nabla$  qui à tout  $A \in T_p M$  ( $p \in M$ ) et tout  $X \in \chi_p(M)$  fait correspondre un vecteur tangent

$$\nabla_A X \in T_p M$$

tel que les règles suivantes sont vérifiées pour  $A, B \in T_p M$ ,  $X, Y \in \chi_p(M)$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , et  $f \in \mathcal{F}_p(M)$ .

- (1)  $\nabla_{\lambda A + \mu B} X = \lambda \cdot \nabla_A X + \mu \cdot \nabla_B X,$
- (2)  $\nabla_A (X + Y) = \nabla_A X + \nabla_A Y,$
- (3)  $\nabla_A (f \cdot X) = A[f] \cdot X_p + f(p) \cdot \nabla_A X,$
- (4)  $X \sim_p Y \implies \nabla_A X = \nabla_A Y.$

De plus, si  $Z$  et  $V$  sont des champs de vecteurs différentiables sur un domaine ouvert  $\Omega \subset M$ , alors le champ de vecteurs  $\nabla_Z V$ , défini par

$$(5) \quad \nabla_Z V(p) \stackrel{\text{déf}}{=} \nabla_{Z_p} V, \quad p \in \Omega$$

doit être différentiable. Ici nous utilisons la notation  $\nabla_Z V(p)$  au lieu de  $(\nabla_Z V)_p$ .

Une connexion  $\nabla$  est appelée *symétrique* si pour toute carte  $(U, \phi)$ , les champs de bases associés  $X^1, \dots, X^n$  satisfont

$$(6) \quad \nabla_{X^i} X^j = \nabla_{X^j} X^i, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Une connexion  $\nabla$  est appelée *riemannienne* si elle satisfait la règle suivante pour  $A \in T_p M$  et  $X, Y \in \chi_p(M)$

$$(7) \quad A[g(X, Y)] = g(\nabla_A X, Y) + g(X, \nabla_A Y).$$

Nous généralisons maintenant la dérivée covariante en une telle connexion.

**2.11 Définition.** Soit  $p \in M$ ,  $A \in T_p M$  et  $Y \in \chi_p(M)$ . Soit  $\alpha : I \rightarrow M$  une courbe différentiable telle que les points  $\alpha(t)$  se trouvent dans le domaine de définition de  $Y$

et telle que pour un  $t_0 \in I$  on a

$$\alpha(t_0) = p, \quad \dot{\alpha}(t_0) = A.$$

La *dérivée covariante de  $Y$  suivant  $A$*  est alors le vecteur en  $p$  défini par

$$D_A Y \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{D}{dt}(Y \circ \alpha)(t_0).$$

L'indépendance du choix de la courbe  $\alpha$  se déduit de l'expression de  $D_A Y$  en coordonnées, (2.12) ci-dessous : reprenons la carte  $(U, \varphi)$  avec les champs de bases associés  $X^1, \dots, X^n$ , les symboles de Christoffel  $\Gamma_{ij}^k$ , etc. Le champ de vecteurs  $Y$  a une écriture

$$Y = \sum_{k=1}^n b_k X^k,$$

où  $b_1, \dots, b_n$  sont des fonctions différentiables au voisinage de  $p$ , et  $A$  est une combinaison linéaire

$$A = \sum_{i=1}^n a_i X_p^i.$$

(Contrairement aux  $b_k$  qui sont des fonctions, les  $a_i$  sont des constantes.) Le long de  $\alpha$  les coefficients de  $Y$  sont des fonctions  $t \mapsto b_k(\alpha(t))$ , et selon la définition du vecteur tangent d'une courbe on a

$$\frac{d}{dt}(b_k \circ \alpha)(t_0) = A[b_k].$$

La formule (2.7) appliquée à  $Y \circ \alpha$  se traduit alors en l'expression cherchée :

$$(2.12) \quad D_A Y = \sum_k^n \left\{ A[b_k] + \sum_{i,j=1}^n a_i b_j(p) \Gamma_{ij}^k(p) \right\} X_p^k.$$

Avec cette formule, il est facile de voir que  $D$  est une connexion.

Si  $A$  est un *champ* de vecteurs et  $D_A Y$  le champ défini par

$$(2.13) \quad D_A Y(p) \stackrel{\text{déf}}{=} D_{A_p} Y,$$

pour  $p$  dans l'intersection des domaines de définitions de  $A$  et  $Y$ , la formule 2.12 devient

$$(2.14) \quad D_A Y = \sum_k^n \left\{ A[b_k] + \sum_{i,j=1}^n a_i b_j \Gamma_{ij}^k \right\} X^k.$$

Ici, les  $a_i$  sont les fonctions tels que la partie du champ  $A$  qui se trouve dans la carte s'écrit  $A = \sum_{i=1}^n a_i X^i$ .

Pour les champs de bases eux-mêmes, on a

$$D_{X^i} X^j = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k X^k = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ji}^k X^k = D_{X^j} X^i$$

(voir 2.6), donc  $D$  est symétrique. En plus, la règle 2.4(iii) montre que  $D$  est une connexion riemannienne.

Il est intéressant de noter que  $D$  est entièrement caractérisée par ces propriétés :

**2.15 Théorème (Levi-Civita).**  *$D$  est l'unique connexion symétrique riemannienne sur  $M$ .*

*Preuve.* Il ne reste que l'unicité à démontrer. Soit donc  $\nabla$  une telle connexion, soit  $p \in M$ , et soient  $\tilde{X}^1, \dots, \tilde{X}^n$  les champs de bases associés à une carte normale  $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$  en  $p$ . Puisque  $\nabla$  satisfait 2.10 (1)–(4), les valeurs de  $\nabla_A Y$  pour  $A \in T_p M$  et  $Y \in \chi_p(M)$  sont entièrement déterminées par les  $\nabla_{\tilde{X}_p^i} \tilde{X}^j$ . Nous montrons alors que

$$\nabla_{\tilde{X}_p^i} \tilde{X}^j = 0,$$

ce qui achèvera la démonstration.

Puisque la carte est normale en  $p$  et  $\nabla$  est riemannienne on a

$$\frac{\partial}{\partial x_l} g_{ij}(\tilde{\varphi}(p)) = \tilde{X}_p^l [g(\tilde{X}^i, \tilde{X}^j)] = g(\nabla_{\tilde{X}_p^l} \tilde{X}^i, \tilde{X}^j) + g(\tilde{X}_p^i, \nabla_{\tilde{X}_p^l} \tilde{X}^j) = 0.$$

En procédant comme pour les  $\Gamma_{ilj}$  dans la première partie du chapitre nous abrégeons  $g(\nabla_{\tilde{X}_p^l} \tilde{X}^i, \tilde{X}_p^j) = c_{ilj}$  et écrivons l'égalité précédente trois fois en permutant les indices :

$$\begin{aligned} -c_{ilj} - c_{jli} &= 0 \\ c_{jil} + c_{lij} &= 0 \\ c_{lji} + c_{ijl} &= 0 \end{aligned}$$



Puisque  $\nabla$  est symétrique on a  $c_{ilj} = c_{lij}$ , etc. et en prenant la somme, on obtient  $c_{jil} = g(\nabla_{\tilde{X}_p^i} \tilde{X}^j, \tilde{X}_p^l) = 0$ . Enfin, les  $\tilde{X}_p^l$  forment une base orthonormée de  $T_p M$  et par conséquent,  $\nabla_{\tilde{X}_p^i} \tilde{X}^j = 0$  pour  $i, j = 1, \dots, n$ .  $\square$

La dérivation covariante  $D$  ainsi caractérisée s'appelle aussi la *connexion de Levi-Civita*.

## Champs parallèles le long d'une courbe

**2.16 Définition.** Soit  $M$  une variété riemannienne, et  $c : I \rightarrow M$  une courbe différentiable. Un champ de vecteurs  $Y \in \chi(c)$  s'appelle un *champ parallèle* (ou champ de vecteurs parallèles) si  $\frac{D}{dt}Y(t) = 0$  pour tout  $t \in I$ .

**2.17 Théorème.** Soient  $c : I \rightarrow M$  une courbe différentiable,  $t_0 \in I$ , et  $A \in T_{c(t_0)}M$ . Alors il existe exactement un champ parallèle  $Y$  le long de  $c$  tel que  $Y(t_0) = A$ .

*Preuve.* La courbe  $c$  peut être divisée en petits morceaux de telle façon que chaque morceau est situé dans le voisinage d'une carte. Il suffit alors de considérer le cas d'un tel morceau.

Soit donc  $(U, \varphi)$  une carte comme dans les paragraphes précédents et  $c : I \rightarrow U$  où nous écrivons  $\varphi(c(t)) = (c_1(t), \dots, c_n(t))$ . Le champ de vecteurs  $Y$  a la forme  $Y(t) = \sum_{k=1}^n b_k(t)X_{c(t)}^k$ , où selon (2.7) les fonctions  $b_k$  doivent satisfaire le système d'équations différentielles ordinaires

$$\dot{b}_k(t) + \sum_{i=1}^n b_i(t)\gamma_i^k(t) = 0, \quad k = 1, \dots, n,$$

avec les coefficients

$$\gamma_i^k(t) = \sum_{j=1}^n \dot{c}_j(t)\Gamma_{ij}^k(c(t)).$$

Il s'agit d'un système linéaire avec la condition initiale que les  $b_k(t_0)$  coïncident avec les composantes de  $A$  dans la base  $X_{c(t_0)}^1, \dots, X_{c(t_0)}^n$ . Selon le théorème fondamental sur les équations différentielles linéaires, il existe une solution uniquement déterminée.  $\square$

Les vecteurs  $Y(t)$  de ce champ s'appellent les *déplacés parallèles de  $A$*  le long de  $c$ . Le déplacement parallèle ainsi défini jouera un rôle fondamental dans l'étude de la courbure.

**2.18 Corollaire.** Soient  $c : I \rightarrow M$  une courbe différentiable,  $t_0 \in I$ , et  $A^1, \dots, A^n \in T_{c(t_0)}M$  une base orthonormée. Alors il existe des champs de vecteurs parallèles  $Y^1, \dots, Y^n$  le long de  $c$  tels que  $Y^i(t_0) = A^i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , et tels que  $Y^1(t), \dots, Y^n(t)$  est une base orthonormée de  $T_{c(t)}M$  pour tout  $t \in I$ .

*Preuve.* D'après le théorème 2.17, il existe des champs de vecteurs parallèles  $Y^i$  vérifiant la première condition. Vu que

$$\frac{d}{dt}g(Y^i(t), Y^j(t)) = g\left(\frac{D}{dt}Y^i(t), Y^j(t)\right) + g\left(Y^i(t), \frac{D}{dt}Y^j(t)\right) = 0,$$

ils vérifient aussi la seconde. □

## Chapitre 3 Géodésiques

En géométrie riemannienne il existe une catégorie de courbes qui jouent le même rôle que les droites en géométrie euclidienne. On les appelle les géodésiques. Nous les introduisons comme étant les courbes qui “vont tout droit” dans le sens que leur champ de vecteurs tangents est un champ parallèle.

Dans tout le chapitre,  $(M, g)$  signifie une variété riemannienne de dimension  $n \geq 2$ , on note  $\|A\|_g = (g(A, A))^{1/2}$  la norme d’un vecteur, et  $D$  la dérivation covariante de Levi-Civita.

**3.1 Définition.** Une courbe différentiable  $c : J \rightarrow M$  est appelée une *géodésique* si

$$\frac{D}{dt}\dot{c}(t) = 0, \quad t \in J.$$

**3.2 Remarques.** (i) Pour une géodésique  $c : J \rightarrow M$  on a toujours

$$\|\dot{c}(t)\|_g = \text{constante}.$$

On le voit à l’aide de la règle de dérivation 2.4(3) :

$$\frac{d}{dt}g(\dot{c}(t), \dot{c}(t)) = g\left(\frac{D}{dt}\dot{c}(t), \dot{c}(t)\right) + g\left(\dot{c}(t), \frac{D}{dt}\dot{c}(t)\right) = 0.$$

Les géodésiques sont donc automatiquement paramétrées de vitesse constante.

(ii) Si  $c$  est une géodésique et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , la courbe  $t \mapsto c(\lambda t)$  est également une géodésique.

Si  $c : J \rightarrow M$  est une géodésique, ce sera parfois aussi l’ensemble  $\{c(t) \mid t \in J\}$  qu’on appellera “géodésique”.

**Les équations d’une géodésique en coordonnées.** Soit  $(U, \varphi)$  une carte de la variété riemannienne  $M$  avec les champs de bases associés  $X^1, \dots, X^n$ , les symboles de Christoffel  $\Gamma_{ij}^k$ , etc. Soit  $J' \subset J$  un sous-intervalle de  $J$  tel que  $c(J') \subset U$ , et notons  $\varphi(c(t)) = (c_1(t), \dots, c_n(t))$ ,  $t \in J'$ , la représentation de  $c$  en coordonnées. La formule (2.7) appliquée au champ de vecteurs  $Y(t) = \dot{c}(t)$  donne

$$\frac{D}{dt}\dot{c}(t) = \sum_{k=1}^n \left( \ddot{c}_k(t) + \sum_{i,j=1}^n \dot{c}_i(t)\dot{c}_j(t)\Gamma_{ij}^k(c(t)) \right) X_{c(t)}^k.$$

La partie  $c|_{J'}$  est donc une géodésique si et seulement si

$$(3.3) \quad \boxed{\ddot{c}_k(t) + \sum_{i,j=1}^n \dot{c}_i(t)\dot{c}_j(t)\Gamma_{ij}^k(c(t)) = 0}$$

pour  $t \in J'$ ,  $k = 1, \dots, n$ . Dans cette équation il faut lire

$$\Gamma_{ij}^k(c(t)) = \Gamma_{ij}^k(c_1(t), \dots, c_n(t)).$$

**3.4 Exemple** (Géodésiques de  $\mathbb{R}^n$ ). Nous considérons comme exemple la variété riemannienne  $M = \mathbb{R}^n$  avec la métrique euclidienne standard. Pour la carte  $(\mathbb{R}^n, \text{id}_{\mathbb{R}^n})$ , les champs de bases associés sont  $e^1, \dots, e^n$ , où  $e_x^1 = (1, 0, \dots, 0)_x$ , etc., et on a  $D_{e^i}e^j = 0$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ . Par conséquent les symboles de Christoffel s'annulent, et les équations d'une géodésique se réduisent à

$$\ddot{c}_k(t) = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Les seules solutions de ces équations sont les fonctions  $c_k(t) = a_k t + b_k$  avec des constantes  $a_k, b_k$ . Les géodésiques dans  $\mathbb{R}^n$  sont donc les droites et les segments de droites.

**3.5 Théorème.** *Si  $\Psi : M \rightarrow M'$  est une isométrie locale de la variété riemannienne  $M$  vers la variété riemannienne  $M'$ , et si  $c : J \rightarrow M$  est une géodésique, alors  $\Psi \circ c : J \rightarrow M'$  est une géodésique.*

*Preuve.* Soit  $t_0 \in J$ . Il faut démontrer que  $\Psi \circ c$  satisfait les équations d'une géodésique pour  $t$  au voisinage de  $t_0$ . Pour ceci nous prenons une carte  $(U, \varphi)$  de  $M$  telle que  $c(t_0) \in U$ , et telle que  $\Psi|_U : U \rightarrow U' := \Psi(U)$  est un difféomorphisme. Le couple  $(U', \varphi')$  avec  $\varphi' := \varphi \circ (\Psi|_U)^{-1}$  est alors une carte de  $M'$ . Par le choix de la carte  $(U', \varphi')$ , la représentation locale de  $\Psi$  prend la forme  $y = \varphi' \circ \Psi \circ \varphi^{-1}(x) = x$ ,  $x \in \varphi(U)$ . Puisque  $\Psi|_U : U \rightarrow U'$  est une isométrie, il s'ensuit que les deux tenseurs métriques ont les mêmes composantes par rapport à ces cartes :

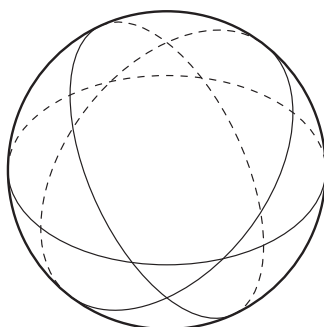
$$g_{ij}(x) = g'_{ij}(x), \quad \text{pour } x \in \varphi(U) = \varphi'(U'),$$

et donc aussi les mêmes symboles de Christoffel. En plus, les représentations locales des deux courbes sont les mêmes :

$$\varphi' \circ \Psi \circ c(t) = \varphi \circ c(t) = (c_1(t), \dots, c_n(t)), \quad \text{pour } t \text{ au voisinage de } t_0.$$

Les équations à satisfaire sont donc les mêmes pour  $c$  et  $\Psi \circ c$ . □

**3.6 Exemple** (Géodésiques de  $\mathbb{S}^n$ ). Dans cet exemple nous déterminons les géodésiques de la sphère  $\mathbb{S}^n = \{u \in \mathbb{R}^{n+1} \mid u_1^2 + \dots + u_{n+1}^2 = 1\}$ , munie de la métrique induite de  $\mathbb{R}^{n+1}$  (exemples A.11 et 1.2(2)).

FIGURE 3.1. Géodésiques sur  $\mathbb{S}^2$ 

On appelle *grand cercle* de  $\mathbb{S}^n$  toute intersection  $\mathbb{S}^n \cap E$ , où  $E$  est un plan passant par  $(0, \dots, 0)$  dans  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Un exemple de grand cercle est l'ensemble des points de la courbe suivante :

$$c(t) = (\cos(t), \sin(t), 0, \dots, 0) \in \mathbb{S}^n, \quad t \in \mathbb{R}.$$

On sait que le groupe orthogonal  $\text{SO}(n)$  opère sur  $\mathbb{S}^n$  par isométries et qu'il permute les plans. Par conséquent, tout grand cercle sur  $\mathbb{S}^n$  est l'image  $\Psi \circ c$  pour un  $\Psi \in \text{SO}(n)$ . Nous vérifierons maintenant que la courbe  $c$  ci-dessus est une géodésique. Avec le théorème 3.5 cela nous donne le résultat que *tous* les grand cercles de  $\mathbb{S}^n$  sont des géodésiques.

Pour effectuer les calculs nous prenons la carte  $(U_N, \varphi_N)$  comme dans l'exemple A.11, où  $U_N = \mathbb{S}^n \setminus \{N\}$ ,  $N = (0, \dots, 0, 1)$ , et  $\varphi_N$  est la projection stéréographique. La représentation de  $c$  dans cette carte est

$$\varphi_N \circ c(t) = (c_1(t), c_2(t), 0, \dots, 0) = (\cos(t), \sin(t), 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Les composantes du tenseur métrique relativement à cette carte sont

$$g_{ij}(x) = \frac{4\delta_{ij}}{(1 + \|x\|^2)^2}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

(voir les exercices). Les symboles de Christoffel (définition 2.5) se calculent comme suit, où  $k, l, m = 1, \dots, n$  et  $k \neq l, k \neq m, l \neq m$  :

$$\begin{aligned} \Gamma_{kk}^k(x) &= \Gamma_{kl}^l(x) = \Gamma_{lk}^l(x) = -\Gamma_{ll}^k(x) = \frac{-2x_k}{1 + \|x\|^2}, \\ \Gamma_{kl}^m(x) &= 0, \end{aligned}$$

Pour notre courbe  $c$ , le second terme dans l'équation (3.3) devient

$$\sum_{i,j=1}^n \dot{c}_i(t)\dot{c}_j(t)\Gamma_{ij}^k(c(t)) = \sum_{i,j=1}^2 \dot{c}_i(t)\dot{c}_j(t)\Gamma_{ij}^k(c(t)).$$

Sachant que  $c_1(t) = \cos(t)$ ,  $c_2(t) = \sin(t)$ , on vérifie aisément que ce terme est égal à  $-\ddot{c}_k(t)$ , pour  $k = 1, 2$ . Cette égalité est aussi valable pour  $k > 2$ , car dans ce cas  $c_k(t) = 0$  et  $\Gamma_{ij}^k(c(t)) = 0$ , pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $i, j = 1, 2$ . D'où la vérification que  $c$  est une géodésique.

### Propriétés analytiques des géodésiques

Les trois théorèmes suivants (3.7, 3.8, 3.12) concernent l'existence, l'unicité et les propriétés de différentiabilité des géodésiques sur une variété riemannienne  $M$ . Ces théorèmes sont des conséquences des équations différentielles (3.3). Nous les énonçons sans en donner de démonstrations. (Pour une preuve voir par exemple le livre de Boothby.)

**3.7 Théorème\*** (Existence). *Pour tout  $p \in M$  et tout vecteur  $v \in T_p M$  il existe un intervalle ouvert  $J \subset \mathbb{R}$  avec  $0 \in J$  et une géodésique  $\gamma : J \rightarrow M$  telle que  $\gamma(0) = p$  et  $\dot{\gamma}(0) = v$ .*  $\square$

**3.8 Théorème\*** (Unicité). *Soit  $J \subset \mathbb{R}$  un intervalle ouvert et  $c, \gamma : J \rightarrow M$  deux géodésiques. S'il existe  $t_0 \in J$  tel que  $c(t_0) = \gamma(t_0)$  et  $\dot{c}(t_0) = \dot{\gamma}(t_0)$ , alors  $c(t) = \gamma(t)$  pour tout  $t \in J$ .*  $\square$

**3.9 Remarque** (Prolongations). Le théorème 3.7 assure qu'il existe au moins un petit morceau de géodésique passant par un point donné et ayant un vecteur tangent prescrit en ce point. Or, on a souvent besoin de définir cette géodésique sur un intervalle aussi grand que possible. On l'obtient par prolongation :

Soit  $c : J \rightarrow M$  une géodésique. On dit qu'une géodésique  $\tilde{c} : \tilde{J} \rightarrow M$  est une *prolongation de  $c$*  si

$$J \subset \tilde{J} \quad \text{et} \quad \tilde{c}(t) = c(t), \quad \text{pour tout } t \in J.$$

La géodésique  $c$  est dite *maximale* s'il n'existe pas de prolongation avec  $\tilde{J}$  plus grand que  $J$ . La remarque est maintenant celle-ci :

*Toute géodésique se prolonge de manière unique en une géodésique maximale.*

*Preuve.* Comme intervalle nous prenons l'union  $\hat{J} = \bigcup \tilde{J}$  sur toutes les prolongations  $\tilde{c} : \tilde{J} \rightarrow M$  de  $c$ . Ensuite nous définissons une application  $\hat{c} : \hat{J} \rightarrow M$  en choisissant

pour tout  $t \in \hat{J}$  une prolongation  $c^t : J^t \rightarrow M$  avec  $t \in J^t$  et en posant

$$\hat{c}(t) = c^t(t), \quad t \in \hat{J}.$$

Le théorème 3.8 assure que la valeur de  $\hat{c}(t)$  ne dépend pas du choix de la prolongation  $c^t$ , et on voit facilement que  $\hat{c}$  est une prolongation maximale. L'unicité est une conséquence du théorème 3.8.  $\square$

**3.10 Notation.** Pour  $p \in M$  et  $v \in T_p M$  nous notons  $\gamma_v : J_v \rightarrow M$  la géodésique maximale uniquement déterminée satisfaisant  $0 \in J_v$ ,  $\gamma_v(0) = p$  et  $\dot{\gamma}_v(0) = v$ .

L'avantage de cette notation est que pour tout vecteur  $v$  on peut parler de *la* géodésique  $\gamma_v$ .

**3.11 Exemple.** La figure ci-jointe montre une géodésique maximale  $\gamma_v$  sur un domaine ouvert de  $\mathbb{R}^2$ , où ce dernier est muni de la métrique euclidienne standard. L'exemple met en évidence que la longueur de l'intervalle de définition  $J_v$  dépend non seulement du tenseur métrique mais aussi de la nature globale d'une variété.

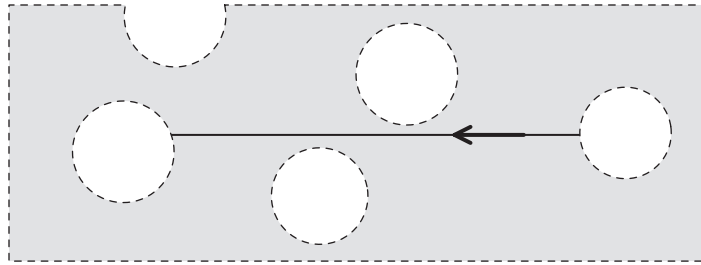


FIGURE 3.2. Géodésique maximale sur une variété d'Emmental

Pour le prochain théorème, nous rappelons que  $TM$  est le fibré tangent de  $M$ .

**3.12 Théorème\*** (Différentiabilité). Soit  $\mathcal{R} = \{(v, t) \in TM \times \mathbb{R} \mid t \in J_v\}$ . Alors  $\mathcal{R}$  est un sous-ensemble ouvert de  $TM \times \mathbb{R}$  et l'application

$$(v, t) \mapsto \gamma_v(t), \quad (v, t) \in \mathcal{R}$$

est différentiable.  $\square$

### L'application exponentielle $\exp$

Une conséquence du dernier théorème est que les géodésiques induisent des cartes très convenables. Pour le voir nous introduisons l'application suivante qui sera un outil fondamental dans tout ce qui suit.

**3.13 Définition.** Soit  $\widetilde{TM} = \{v \in TM \mid [0, 1] \subset J_v\}$ . En posant

$$\exp(v) \stackrel{\text{déf}}{=} \gamma_v(1), \quad v \in \widetilde{TM},$$

on obtient une application  $\exp : \widetilde{TM} \rightarrow M$ . On l'appelle l'*application exponentielle*.

**3.14 Théorème.**  $\widetilde{TM}$  est un sous-ensemble ouvert de  $TM$  et l'application  $\exp$  est différentiable.

*Preuve.* C'est une conséquence du théorème 3.12. Pour montrer que  $\widetilde{TM}$  est ouvert : Si  $1 \in J_v$  alors  $(v, 1) \in \mathcal{R}$  où  $\mathcal{R}$  est ouvert dans  $TM \times \mathbb{R}$ . Il existe donc un voisinage ouvert  $\Omega_v$  de  $v$  dans  $TM$  et un intervalle ouvert  $]1 - \delta, 1 + \delta[$  autour de 1 dans  $\mathbb{R}$  tels que  $\Omega_v \times ]1 - \delta, 1 + \delta[ \subset \mathcal{R}$ . Pour tout  $v' \in \Omega_v$  on a donc  $1 \in J_{v'}$  et par conséquent  $\Omega_v \subset \widetilde{TM}$ .  $\square$

Le prochain théorème montre qu'avec  $\exp$  on dispose d'une application qui nous fournit toutes les géodésiques.

**3.15 Théorème.** Si  $v \in \widetilde{TM}$  et  $t \in J_v$ , alors  $tv \in \widetilde{TM}$  et on a

$$\exp(tv) = \gamma_v(t), \quad t \in J_v.$$

*Preuve.* Fixons  $t \in J_v$ . La courbe

$$c(s) = \gamma_v(t \cdot s), \quad s \in [0, 1],$$

est une géodésique (remarque 3.2(ii)) et

$$\dot{c}(0) = t\dot{\gamma}_v(0) = tv.$$

La prolongation maximale (remarque 3.9) de  $c$  coïncide alors avec  $\gamma_{tv}$  et vérifie la condition  $[0, 1] \subset J_{tv}$ . Donc  $tv \in \widetilde{TM}$ . Enfin,

$$\exp(tv) = \gamma_{tv}(1) = c(1) = \gamma_v(t). \quad \square$$

**3.16 Notation.** Pour  $p \in M$  et  $\varepsilon > 0$  nous notons

$$T_p^\varepsilon M = \{v \in T_p M \mid \|v\|_g < \varepsilon\}, \quad \tilde{T}_p M = T_p M \cap \widetilde{TM},$$

et définissons  $\exp_p$  comme étant la restriction

$$\exp_p = \exp|_{\tilde{T}_p M} : \tilde{T}_p M \rightarrow M.$$



On appelle  $\exp_p$  l'application exponentielle en  $p$ .

Une propriété importante est que pour  $\varepsilon$  assez petit,  $\exp_p : T_p^\varepsilon M \rightarrow \exp_p(T_p^\varepsilon M)$  est un difféomorphisme. Cette propriété nous permettra de définir des cartes particulièrement utiles. Le théorème suivant dit qu'en plus on peut prendre le même  $\varepsilon$  pour *tous* les points au voisinage d'un point  $p_0$  donné.

**3.17 Théorème.** *Soit  $p_0 \in M$ . Alors il existe un voisinage ouvert  $\Omega$  de  $p_0$  dans  $M$  et un  $\varepsilon > 0$  tel que pour tout  $p \in \Omega$  on a*

- (1)  $T_p^\varepsilon M \subset \tilde{T}_p M$
- (2)  $\exp_p : T_p^\varepsilon M \rightarrow \exp_p(T_p^\varepsilon M)$  est un difféomorphisme.

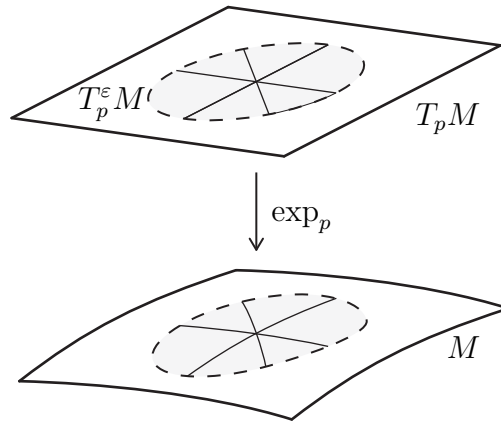


FIGURE 3.3. L'application  $\exp_p$

*Preuve.* Nous prenons une carte  $(U, \varphi)$  de  $M$  avec  $p_0 \in U$ . Il existe un voisinage ouvert  $\Omega \subset U$  avec  $p_0 \in \Omega$ , et un  $\varepsilon' > 0$  tel que la fermeture  $\bar{\Omega}$  est compacte avec  $\bar{\Omega} \subset U$  et tel que

$$\bigcup_{p \in \bar{\Omega}} T_p^{\varepsilon'} M \subset \tilde{T}M.$$

Pour tout  $p \in \bar{\Omega}$ , l'application  $\exp_p : T_p^{\varepsilon'} \rightarrow M$  est différentiable, et nous cherchons un  $\varepsilon$  avec  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon'$  tel que, pour tout  $p \in \Omega$ ,  $\exp_p$  restreint à  $T_p^\varepsilon M$  est un difféomorphisme de  $T_p^\varepsilon M$  sur son image.

Puisque  $\bar{\Omega} \subset U$ , on peut supposer, pour simplifier l'écriture, que  $M = U \subset \mathbb{R}^n$  et  $\varphi = \text{id}_M$ . On a alors  $T_p M = T_p \mathbb{R}^n$ , pour  $p \in M$ . Sur  $M$  on a à présent deux métriques riemanniennes : celle donnée par le tenseur métrique  $g$  avec les fonctions  $g_{ij} = g_{ij}(x)$ ,  $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k(x)$ , etc., et la métrique euclidienne habituelle (exemple 1.2(1)). Nous notons  $\|v\|_g$  et  $\|v\|_E$  les normes respectives pour  $v \in T_p^{\varepsilon'} M$ ,  $p \in M$ . Nous notons aussi  $\|x - y\|_E$  la distance euclidienne de  $x, y \in \mathbb{R}^n$ .

Pour  $T_p M = T_p \mathbb{R}^n$  on a la carte standard  $(T_p M, i_p)$  avec  $i_p$  définie par

$$i_p((v_1, \dots, v_n)_p) = (v_1, \dots, v_n), \quad (v_1, \dots, v_n)_p \in T_p M.$$

La représentation de  $\exp_p$  par rapport aux cartes  $(T_p^{\varepsilon'} M, i_p)$  et  $(M, \text{id}_M)$  est la fonction  $F_p = \exp_p \circ i_p^{-1}$  définie sur l'ouvert  $i_p(T_p^{\varepsilon'} M) \subset \mathbb{R}^n$ . Dans le lemme ci-après, nous démontrons qu'il existe un  $\varepsilon$  positif,  $\varepsilon \leq \varepsilon'$ , tel que pour tout  $p \in \Omega$  et tout  $v, w \in T_p^\varepsilon M$  on a

$$\|\exp_p(v) - \exp_p(w)\|_E > \frac{1}{4} \|v - w\|_E.$$

Pour la fonction  $F_p$  cela signifie que

$$\|F_p(x) - F_p(y)\|_E > \frac{1}{4} \|x - y\|, \quad x, y \in i_p(T_p^\varepsilon M).$$

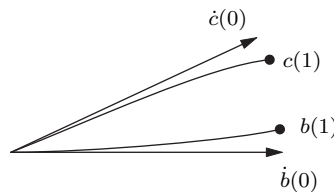
Or, une fonction différentiable avec cette propriété est un difféomorphisme du domaine de définition sur son image. Par conséquent,  $\exp_p : T_p^\varepsilon M \rightarrow \exp_p(T_p^\varepsilon M)$  est un difféomorphisme.

La démonstration du théorème est ainsi ramenée à la démonstration du lemme suivant. Notons que l'hypothèse de l'existence des deux constantes  $\omega, \kappa$  est bien vérifiée dans notre cas car  $\Omega$  est compact et les fonctions  $g_{ij}$  et  $\frac{\partial}{\partial x_l}$  sont continues sur  $\Omega$ .  $\square$

**3.18 Lemme.** *Soit  $g$  une métrique riemannienne définie sur un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  telle que, pour tout  $x \in \Omega$  et tout  $i, j, k, l = 1, \dots, n$ ,*

$$|g_{ij}(x) - \delta_{ij}| < \frac{1}{2n}, \quad |\Gamma_{ij}^k(x)| < \omega, \quad \left| \frac{\partial}{\partial x_l} \Gamma_{ij}^k(x) \right| < \kappa^2,$$

où  $\omega$  et  $\kappa$  sont des constantes positives, et soit  $\varepsilon = \min\{\frac{1}{4n\kappa}, \frac{1}{16n^2\omega}\}$ . Si  $b, c : [0, 1] \rightarrow \Omega$  sont des géodésiques vérifiant  $b(0) = c(0)$  et  $\|\dot{b}(0)\|_g \leq \varepsilon, \|\dot{c}(0)\|_g \leq \varepsilon$ , alors on a, pour  $0 \leq t \leq 1$ ,



$$\begin{aligned} \|b(t) - c(t)\|_E &\geq \frac{t}{2} \|\dot{b}(0) - \dot{c}(0)\|_g \\ &> \frac{t}{4} \|\dot{b}(0) - \dot{c}(0)\|_E. \end{aligned}$$

*Preuve.* En utilisant l'inégalité générale

$$(1) \quad \left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2 \leq n \sum_{i=1}^n a_i^2,$$

pour  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ , (un cas particulier de l'inégalité de Cauchy-Schwarz) nous déduisons de l'hypothèse sur les  $g_{ij}$  que  $\left| \|v\|_g^2 - \|v\|_E^2 \right| \leq \frac{1}{2} \|v\|_E^2$ , et donc

$$(2) \quad \frac{1}{2} \|v\|_E^2 \leq \|v\|_g^2 < \frac{3}{2} \|v\|_E^2,$$

pour tout  $v \in T_x \mathbb{R}^n$ ,  $x \in \Omega$ . Avec (2) on a immédiatement la seconde inégalité du lemme. Le travail consiste à démontrer la première.

Posons  $\delta = \|\dot{b}(0) - \dot{c}(0)\|_g$ , et définissons  $\tau$  comme étant le plus grand nombre dans l'intervalle  $[0, 1]$  tel que pour  $t \in [0, \tau]$  on a les inégalités

$$(3) \quad \|\dot{b}(t) - \dot{c}(t)\|_E \leq 2\delta, \quad \|b(t) - c(t)\|_E \leq 2\delta.$$

D'après (2) et sachant que  $b(0) = c(0)$ , on a  $\tau > 0$ ; nous verrons en bas que  $\tau = 1$ . Sachant que  $c$  et  $b$  satisfont les équations différentielles d'une géodésique, on a

$$\begin{aligned} \ddot{b}_k(t) - \ddot{c}_k(t) &= \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k(b(t)) \dot{b}_i(t) \dot{b}_j(t) - \Gamma_{ij}^k(c(t)) \dot{c}_i(t) \dot{c}_j(t) \\ &= \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k(b(t)) \left( \dot{b}_i(t) (\dot{b}_j(t) - \dot{c}_j(t)) + \dot{c}_j(t) (\dot{b}_i(t) - \dot{c}_i(t)) \right) \\ &\quad + \sum_{i,j} (\Gamma_{ij}^k(b(t)) - \Gamma_{ij}^k(c(t))) \dot{c}_i(t) \dot{c}_j(t). \end{aligned}$$

D'après (3) et (2), et en utilisant (1), on a

$$\begin{aligned} \sum_j |\dot{b}_j(t) - \dot{c}_j(t)| &\leq \sqrt{n} \|\dot{b}(t) - \dot{c}(t)\|_E \leq 2\delta \sqrt{n}, \\ \sum_i |\dot{c}_i(t)| &\leq \sqrt{n} \|\dot{c}(t)\|_E < \sqrt{2n} \|\dot{c}(t)\|_g = \sqrt{2n} \|\dot{c}(0)\|_g, \end{aligned}$$

et les relations de la seconde ligne sont aussi valables avec les rôles de  $b$  et  $c$  inversées. Dans l'égalité à la fin on a utilisé que les géodésiques sont des courbes de vitesse constante (remarque 3.2(i)).

La troisième condition dans l'hypothèse du lemme implique que

$$|\Gamma_{ij}^k(b(t)) - \Gamma_{ij}^k(c(t))| < 2\sqrt{n}\kappa\delta.$$

Nous obtenons ainsi l'estimation suivante,

$$|\ddot{b}_k(t) - \ddot{c}_k(t)| < 4n\sqrt{n}(\omega\varepsilon + \kappa^2\varepsilon^2)\delta.$$

Par conséquent,

$$\|\ddot{b}(t) - \ddot{c}(t)\|_E < \frac{\delta}{2}.$$

En intégrant de 0 à  $t$  :

$$\dot{b}(t) - \dot{c}(t) = \dot{b}(0) - \dot{c}(0) + r_1(t),$$

où

$$r_1(t) = \int_0^t (\ddot{b}(s) - \ddot{c}(s)) ds, \quad \|r_1(t)\|_E < \frac{t\delta}{2}.$$

En intégrant une nouvelle fois de 0 à  $t$  :

$$(4) \quad b(t) - c(t) = \int_0^t (\dot{b}(s) - \dot{c}(s)) ds = t(\dot{b}(0) - \dot{c}(0)) + r_2(t),$$

où

$$(5) \quad r_2(t) = \int_0^t r_1(s) ds, \quad \|r_2(t)\|_E < \frac{t^2\delta}{4}.$$

Ces relations sont valables pour  $t$  dans l'intervalle  $[0, \tau]$ , où  $\tau \leq 1$ . Par conséquent, en utilisant (2),

$$\|\dot{b}(\tau) - \dot{c}(\tau)\|_E \leq \|\dot{b}(0) - \dot{c}(0)\|_E + \|r_1(\tau)\| < \frac{3}{2}\|\dot{b}(0) - \dot{c}(0)\|_g + \frac{\delta}{2}.$$

On voit ainsi que  $\|\dot{b}(\tau) - \dot{c}(\tau)\|_E < 2\delta$ , et de manière similaire on a  $\|b(\tau) - c(\tau)\| < 2\delta$ . Par la définition de  $\tau$ , ceci est seulement possible si  $\tau = 1$ . Les relations (4), (5) sont donc valables pour tout  $t \in [0, 1]$ , et on obtient avec (1), sachant que  $\delta = \|\dot{b}(0) - \dot{c}(0)\|_g$ ,

$$\|b(t) - c(t)\|_E \geq t\|\dot{b}(0) - \dot{c}(0)\|_E - \frac{t^2\delta}{4} \geq \frac{t}{2}\|\dot{b}(0) - \dot{c}(0)\|_g,$$

pour tout  $t \in [0, 1]$ . □

## Chapitre 4 Propriétés minimisantes des géodésiques

Dans ce chapitre, on démontre que les géodésiques d'une variété riemannienne  $(M^n, g)$  sont les courbes qui "minimisent les longueurs". La version précise de cette propriété est énoncée dans les théorèmes 4.9 et 4.13. L'approche utilisée est une méthode de variation.

### Variation d'une courbe.

**4.1 Définition.** Une *variation de courbes* est une application différentiable

$$(s, t) \mapsto f(s, t) \in M, \quad (s, t) \in I \times J,$$

où  $I$  et  $J$  sont des intervalles. Pour chaque valeur de  $s \in I$ , on a une courbe

$$t \mapsto c_s(t) = f(s, t), \quad t \in J.$$

La variation  $f$  se comprend comme la famille des courbes  $c_s$ .

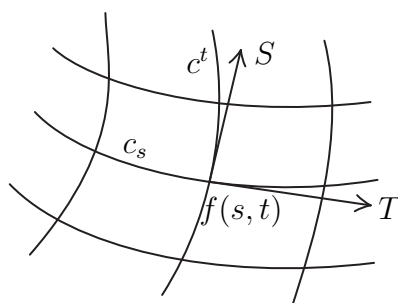


FIGURE 4.1. Variation d'une courbe

Étant donnée une variation  $f : I \times J \rightarrow M$ , on a aussi, pour tout  $t \in J$ , une courbe

$$s \mapsto c^t(s) = f(s, t), \quad s \in I.$$

On a ainsi en tout point  $p = f(s, t)$  les deux vecteurs tangents

$$(4.2) \quad S = S(s, t) = \dot{c}^t(s), \quad T = T(s, t) = \dot{c}_s(t).$$

L'écriture en coordonnées montre que  $S$  et  $T$  sont des champs de vecteurs différentiables le long de  $f$ .

Pour un champ différentiable  $Y$  le long de  $f$ , on a les dérivées covariantes  $D_S Y$  et  $D_T Y$  qui sont définies de la manière suivante :

$$(4.3) \quad \begin{aligned} D_S Y(s, t) &= \frac{D}{ds} Y(s, t), \\ D_T Y(s, t) &= \frac{D}{dt} Y(s, t). \end{aligned}$$

Dans la première équation, il faut interpréter  $t$  comme constante et comprendre  $Y$  comme le champ de vecteurs  $s \mapsto Y(s, t)$  le long de la courbe  $c^t$ . Dans la seconde, on interprète  $s$  comme étant la constante, et  $Y$  est le champ  $t \mapsto Y(s, t)$  le long de la courbe  $c_s$ .

L'expression en coordonnées montre que  $D_S Y$  et  $D_T Y$  sont des champs différentiables le long de  $f$ .

#### 4.4 Lemme.

$$D_S T = D_T S$$

*Preuve.* Soit  $(U, \varphi)$  une carte avec les champs de bases associés  $X^1, \dots, X^n$ . Il suffit de démontrer le lemme pour la partie de la variation dans  $U$ . En supposant que la représentation de  $f$  en coordonnées est donnée sous la forme

$$\varphi \circ f(s, t) = (x_1(s, t), \dots, x_n(s, t)),$$

on obtient

$$S = \sum_{k=1}^n \frac{\partial x_k}{\partial s} X^k, \quad T = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_j}{\partial t} X^j.$$

À l'aide des règles de calcul pour la dérivée covariante, on obtient

$$D_S T = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 x_j}{\partial s \partial t} X^j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_j}{\partial t} D_S X^j$$

et

$$D_S X^j = \sum_{k=1}^n \frac{\partial x_k}{\partial s} D_{X^k} X^j.$$

Donc

$$D_S T = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 x_j}{\partial s \partial t} X^j + \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial x_j}{\partial t} \frac{\partial x_k}{\partial s} D_{X^k} X^j.$$

De manière analogue,

$$D_T S = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 x_j}{\partial t \partial s} X^j + \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial x_j}{\partial s} \frac{\partial x_k}{\partial t} D_{X^k} X^j.$$

Le lemme est maintenant une conséquence de la règle  $\frac{\partial^2}{\partial s \partial t} = \frac{\partial^2}{\partial t \partial s}$  et du fait que  $D$  est symétrique, c-à-d,  $D_{X^k} X^j = D_{X^j} X^k$  (théorème 2.15).  $\square$

### Variation de géodésiques.

Considérons maintenant une variation  $f$  où chaque courbe  $c_s$  est une géodésique. Dans ce cas, on a, sachant que  $\frac{D}{dt} \dot{c}_s(t) = 0$ ,

$$(4.5) \quad D_T T = 0.$$

**4.6 Lemme.** *Soit une variation telle que toutes les courbes  $c_s$  sont des géodésiques. Alors*

$$\frac{\partial}{\partial t} g(S, T) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} g(T, T).$$

*Preuve.* Avec la règle de calcul 2.4(iii) appliquée à la courbe  $c_s$  et en se servant du lemme 4.4 :

$$\frac{\partial}{\partial t} g(S, T) = g(D_T S, T) + g(S, D_T T) = g(D_S T, T) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} g(T, T).$$

$\square$

Un cas particulièrement important s'obtient via l'application exponentielle. Soit  $p \in M$  et considérons  $\exp_p : \tilde{T}_p M \rightarrow M$ . Pour  $v \in \tilde{T}_p M$ , on a la géodésique  $\gamma_v(t) = \exp(tv)$ ,  $t \in J_v$ . En variant  $v$ , on obtient une variation géodésique.

La preuve du lemme de Gauss (voir plus bas) utilisera une telle variation. Pour ce lemme, nous introduisons la notation suivante. Si  $v, w \in T_p M$ , alors

$$w_v \in T_v(T_p M)$$

signifie le vecteur  $w$  après déplacement parallèle en  $v$ . Dans cette définition,  $T_p M$  est vu comme espace euclidien (avec le produit scalaire  $g$ ) et le déplacement parallèle est le déplacement parallèle ordinaire. L'espace  $T_v(T_p M)$  est l'ensemble des vecteurs au point  $v$  de la variété  $T_p M$ . Notons que si  $v$  est dans le domaine de définition de  $\exp_p$ , alors

$$\exp_{p*} : T_v(T_p M) \rightarrow T_{\exp_p(v)} M.$$

Nous observons aussi que

$$(4.7) \quad \exp_{p*}(w_0) = w, \quad \text{pour tout } w \in T_p M.$$

En effet, soit  $\alpha(t) = tw$  (pour  $t$  au voisinage de 0 dans  $\mathbb{R}$ ), alors  $\exp_p \circ \alpha(t) = \gamma_w(t)$ , et

$$\exp_{p*}(w_0) = \exp_{p*}(\dot{\alpha}(0)) = (\exp_p \circ \alpha)'(0) = \dot{\gamma}_w(0) = w.$$

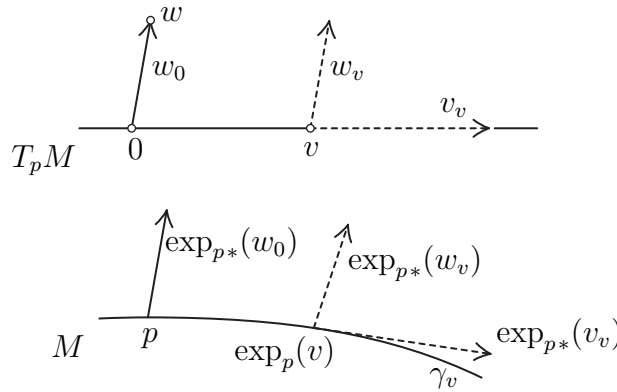


FIGURE 4.2. L'application tangente de  $\exp_p$

**4.8 Théorème** (Lemme de Gauss). Soit  $p \in M$ ,  $v \in \tilde{T}_p M$  et  $w \in T_p M$ . Notons  $v_v, w_v \in T_v(T_p M)$  les vecteurs  $v, w$  après déplacement parallèle en  $v$ . Alors

$$g(\exp_{p*}(v_v), \exp_{p*}(w_v)) = g(v, w).$$

*Preuve.*  $\tilde{T}_p M$  étant ouvert, il existe un intervalle ouvert  $I$  autour de 0 dans  $\mathbb{R}$  tel que  $v + sw \in \tilde{T}_p M$  pour tout  $s \in I$ . Selon le théorème 3.15, on a  $t(v + sw) \in \tilde{T}_p M$  pour tout  $t \in [0, 1]$  et nous trouvons un intervalle ouvert  $J$  avec  $[0, 1] \subset J$  tel que  $t(v + sw) \in \tilde{T}_p M$  pour tout  $s \in I$  et  $t \in J$ . Nous avons donc une variation de géodésiques  $f : I \times J \rightarrow M$  :

$$f(s, t) = \exp_p(t(v + sw)).$$

Cette variation est l'image d'une variation de droites :  $f(s, t) = \exp_p(\tilde{f}(s, t))$ , avec  $\tilde{f}(s, t) = t(v + sw)$ . Cette dernière a comme vecteurs tangents

$$\tilde{S} = \frac{\partial}{\partial s}(t(v + sw)) = tw_{t(v+sw)}, \quad \tilde{T} = \frac{\partial}{\partial t}(t(v + sw)) = (v + sw)_{t(v+sw)}.$$

Les vecteurs tangents de la variation  $f$  deviennent

$$S = S(s, t) = \exp_{p*}(\tilde{S}), \quad T = T(s, t) = \exp_{p*}(\tilde{T}).$$

La courbe  $c_s(t) = \exp_p(t(v + sw))$  est la géodésique à travers  $p$  ayant le vecteur tangent  $\dot{c}_s(0) = v + sw$  en  $p$  (voir théorème 3.15). Puisqu'on a aussi  $\dot{c}_s(t) = T(s, t)$ , on trouve, sachant que la vitesse de la géodésique  $c_s$  est constante et en utilisant la bilinéarité de



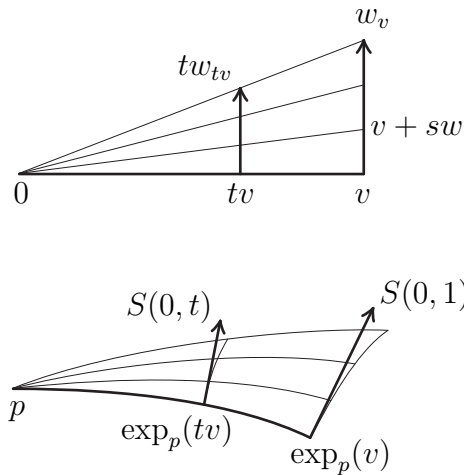


FIGURE 4.3. Variation géodésique et le Lemme de Gauss

$g$ ,

$$\begin{aligned} g(T, T)(s, t) &= g(\dot{c}_s(t), \dot{c}_s(t)) = g(\dot{c}_s(0), \dot{c}_s(0)) \\ &= g(v + sw, v + sw) \\ &= g(v, v) + 2sg(v, w) + s^2g(w, w). \end{aligned}$$

Avec le lemme 4.6, on obtient pour  $s = 0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} g(S, T)(0, t) &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} g(T, T)(0, t) \\ &= g(v, w). \end{aligned}$$

En  $t = 0$ , on a  $S = 0$ . Par conséquent,  $g(S, T)(0, t) = tg(v, w)$ , d'où le théorème, sachant que  $S(0, 1) = \exp_{p*}(w_v)$  et  $T(0, 1) = \exp_{p*}(v_v)$ .  $\square$

Pour le théorème suivant, nous rappelons que tout  $p \in M$  possède un  $\varepsilon > 0$  tel que  $\exp_p : T_p^\varepsilon M \rightarrow \exp_p(T_p^\varepsilon M)$  est un difféomorphisme (théorème 3.17). Les notations sont les suivantes :  $\delta(p, q)$  est la distance entre les points  $p, q \in M$ , et pour  $v \in T_p M$ ,  $\gamma_v : J_v \rightarrow M$  est la géodésique avec  $J_v$  maximal satisfaisant  $\gamma_v(0) = p$ ,  $\dot{\gamma}_v(0) = v$ .

**4.9 Théorème.** *Soit  $\varepsilon > 0$  tel que l'application  $\exp_p : T_p^\varepsilon M \rightarrow \exp_p(T_p^\varepsilon M)$  est un difféomorphisme. Alors pour tout  $q = \exp_p(v)$  avec  $v \in T_p^\varepsilon M$ , on a :*

- (i)  $\delta(p, q) = \|v\|$  ;
- (ii) Si  $c : [0, 1] \rightarrow M$  est une courbe différentiable par morceaux allant de  $p$  à  $q$  ayant la longueur  $\ell(c) = \delta(p, q)$ , alors  $c([0, 1]) = \gamma_v([0, 1])$ .

*Preuve.* Notons d'abord que  $\gamma_v|_{[0,1]}$  est de longueur  $\ell(\gamma_v|_{[0,1]}) = \|v\|$ . La partie (i) du théorème est donc une conséquence de (ii).

Considérons maintenant une courbe  $c \in \mathcal{C}_{pq}$ . Nous pouvons supposer que  $c$  est paramétrée sur l'intervalle  $[0, 1]$  avec  $c(0) = p$  et  $c(1) = q$ . Il suffit de considérer le cas où  $c(t) \neq p$  pour  $t \neq 0$ , car autrement il existerait  $t_0 \in (0, 1]$  tel que  $c(t_0) = p$  "pour la dernière fois", et on peut se restreindre à  $c|_{[t_0, 1]}$ .

Dans un premier temps, nous supposons aussi que  $c([0, 1]) \subset B := \exp_p(T_p^\varepsilon M)$ . Puisque  $\exp_p : T_p^\varepsilon M \rightarrow B$  est un difféomorphisme,  $c$  s'écrit sous la forme  $c(t) = \exp_p(v(t))$  avec une courbe différentiable par morceaux  $t \mapsto v(t) \in T_p^\varepsilon M$ . Soit

$$r(t) = \|v(t)\|.$$

Considérons maintenant un intervalle  $[a, b] \subset (0, 1]$  sur lequel  $v(t)$  est différentiable. En posant  $u(t) = \frac{1}{\|v(t)\|}v(t)$  pour  $t \in [a, b]$ , on peut écrire  $v(t) = r(t)u(t)$ . La dérivée de  $v(t)$  devient

$$\frac{d}{dt}v(t) = \dot{r}(t)u(t) + r(t)\frac{d}{dt}u(t).$$

Puisque  $g(u(t), u(t)) = 1$ , on a  $g(\frac{d}{dt}u(t), u(t)) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}g(u(t), u(t)) = 0$ . Pour le vecteur tangent  $\dot{v}(t)$ , nous obtenons ainsi la décomposition bien connue

$$\dot{v}(t) = \dot{r}(t)u(t)_{v(t)} + w(t)_{v(t)},$$

où  $w(t) = r(t)\frac{d}{dt}u(t)$  est orthogonal à  $v(t)$ . D'après le lemme de Gauss, on a

$$g(\exp_{p*}(u(t)_{v(t)}), \exp_{p*}(w(t)_{v(t)})) = 0.$$

Sachant que  $\dot{c}(t) = \exp_{p*}(\dot{v}(t))$ , nous obtenons donc

$$\|\dot{c}(t)\|^2 = |\dot{r}(t)|^2 + \|\exp_{p*}(w(t)_{v(t)})\|^2 \geq |\dot{r}(t)|^2.$$

Par conséquent,

$$\int_a^b \|\dot{c}\| dt \geq \int_a^b |\dot{r}(t)| dt \geq \left| \int_a^b \dot{r}(t) dt \right| = r(b) - r(a).$$

Puisque  $r(1) = \|v\|$  et  $r(0) = 0$ , ceci permet de conclure que  $\ell(c) \geq \|v\|$ .

Si  $\ell(c) = \|v\|$ , alors il faut que, pour tout  $t \in (0, 1]$ , on ait  $\|\exp_{p*}(w(t)_{v(t)})\| = 0$ . Puisque  $\exp_p : T_p^\varepsilon M \rightarrow B$  est un difféomorphisme, ceci revient à dire que  $w(t) = 0$ , et donc  $u(t)$  est constant. Il est alors facile de conclure que  $v(t) = r(t)v$  avec  $r$  une fonction monotone croissante. Ceci signifie qu'à un changement du paramétrage près, on a bien  $c = \gamma_v|_{[0, 1]}$ .

Il reste encore le cas où  $c([0, 1])$  n'est pas contenu dans  $B$ . Dans ce cas, il existe  $t_1 \in (0, 1)$  tel que  $c([0, t_1]) \subset B$  et tel que  $c(t_1) = \exp_p(v_1)$  avec  $\|v_1\| > \|v\|$ . D'après ce que nous avons vu, ceci implique  $\ell(c) \geq \|v_1\| > \|v\|$ . Le théorème est maintenant démontré.  $\square$

**4.10 Définition.** Soit  $B_p^\varepsilon(M)$  la boule métrique de rayon  $\varepsilon$  :

$$B_p^\varepsilon(M) = \{q \in M \mid \delta(p, q) < \varepsilon\}.$$

On dit que  $B_p^\varepsilon(M)$  est une *boule normale* si  $\exp_p : T_p^\varepsilon M \rightarrow B_p^\varepsilon(M)$  est un difféomorphisme.

Selon le théorème 3.17, il existe pour tout  $p_0 \in M$  un voisinage ouvert  $\Omega$  de  $p_0$  et un  $\varepsilon > 0$  tel que  $B_p^\varepsilon(M)$  est une boule normale pour tout  $p \in \Omega$ . Avec le théorème 4.9, on obtient immédiatement le résultat suivant.

**4.11 Corollaire.** Soit  $p_0 \in M$ . Alors il existe  $\varepsilon > 0$  tel que, pour tout  $p, q \in B_{p_0}^{\varepsilon/2}(M)$ , on a la propriété suivante :

Il existe une géodésique uniquement déterminée  $\gamma_{pq} : [0, 1] \rightarrow B_{p_0}^\varepsilon(M)$  avec  $\gamma_{pq}(0) = p$  et  $\gamma_{pq}(1) = q$ . Cette géodésique est de longueur  $\ell(\gamma_{pq}) = \delta(p, q)$ . À un changement du paramétrage près,  $\gamma_{pq}$  est la seule courbe dans  $\mathcal{C}_{pq}$  de longueur  $\delta(p, q)$ .  $\square$

**4.12 Définition.** Soit une courbe différentiable par morceaux  $c : I \rightarrow M$ . On dit que  $c$  est *localement extrémale* si, pour tout  $t_0 \in I$ , il existe  $\varepsilon > 0$  de sorte que si  $t_0 - \varepsilon < \tau \leq \tau' < t_0 + \varepsilon$ , alors  $\ell(c|_{[\tau, \tau']}) = \delta(c(\tau), c(\tau'))$ .

Le Corollaire 4.11 implique la caractérisation suivante des géodésiques :

**4.13 Théorème.** Une courbe  $c$  dans  $M$  est localement extrémale si et seulement si  $c$  est une géodésique.

Nous terminons ce chapitre par une application aux isométries.

**4.14 Lemme.** Soit  $(M^n, g)$  une variété riemannienne connexe par arcs,  $p \in M$ , et  $v^1, \dots, v^n$  une base de l'espace vectoriel  $T_p M$ .

Si  $\phi : M \rightarrow M$  est une isométrie vérifiant  $\phi(p) = p$  et  $\phi_*(v^i) = v^i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , alors  $\phi = \text{id}_M$ .

*Preuve.* L'application  $\phi_* : T_p M \rightarrow T_p M$  étant linéaire, l'hypothèse du lemme implique que

$$(i) \quad \phi_*(v) = v \quad \text{pour tout } v \in T_p M.$$

D'après les théorèmes 3.17 et 4.9, il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $\exp_p|_{T_p^\varepsilon M} : T_p^\varepsilon M \rightarrow B_p(\varepsilon)$  est bijective.

Soit  $x \in B_p(\varepsilon)$ . Il existe  $v \in T_p M$  uniquement déterminé tel que  $x = \exp_p(v)$ .

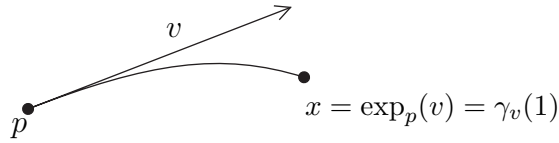


FIGURE 4.4.

D'après la définition de l'application  $\exp$ , on a

$$\exp_p(v) = \gamma_v(1),$$

où  $\gamma_v : [0, 1] \rightarrow M$  est l'unique géodésique vérifiant

$$\gamma_v(0) = p \quad \dot{\gamma}_v(0) = v.$$

L'application  $\phi$  étant une isométrie,  $\phi \circ \gamma_v$  est une géodésique vérifiant

$$(\phi \circ \gamma_v)(0) = \phi(p) = p, \quad (\phi \circ \gamma_v)'(0) = \dot{\gamma}_{\phi_*(v)}(0) = \dot{\gamma}_v(0) = v.$$

En utilisant l'unicité de cette géodésique, on trouve

$$\phi \circ \gamma_v(t) = \gamma_v(t) \quad \forall t \in [0, 1].$$

En particulier  $\phi(\gamma_v(1)) = \gamma_v(1)$ . On a ainsi démontré que

(ii) 
$$\phi(x) = x \quad \forall x \in B_p(\varepsilon).$$

Soit maintenant  $x \in M$  un point quelconque. On ne peut alors plus assurer qu'il existe  $v \in T_p M$  tel que  $x = \exp_p(v)$ . Mais on peut conclure autrement : Puisque  $M$  est connexe, il existe un arc de courbe  $c : [a, b] \rightarrow M$  avec  $c(a) = p$ ,  $c(b) = x$ .

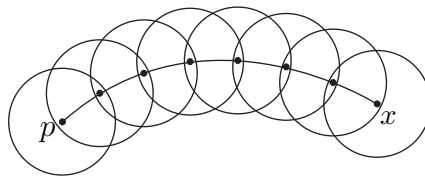


FIGURE 4.5. Recouvrement par des boules

Pour tout  $t \in [a, b]$ , il existe  $\varepsilon_t$  tel que  $\exp_{c(t)} : T_{c(t)}^{\varepsilon_t}(M) \rightarrow B_{c(t)}(\varepsilon_t) = B_t$  est bijective.

L'arc  $c$  étant compact, on peut le recouvrir par un ensemble fini de tels  $B_t$ , i.e il existe  $t_1, \dots, t_m$  avec  $t_1 = a < t_2 < \dots < t_m = b$  tels que

$$c(t_{i+1}) \in B_{t_i}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Selon (ii), on a successivement

$$\phi|_{B_{t_i}} = \text{id}_{B_{t_i}}, \quad i = 1, \dots, m.$$

En particulier,  $\phi(x) = x$ .

□

## Chapitre 5 Le théorème de Hopf-Rinow

Ce chapitre est consacré à un seul théorème. Dans ce théorème,  $\gamma_v : J_v \rightarrow \mathbb{R}$  signifie la géodésique maximale vérifiant  $\dot{\gamma}_v(0) = v$ ,  $v \in TM$ ;  $\ell(c)$  est la longueur d'un arc de courbe  $c$ ;  $d(p, q)$  est la distance entre deux points  $p, q \in M$ .

**5.1 Théorème (Hopf-Rinow).** *Pour une variété riemannienne connexe  $M$ , les trois propriétés suivantes sont équivalentes.*

- (1)  $M$  est un espace métrique complet.
- (2) Pour tout  $p \in M$  et tout  $v \in T_p M$ , le domaine de définition de la géodésique  $\gamma_v$  est  $\mathbb{R}$ .
- (3) Il existe au moins un  $p \in M$  tel que, pour tout  $v \in T_p M$ , le domaine de définition de la géodésique  $\gamma_v$  est  $\mathbb{R}$ .

Si une de ces conditions est vérifiée, alors il existe, pour tout couple de points  $p, q \in M$ , une géodésique  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  telle que  $\gamma(0) = p$ ,  $\gamma(1) = q$ , et  $\ell(\gamma) = d(p, q)$ .

*Preuve.* (1)  $\implies$  (2) : Soit  $p \in M$ . Pour démontrer que  $J_v = \mathbb{R}$ , nous vérifierons que  $J_v \subset \mathbb{R}$  est un sous-ensemble ouvert et fermé (cela achèvera la preuve, car  $J_v$  est connexe). Soit donc  $\tau \in \mathbb{R}$  et  $\{t_k\}_{k=1}^\infty$  une suite dans  $J_v$  telle que  $t_k \rightarrow \tau$ , lorsque  $k \rightarrow \infty$ .

La suite  $\gamma(t_k)$  est de Cauchy (car  $d(\gamma(t_k), \gamma(t_l)) \leq |t_k - t_l| \cdot \|v\|$ ). Il existe donc un point  $p_0 \in M$  tel que  $\gamma(t_k) \rightarrow p_0$ . D'après le théorème 3.17, il existe un voisinage ouvert  $\Omega \subset M$  avec  $p_0 \in \Omega$  et un  $\varepsilon > 0$ , tel que, pour tout  $q \in \Omega$ , l'application  $\exp_q : T_q^\varepsilon M \rightarrow \exp_q(T_q^\varepsilon M)$  est un difféomorphisme. Nous fixons une valeur de  $k$  telle que  $|t_k - \tau| \cdot \|v\| < \varepsilon/2$ . Par la suite, nous supposons que  $t_k \geq 0$ ; le cas  $t_k < 0$  se traite de la même manière. D'après le théorème 3.15, la courbe

$$\sigma : [0, \varepsilon] \rightarrow M, \quad \sigma(t) = \exp(t \cdot \dot{\gamma}(t_k)),$$

est une géodésique avec le vecteur tangent  $\dot{\sigma}(0) = \dot{\gamma}(t_k)$ . En posant

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma(t) & \text{si } t \in J_v \text{ et } t \leq t_k, \\ \sigma(t - t_k) & \text{si } t_k \leq t < t_k + \varepsilon, \end{cases}$$

nous obtenons une géodésique  $\gamma$  dont  $\gamma_v$  est une prolongation (théorème 3.8). Il s'ensuit que  $(t_k - \varepsilon, t_k + \varepsilon) \subset J_v$ ; en particulier,  $(\tau - \varepsilon/2, \tau + \varepsilon/2) \subset J_v$ . Par cet argument, nous avons démontré deux choses en même temps :  $J_v$  est fermé et  $J_v$  est ouvert.

(2)  $\implies$  (3) : rien n'est à démontrer.

(3)  $\implies$  (1) : Soit  $\{q_m\}_{m=1}^\infty \subset M$  une suite de Cauchy. Par l'inégalité du triangle, la suite  $\{d(p, q_m)\}_{m=1}^\infty$  est bornée, disons  $d(p, q_m) < L$  pour tout  $m$ . Grâce au lemme ci-après, il existe, pour tout  $m$ , un vecteur  $v_m \in T_p M$  de norme  $\|v_m\| = d(p, q_m)$ , tel que  $q_m = \exp_p(v_m)$ . Puisque  $\|v_m\| < L$  et que la boule fermée de rayon  $L$  dans  $T_p M$  est compacte, il existe une sous-suite  $\{v_{m_k}\}_{k=1}^\infty$  et un  $v \in T_p M$  tel que  $v_{m_k} \rightarrow v$  lorsque  $k \rightarrow \infty$ . L'application  $\exp_p$  étant continue, il s'ensuit que  $q_{m_k} \rightarrow \exp_p(v)$  dans  $M$  et aussi  $q_m \rightarrow \exp_p(v)$ .  $\square$

**5.2 Lemme.** Soit  $M$  une variété riemannienne connexe et  $p \in M$  un point tel que  $\exp_p(v)$  est défini pour tout  $v \in T_p M$ . Alors il existe, pour tout  $q \in M$ , une géodésique  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  vérifiant  $\gamma(0) = p$ ,  $\gamma(1) = q$ ,  $\ell(\gamma) = d(p, q)$ .

*Preuve.* La méthode de démonstration a une certaine similarité avec la technique employée par un joueur de minigolf qui, pour envoyer la balle de golf à travers un terrain inégal, vise un point auxiliaire, se trouvant à proximité de la balle, par lequel la trajectoire idéale devrait passer.

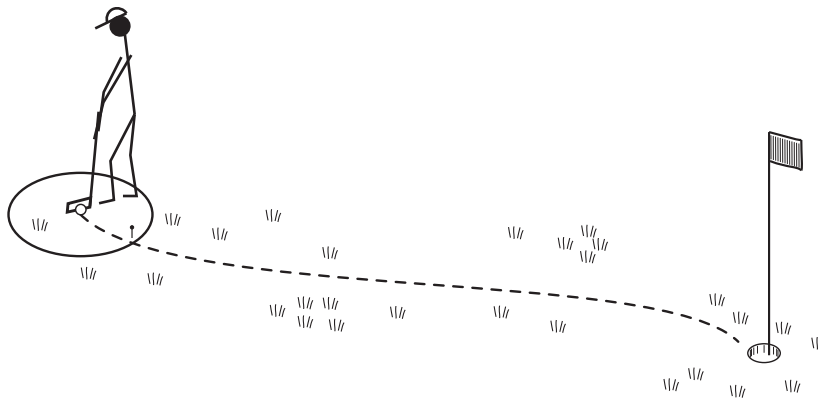


FIGURE 5.1. Est-ce que le point visé est le bon ?

”À proximité de la balle” : soit  $\varepsilon$ , avec  $0 < \varepsilon < d(p, q)$  tel que  $\exp_p : T_p^\varepsilon M \rightarrow \exp_p(T_p^\varepsilon M)$  est un difféomorphisme (théorème 3.17). L'ensemble

$$S = \exp_p(\{v \in T_p M \mid \|v\| = \varepsilon/2\})$$

est continue (inégalité du triangle), il existe sur  $S$  un point  $q'$  dont la distance  $d(q', q)$  est minimale parmi les points de  $S$ . Sachant que  $d(p, s) = \varepsilon/2$ , pour tout  $s \in S$ , il s'ensuit que

$$(1) \quad d(p, q') + d(q', q) = \frac{\varepsilon}{2} + d(q', q) = d(p, q).$$

Soit  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$  la géodésique vérifiant  $\gamma(0) = p$ ,  $\gamma(\varepsilon/2) = q'$ . Puisque  $d(p, q') = \varepsilon/2$ , on a  $\|\dot{\gamma}(t)\| = 1$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Est-ce que  $\gamma$  passe par  $q$ ? (Dans l'affirmative, ce sera bien le point  $q'$  que le joueur de minigolf doit viser.)

Pour démontrer que  $\gamma$  passe par  $q$ , nous considérons l'ensemble

$$\mathcal{D} = \{t \geq 0 \mid t + d(\gamma(t), q) = d(p, q)\}.$$

Il faut démontrer que  $\mathcal{D} = [0, d(p, q)]$ . Remarquons que, pour tout  $t \geq 0$ ,

$$(2) \quad d(p, q) \leq d(p, \gamma(t)) + d(\gamma(t), q) \leq t + d(\gamma(t), q).$$

Pour  $t \in [0, \varepsilon/2]$ , (2) et (1) impliquent que

$$d(p, q) \leq t + d(\gamma(t), q') + d(q', q) = \frac{\varepsilon}{2} + d(q', q) = d(p, q).$$

Par conséquent,  $[0, \varepsilon/2] \subset \mathcal{D}$ .

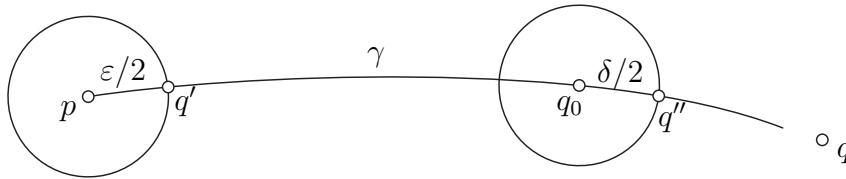


FIGURE 5.2.

Soit  $t_0 = \sup \mathcal{D}$ . Alors,  $t_0 \geq \varepsilon/2$ . Puisque  $\mathcal{D}$  est un sous-ensemble fermé de  $\mathbb{R}$ , on a  $t_0 \in \mathcal{D}$ . Donc, avec (2),

$$d(p, q) \leq t_0 + d(\gamma(t_0), q) = d(p, q),$$

et il vient

$$(3) \quad t_0 = d(p, \gamma(t_0)), \quad d(p, \gamma(t_0)) + d(\gamma(t_0), q) = d(p, q).$$

Nous voulons démontrer que  $t_0 = d(p, q)$ . Supposons, par l'absurde, que  $t_0 < d(p, q)$ . Pour le point  $q_0 = \gamma(t_0)$ , nous répétons l'argument donné pour  $p$ , en choisissant  $\delta$  tel que  $0 < \delta < d(q_0, q)$  et tel que  $\exp_{q_0} : T_{q_0}^\delta M \rightarrow \exp_{q_0}(T_{q_0}^\delta M)$  est un difféomorphisme. L'ensemble  $S_0 = \exp_{q_0}(\{v \in T_{q_0} M \mid \|v\| = \delta/2\})$  contient un point  $q''$  dont la distance  $d(q'', q)$  est minimale parmi les points de  $S_0$ . Pour ce point, on a, comme dans (1),

$$d(q_0, q'') + d(q'', q) = d(q_0, q).$$

Avec la seconde partie dans (3), nous obtenons

$$(4) \quad d(p, q_0) + d(q_0, q'') + d(q'', q) = d(p, q).$$



Ceci implique que

$$d(p, q_0) + d(q_0, q'') = d(p, q'').$$

L'arc  $\gamma|_{[0, t_0]}$  et l'arc de géodésique  $\gamma''$  allant de  $q_0$  à  $q''$  forment donc une courbe de longueur

$$t_0 + \frac{\delta}{2} = d(p, q_0) + d(q_0, q'') = d(p, q'')$$

(utiliser (3)). D'après le théorème 4.13, cette courbe est une géodésique, et d'après le théorème d'unicité (théorème 3.8), il s'agit de la géodésique  $\gamma|_{[0, t_0 + \delta/2]}$ . Nous avons donc  $\gamma(t_0 + \delta/2) = q''$ . Avec la première partie de (3) et avec (4), nous obtenons

$$t_0 + \frac{\delta}{2} + d(\gamma(t_0 + \frac{\delta}{2}), q) = d(p, q_0) + d(q_0, q'') + d(q'', q) = d(p, q).$$

D'où  $t_0 + \delta/2 \in \mathcal{D}$ , ce qui est une contradiction !

En modifiant encore le paramétrage de  $\gamma$  tel que  $\|\dot{\gamma}(t)\| = d(p, q)$ , nous obtenons l'arc de géodésique postulé dans le lemme.  $\square$

**5.3 Corollaire.** *Dans une variété riemannienne complète et connexe  $M$ , les boules métriques fermées*

$$\overline{B_p(\rho)} = \{q \in M \mid d(p, q) \leq \rho\}$$

*sont compactes.*

*Preuve.* Le point (2) du théorème 5.1 implique que

$$\overline{B_p(\rho)} = \exp_p(\{v \in T_p M \mid \|v\| \leq \rho\}).$$

Donc,  $\overline{B_p(\rho)}$  est l'image d'un compact sous une application continue.  $\square$

## Chapitre 6 Tores plats et réseaux euclidiens

Nous traitons ici une famille de variétés riemanniennes compactes connexes qui sont localement isométriques à l'espace euclidien. On les appelle les tores plats. Ces exemples jouent aussi un rôle dans la théorie des réseaux. En dimension 2, nous arrivons à en donner une classification complète. C'est un des rares cas, en géométrie riemannienne, où une telle classification est connue. Puisque la métrique riemannienne est localement comme celle de  $\mathbb{R}^n$ , ce chapitre est écrit de sorte qu'on peut le lire sans avoir connaissance de la dérivée covariante.

Voici ce que sont ces tores : dans l'exemple B.16, nous avons considéré les variétés différentiables à  $n$  dimensions

$$\mathcal{T} = \mathbb{R}^n / \Lambda,$$

où  $\Lambda$  est un réseau,

$$\Lambda = \left\{ \sum_{i=1}^n m_i v^i \mid m_i \in \mathbb{Z}; \quad i = 1, \dots, n \right\}$$

engendré par une base vectorielle  $v^1, \dots, v^n$  de  $\mathbb{R}^n$ . Les points de  $\mathbb{R}^n / \Lambda$  sont les classes d'équivalence  $\pi(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , où  $x, y \in \mathbb{R}^n$  sont équivalents ssi  $x - y \in \Lambda$ . La topologie et la structure différentiable de  $\mathcal{T}$  sont définies de telle manière que la projection canonique

$$\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{T} = \mathbb{R}^n / \Lambda$$

est un difféomorphisme local. Nous verrons dans les exercices que tous les tores de même dimension sont difféomorphes entre eux. Donc, du point de vue topologique, ces exemples ne fournissent qu'une seule variété par dimension. Dans ce chapitre, nous introduisons une structure de variété riemannienne "naturelle" sur les tores ( $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{T}$  sera une isométrie locale). Il s'avère que, du point de vue riemannien, on aura une infinité d'exemples différents dans chaque dimension  $n \geq 2$ .

### Définition d'une métrique riemannienne sur $\mathbb{R}^n / \Lambda$ .

Pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ , il existe un voisinage ouvert  $\tilde{U}$  de  $x$  dans  $\mathbb{R}^n$  tel que  $\pi$  est injective sur  $\tilde{U}$ . Le couple  $(U, \varphi)$ , avec  $U = \pi(\tilde{U})$ ,  $\varphi = (\pi|_{\tilde{U}})^{-1}$ , est une carte de  $\mathcal{T}$ . Nous notons  $\mathcal{A}_\Lambda$  l'atlas de  $\mathcal{T}$  formé par toutes ces cartes. La particularité de cet atlas est que si  $(U, \varphi), (U', \varphi') \in \mathcal{A}_\Lambda$  et  $D$  est une composante connexe de  $U \cap U'$ , alors le changement de cartes est de la forme

$$\varphi' \circ \varphi^{-1}(x) = x + b, \quad x \in \varphi(D),$$

où  $b$  est un vecteur de  $\mathbb{R}^n$ . Tous les changements de cartes sont donc des isométries (même des translations) de  $\mathbb{R}^n$ .

Ceci nous permet d'introduire la métrique riemannienne suivante.

**6.1 Définition.** Pour tout  $p \in \mathcal{T}$  et  $A, B \in T_p\mathcal{T}$ , nous posons

$$g(A, B) = g_0(\varphi_*(A), \varphi_*(B)),$$

où  $g_0$  est la métrique standard de  $\mathbb{R}^n$  et  $(U, \varphi) \in \mathcal{A}_\Lambda$  est une carte quelconque telle que  $p \in U$ .

Puisque tout changement de cartes est une isométrie de  $\mathbb{R}^n$ , la valeur de  $g(A, B)$  ne dépend pas du choix de la carte. Clairement, pour des champs de vecteurs  $X, Y$  différentiables au voisinage de  $p$ , la fonction  $g(X, Y)$  est différentiable.

**6.2 Remarque.** On peut aussi caractériser  $g$  comme étant la métrique riemannienne uniquement déterminée sur  $\mathcal{T}$  pour laquelle  $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{T}$  est une isométrie locale.

Les tores munis de ces métriques s'appellent les *tores plats*.

## Droites sur un tore plat

**6.3 Définition.** Une courbe différentiable  $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{T}$  est appelée une *courbe droite* ou aussi une *droite sur  $\mathcal{T}$*  si, pour tout  $t_0 \in \mathbb{R}$ , il existe  $\delta > 0$  et une carte  $(U, \varphi) \in \mathcal{A}_\Lambda$  tels que la représentation locale

$$t \mapsto c_\varphi(t) = \varphi \circ c(t) \in \mathbb{R}^n, \quad t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$$

est un segment de droite paramétré avec vitesse constante  $\|\dot{c}_\varphi(t)\| = 1$ .

Les courbes droites forment un cas particulier des géodésiques (voir l'exemple 3.4). Au lieu de "courbe droite", nous dirons donc aussi "géodésique".

**6.4 Exemple.** Si  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une droite dans  $\mathbb{R}^n$  paramétrée avec vitesse constante égale à 1, alors  $\pi \circ \gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{T} = \mathbb{R}^n/\Lambda$  est une droite sur le tore.

**6.5 Lemme.** Soient les tores plats  $\mathcal{T} = \mathbb{R}^n/\Lambda$ ,  $\mathcal{T}' = \mathbb{R}^n/\Lambda'$  et  $\phi : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}'$  une isométrie locale. Si  $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{T}$  est une droite sur  $\mathcal{T}$ , alors  $\phi \circ c$  est une droite sur  $\mathcal{T}'$ .

*Preuve.* C'est une conséquence immédiate du fait que, relativement à des cartes  $(U, \varphi) \in \mathcal{A}_\Lambda$  et  $(U', \varphi') \in \mathcal{A}_{\Lambda'}$  avec  $\phi(U) \subset U'$ , la représentation locale  $\varphi' \circ \phi \circ \varphi^{-1}$  de  $\phi$  est la restriction à  $\varphi(U)$  d'une isométrie  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , et ces dernières préservent les segments de droite.  $\square$

**6.6 Lemme.** Soient les droites  $c, c' : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{T}$  sur le tore  $\mathcal{T}$ . Si  $c(t_0) = c'(t_0)$  et  $\dot{c}(t_0) = \dot{c}'(t_0)$ , alors  $c(t) = c'(t)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .

*Preuve.* Nous démontrons le lemme pour  $t \geq t_0$ , la preuve pour  $t \leq t_0$  étant similaire.

Supposons par l'absurde qu'il existe des valeurs  $\tau > t_0$  telles que  $c(\tau) \neq c'(\tau)$ , et notons  $t_1$  l'infimum de ces valeurs. Par continuité, on a  $c(t) = c'(t)$  pour  $t \in [t_0, t_1]$ . Or, il existe une carte  $(U, \varphi) \in \mathcal{A}_\Lambda$  avec  $c(t_1) \in U$ , et un  $\delta > 0$  tel que les représentations locales  $\varphi \circ c, \varphi \circ c' : (t_1 - \delta, t_1 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}^n$  sont des segments de droite paramétrés à vitesse unitaire. Ces segments passent par  $\varphi(c(t_1))$  et ont la même direction en ce point. Ils sont donc identiques et, par conséquent,  $c(t) = c'(t)$  pour  $t \in [t_1, t_1 + \delta)$ , ce qui est une contradiction.  $\square$

Comme conséquence immédiate des deux lemmes, on a ceci :

**6.7 Corollaire.** Toute droite sur le tore  $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{T}$  est l'image  $c = \pi \circ \gamma$  d'une droite  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ .  $\square$

**6.8 Exemple** (Géodésiques périodiques). Considérons un réseau  $\Lambda = \{m_1v^1 + m_2v^2 \mid m_1, m_2 \in \mathbb{Z}\}$  dans  $\mathbb{R}^2$ . Une droite  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  passe par deux points distincts équivalents relativement à  $\Lambda$  si et seulement si  $\dot{\gamma}(t)$  est parallèle à une combinaison linéaire  $mv^1 + nv^2$  avec  $m$  et  $n$  entiers.

Si tel est le cas, la géodésique  $c = \pi \circ \gamma$  sur le tore est périodique. On dit aussi que  $c$  est une *géodésique fermée*. La période ou la longueur  $L(c)$  de  $c$  est, par définition le plus petit nombre  $L > 0$  satisfaisant  $c(t + L) = c(t)$ , pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .

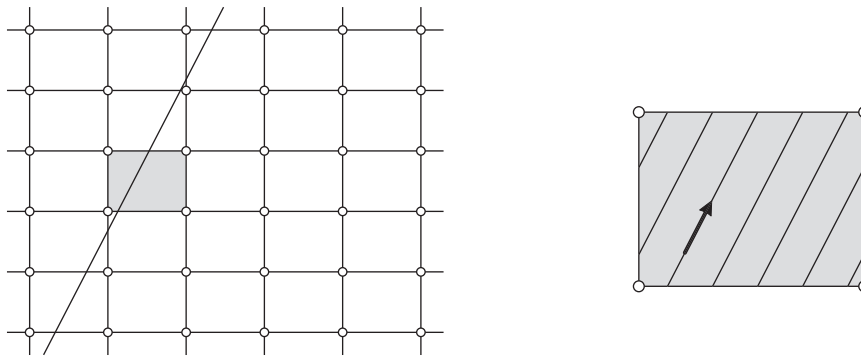


FIGURE 6.1. Géodésique périodique sur un tore

La figure 6.1 montre une droite avec  $\pi \circ \gamma$  périodique. Dans la partie à droite, on voit tous les points à l'intérieur d'un parallélogramme fondamental de  $\Lambda$  qui sont équivalents à un point de  $\gamma$ . C'est un exercice de démontrer que si  $c$  est une géodésique non fermée

sur  $\mathcal{T} = \mathbb{R}^2/\Lambda$ , alors l'application  $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{T}$  est injective, et l'ensemble des points  $\{c(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$  est dense dans  $\mathcal{T}$ .

## Réseaux et tores isométriques

**6.9 Définition.** Deux réseaux  $\Lambda, \Lambda'$  dans  $\mathbb{R}^n$  sont *isométriques* s'il existe une isométrie  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  telle que  $F(\Lambda) = \Lambda'$ .

### 6.10 Exemple.

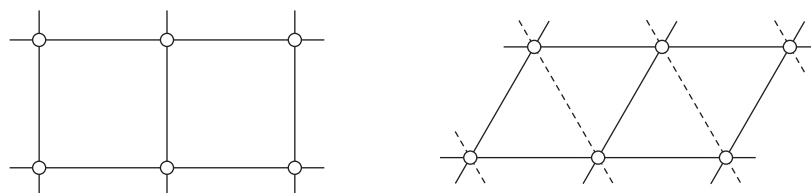


FIGURE 6.2. Réseau quadratique et réseau hexagonal

La figure 6.2 montre deux réseaux non isométriques  $\Lambda_Q, \Lambda_H$  dans  $\mathbb{R}^2$  engendrés par des vecteurs de longueur 1. Dans le premier exemple, le parallélogramme fondamental est un carré, dans le second il est l'union de deux triangles équilatéraux. On appelle  $\Lambda_Q$  et  $\Lambda_H$  relativement le *réseau quadratique* et le *réseau hexagonal*.

Dans  $\Lambda_H$  il y a des triplets de sommets dont la distance entre chaque couple de sommets est égale à 1, dans  $\Lambda_Q$  de tels triplets n'existent pas. Dans  $\mathbb{R}^2/\Lambda_H$ , par tout point il passe exactement trois géodésiques fermées de longueur 1. Dans  $\mathbb{R}^2/\Lambda_Q$ , ce nombre est deux. Les deux tores ne sont donc pas isométriques.

**6.11 Théorème.** *Les tores plats  $\mathcal{T} = \mathbb{R}^n/\Lambda$  et  $\mathcal{T}' = \mathbb{R}^n/\Lambda'$  sont isométriques si et seulement si les réseaux  $\Lambda$  et  $\Lambda'$  sont isométriques.*

*Preuve.* Soit  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  une isométrie avec  $F(\Lambda) = \Lambda'$ . Cette isométrie est de la forme  $F(x) = Ax + b$ , où  $A$  est une matrice orthogonale et  $b \in \mathbb{R}^n$ . Puisque  $F(0) \in \Lambda'$ , on a  $b \in \Lambda'$ . D'où la propriété suivante :

$$x - y \in \Lambda \iff F(x) - F(y) \in \Lambda'.$$

Pour les projections canoniques  $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n/\Lambda$ ,  $\pi' : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n/\Lambda'$ , ceci veut dire que  $\pi(x) = \pi(y)$  si et seulement si  $\pi'(F(x)) = \pi'(F(y))$ . Nous obtenons donc une application bien définie et bijective  $f : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}'$  en posant

$$f(\pi(x)) = \pi'(F(x)), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Pour vérifier que  $f$  est une isométrie, nous considérons un point quelconque  $p = \pi(x) \in \mathcal{T}$  et choisissons un voisinage ouvert  $\tilde{U}$  de  $x$  dans  $\mathbb{R}^n$  tel que  $\pi|_{\tilde{U}}$  est injective. Au voisinage  $U = \pi(\tilde{U})$  de  $p$ , on a maintenant  $f|_U = \pi' \circ F \circ (\pi|_{\tilde{U}})^{-1}$ , une composition de trois isométries (en rappelant que les projections  $\pi$  et  $\pi'$  sont des isométries locales, remarque 6.2).

Supposons, réciproquement, qu'une isométrie  $f : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}'$  est donnée. Nous voulons "relever"  $f$  dans  $\mathbb{R}^n$  afin d'obtenir une isométrie entre les réseaux.

Nous commençons avec deux points  $x_0, x'_0 \in \mathbb{R}^n$  que nous choisissons tels que  $\pi'(x'_0) = f(\pi(x_0))$ . Il existe  $\delta > 0$  tel que sur les boules  $B, B'$  de centres  $x_0, x'_0$  et de rayon  $\delta$  dans  $\mathbb{R}^n$ , les projections  $\pi, \pi'$  sont injectives.

L'application  $(\pi'|_{B'})^{-1} \circ f \circ (\pi|_B) : B \rightarrow B'$  est une isométrie. Or, dans  $\mathbb{R}^n$ , toute isométrie définie sur un voisinage ouvert se prolonge en une isométrie définie sur tout  $\mathbb{R}^n$ . Il existe donc une isométrie  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  telle que  $F|_B = (\pi'|_{B'})^{-1} \circ f \circ (\pi|_B)$ . Cette dernière satisfait

$$(*) \quad \pi'(F(x)) = f(\pi(x)),$$

pour tout  $x \in B$ . Nous montrons que (\*) est valable pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ . Pour cela, nous utilisons essentiellement l'existence des droites sur les tores et leurs propriétés.

Soit  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  une droite paramétrée à vitesse unité satisfaisant  $\gamma(0) = x_0$ . Pour démontrer (\*), il suffit de vérifier que

$$\pi'(F(\gamma(t))) = f(\pi(\gamma(t))), t \in \mathbb{R}.$$

Pour  $t \in (-\delta, \delta)$ , ceci est déjà vérifié. D'après l'exemple 6.4 et le lemme 6.5, les courbes  $\pi' \circ F \circ \gamma$  et  $f \circ \pi \circ \gamma$  sont des droites dans  $\mathcal{T}'$ . D'après le lemme 6.6, elles sont identiques, et la preuve de (\*) est achevée.

Avec (\*), on a maintenant que  $F(x) - F(y) \in \Lambda'$  si et seulement si  $x - y \in \Lambda$ . En prenant  $y = 0$ , nous voyons que  $\Lambda'$  est l'image de  $\Lambda$  par l'isométrie  $x \mapsto F(x) - F(0)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , c'est-à-dire que  $\Lambda$  et  $\Lambda'$  sont isométriques.  $\square$

## Classification en dimension 2

À titre d'illustration, nous classifions les tores plats de dimension deux. Pour ceci, nous utilisons le domaine suivant :

$$(6.12) \quad \mathcal{F} = \left\{ \tau = (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2}, t_1^2 + t_2^2 \geq 1 \right\}.$$

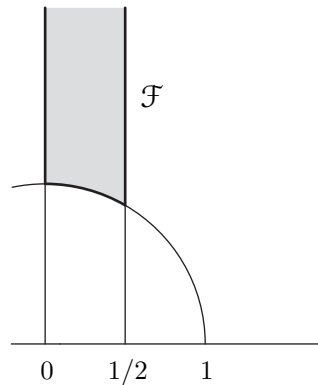


FIGURE 6.3. Un domaine de paramètres

Pour tout  $\rho > 0$  et  $\tau = (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$  avec  $t_2 \neq 0$ , nous pouvons construire un réseau, noté  $\Lambda_{\rho, \tau}$ , engendré par les vecteurs  $v^1 = (\rho, 0)$  et  $v^2 = (\rho t_1, \rho t_2)$ . La classification est alors la suivante :

**6.13 Théorème.** *Pour tout réseau  $\Lambda$  dans  $\mathbb{R}^2$ , il existe  $\rho > 0$  et  $\tau \in \mathcal{F}$  uniquement déterminés tels que  $\Lambda$  est isométrique à  $\Lambda_{\rho, \tau}$ .*

*Preuve.* Soit  $\Lambda$  un réseau de  $\mathbb{R}^2$ . Nous posons  $\rho$  égal au minimum des normes des éléments non nuls de  $\Lambda$ . Avec une isométrie  $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  qui fixe l'origine, nous changeons la position de  $\Lambda$  de sorte que  $v^1 := (\rho, 0) \in \Lambda$ .

Dans  $\Lambda \setminus \{mv^1 \mid m \in \mathbb{Z}\}$ , il existe un élément  $v^2 = (v_1^2, v_2^2)$  avec  $-\frac{1}{2}\rho < v_1^2 \leq \frac{1}{2}\rho$  et ayant la valeur  $|v_2^2|$  minimale. Parce que  $\|v^2\| \geq \rho$ , on a  $v_2^2 \neq 0$ . En remplaçant  $v^2$  par  $-v^2$  et en combinant  $\phi$  avec la symétrie  $\sigma$  d'axe  $x_2 = 0$ , si nécessaire, nous obtenons que  $v_1^2 \geq 0$  et  $v_2^2 > 0$ . L'élément  $v^2$  est alors de la forme  $v^2 = \rho\tau$  avec  $\tau \in \mathcal{F}$ .

Vérifions que  $v^1$  et  $v^2$  engendrent  $\Lambda$ . Puisque  $v^1, v^2$  est une base vectorielle de  $\mathbb{R}^2$ , tout  $v \in \Lambda$  s'écrit  $v = (m_1 + s_1)v^1 + (m_2 + s_2)v^2$  avec  $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$  et  $0 \leq s_1 < 1$ ,  $0 \leq s_2 < 1$ . L'élément  $s_1v^1 + s_2v^2$  appartient également à  $\Lambda$ . Or, par le choix de  $v^2$  on a  $s_2 = 0$ , et par le choix de  $v^1$  on a aussi  $s_1 = 0$ . D'où  $v = m_1v^1 + m_2v^2 \in \Lambda$ .

Pour démontrer l'unicité de  $\rho$  et  $\tau$ , nous montrons que les deux sont caractérisés géométriquement. Pour  $\rho$  c'est simple :  $\rho$  est la norme du plus petit élément non nul dans  $\Lambda_{\rho, \tau}$ .

Quant à  $\tau$ , nous supposons d'abord que  $\|\tau\| > 1$ . Dans ce cas,  $\Lambda_{\rho, \tau}$  a exactement deux éléments de norme  $\rho$ . Ces éléments sont  $(-\rho, 0)$  et  $(\rho, 0)$ . Soit  $D$  la droite passant par ces éléments, et  $D'$  la droite orthogonale à  $D$  passant par leur milieu. Pour  $v^2 = \rho\tau = (\rho t_1, \rho t_2)$ , la valeur  $\rho t_1$  est alors caractérisée comme étant la plus petite distance positive entre un élément de  $\Lambda_{\rho, \tau}$  et  $D$ , et  $\rho t_2$  est caractérisée comme étant la plus petite distance entre un élément non nul de  $\Lambda_{\rho, \tau}$  et  $D'$ .

Il reste le cas  $\|\tau\| = 1$ . Ici l'angle, en valeur absolue, entre  $(\rho, 0)$  et  $\rho\tau$  est caractérisé comme étant le plus petit angle positif existant entre deux éléments de norme  $\rho$  dans  $\Lambda_{\rho,\tau}$ . D'où, à nouveau, une caractérisation géométrique de  $\tau$ .  $\square$

En combinant ce résultat avec le théorème 6.11, nous obtenons que pour  $\rho > 0$  et  $\tau \in \mathcal{F}$ , les tores plats  $\mathcal{T}_{\rho,\tau} = \mathbb{R}^n / \Lambda_{\rho,\tau}$  sont deux à deux non isométriques. En plus, tout tore plat de dimension 2 est isométrique à un tel  $\mathcal{T}_{\rho,\lambda}$ . On a ainsi une classification complète des tores plats de dimension 2.



## Chapitre 7 Variétés hyperboliques

On étudie dans ce chapitre trois exemples de variétés riemanniennes dont le groupe des isométries est “aussi riche” que celui de  $\mathbb{R}^n$ . Les deux premiers exemples sont  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbb{S}^n$  chacun muni de la métrique riemannienne standard. Le troisième exemple —il occupe la partie essentielle de ce chapitre— est l’espace hyperbolique qui est un exemple de la célèbre géométrie non-euclidienne.

Ce chapitre est traité sous forme d’exercices et occupe plusieurs séries.

**Exemple 1 :**  $(\mathbb{R}^n, g_0)$

Cet exemple est bien connu et nous le mentionnons seulement par souci de complétude.

La métrique est  $g_0$ , donnée par l’expression suivante, où  $A = (a_1, \dots, a_n)_x$ ,  $B = (b_1, \dots, b_n)_x \in T_x \mathbb{R}^n$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  :

$$g_0(A, B) = \sum_{i=1}^n a_i b_i.$$

Les géodésiques dans cet exemple sont les droites.

**7.1 Exercice.** Pour  $A = (a_1, \dots, a_n)_0 \in T_0 \mathbb{R}^n$ , quel est le point  $\exp_0(A)$  ?

Pour toute matrice orthogonale  $A \in O(n)$  et tout  $b \in \mathbb{R}^n$ , on obtient une bijection  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  définie par

$$(7.2) \quad \phi(x) = A \cdot x + b, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

On sait que l’ensemble de ces applications coïncide avec l’ensemble des isométries de  $(\mathbb{R}^n, g_0)$  au sens des espaces métriques.

**7.3 Exercice.** Vérifier que tout  $\phi$  de la forme (7.2) est une isométrie de  $(\mathbb{R}^n, g_0)$  au sens de la géométrie riemannienne.

**7.4 Exercice.** Démontrer, à l’aide du lemme 7.6, que réciproquement, toute isométrie  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  au sens de la géométrie riemannienne est de la forme (7.2).

**7.5 Exercice.** Le groupe  $\text{Isom}(\mathbb{R}^n, g_0)$  est “riche” au sens suivant : Etant donnés les points  $x, y \in \mathbb{R}^n$  et les repères orthonormés  $(v^1, \dots, v^n)$  de  $T_x\mathbb{R}^n$  et  $(w^1, \dots, w^n)$  de  $T_y\mathbb{R}^n$ , il existe un unique  $\phi \in \text{Isom}(\mathbb{R}^n, g_0)$  tel que

$$\phi(x) = y, \quad \phi_*(v^i) = w^i, \quad i = 1, \dots, n.$$

On dit alors que  $\text{Isom}(\mathbb{R}^n, g_0)$  est  $n + 1$  fois transitif.

**7.6 Lemme.** Soit  $M$  une variété riemannienne et  $p \in M$  un point tel que pour tout  $q \in M$  il existe une géodésique allant de  $p$  à  $q$ . Si  $\phi, \phi' \in \text{Isom}(M)$  vérifient  $\phi_{*p} = \phi'_{*p}$  alors  $\phi = \phi'$ .

**Exemple 2 :**  $(\mathbb{S}^n, g^{\mathbb{S}^n})$ .

On considère la sphère unité de dimension  $n$ ,

$$\mathbb{S}^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\},$$

munie de la métrique standard restreinte à  $\mathbb{S}^n$ , définie par

$$g^{\mathbb{S}^n}(A, B) = g_0(A, B), \quad A, B \in T_x\mathbb{S}^n.$$

**7.7 Exercice.** Une application bijective  $\phi : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  est une isométrie de  $\mathbb{S}^n$  au sens de la géométrie riemannienne si et seulement s’il existe  $\psi \in \text{Isom}(\mathbb{R}^{n+1}, g_0)$  vérifiant

$$\phi = \psi|_{\mathbb{S}^n}.$$

Notons qu’alors on a  $\psi(0) = 0$ , et donc  $\psi \in O(n + 1)$  (voir(7.2)).

**7.8 Exercice.** Soient  $x, y \in \mathbb{S}^n$  et soient  $(v^1, \dots, v^n)$  dans  $T_x\mathbb{S}^n$  et  $(w^1, \dots, w^n)$  dans  $T_y\mathbb{S}^n$  deux repères orthonormés. Montrer qu’il existe  $\phi \in \text{Isom}(\mathbb{S}^n)$  uniquement déterminé tel que  $\phi(x) = y$  et  $\phi_*(v^i) = w^i$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

**7.9 Exercice.** On considère la projection stéréographique  $\pi : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  donnée par

$$\pi(u_1, \dots, u_{n+1}) = \left( \frac{u_1}{1 + u_{n+1}}, \dots, \frac{u_n}{1 + u_{n+1}} \right).$$

vérifier que

$$g_{ij}(x) = \frac{4\delta_{ij}}{(1 + \|x\|^2)^2}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

**7.10 Exercice.** Calculer les symboles de Christoffel associés à ce paramétrage.

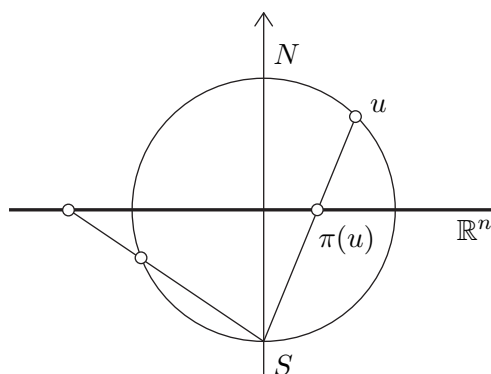


FIGURE 7.1. Projection stéréographique de la sphère

**7.11 Exercice.** Démontrer que la courbe  $c(t) = (0, \dots, 0, \sin t, \cos t)$ ,  $t \in [0, \pi]$  est une géodésique.

En combinant ceci avec l'exercice 7.8, on obtient que les géodésiques sont les arcs de grands cercles.

**7.12 Exercice.** Calculer  $\exp_N((a_1, \dots, a_n, 0)_N)$ .

**Exemple 3 :**  $(\mathcal{H}^n, g^{\text{hc}^n})$ .

Dans  $\mathbb{R}^{n+1}$ , on considère la forme bilinéaire suivante, où  $A = (a_1, \dots, a_{n+1})_u$ ,  $B = (b_1, \dots, b_{n+1})_u \in T_u \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $u \in \mathbb{R}^{n+1}$  :

$$h(A, B) = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n - a_{n+1} b_{n+1}.$$

On note

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(n, 1) = \{M = (m_i^j) = (m^1, \dots, m^{n+1}) \in \text{GL}(n+1, \mathbb{R}) \\ | h(m^i, m^j) = h(e^i, e^j), i, j = 1, \dots, n+1\}. \end{aligned}$$

**7.13 Exemple.** Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , et pour toute matrice orthogonale  $n \times n$   $U \in \mathcal{O}(n)$ , les matrices  $(n+1) \times (n+1)$  suivantes appartiennent à  $\mathcal{O}(n, 1)$ .

$$M_t = \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & \cosh t & \sinh t \\ 0 & \sinh t & \cosh t \end{pmatrix}, \quad R_U = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**7.14 Exercice.** Montrer que pour tout  $M \in \mathcal{O}(n, 1)$  et tout  $v, w \in T_x \mathbb{R}^{n+1}$ , ( $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ ), on a

$$h(Mv, Mw) = h(v, w).$$

On considère les ensembles

$$\widetilde{\mathcal{H}}^n = \{u \in \mathbb{R}^{n+1} \mid u_1^2 + \cdots + u_n^2 - u_{n+1}^2 = -1\}$$

et

$$\mathcal{H}^n = \{u \in \widetilde{\mathcal{H}}^n \mid u_{n+1} > 0\}.$$

**7.15 Exercice.** Pour tout  $M \in O(n, 1)$ , on a

$$M(\widetilde{\mathcal{H}}^n) = \widetilde{\mathcal{H}}^n.$$

**7.16 Exercice.** Pour  $M = (m_i^j) \in O(n, 1)$ ,  $M(\mathcal{H}^n) = \mathcal{H}^n \iff m_{n+1}^{n+1} > 0$ .

**7.17 Notation.** On note  $O_+(n, 1)$  le sous-groupe de  $O(n, 1)$  qui préserve  $\mathcal{H}^n$ .

**7.18 Exercice.** Pour tout  $u \in \mathcal{H}^n$ , montrer qu'il existe  $\phi \in O_+(n, 1)$  tel que  $\phi(N) = u$  (où  $N = (0, \dots, 0, 1)$ ).

Pour  $A = (a_1, \dots, a_n, 0)_N$  et  $B = (b_1, \dots, b_n, 0)_N \in T_N \mathcal{H}^n$ , on a  $h(A, B) = \sum_{i=1}^n a_i b_i$ .

Donc  $h|_{T_N \mathcal{H}^n \times T_N \mathcal{H}^n}$  est définie positive. L'exercice 7.18 ci-dessus montre que ceci reste le cas pour *tout*  $T_u \mathcal{H}^n$ ,  $u \in \mathcal{H}^n$ . On a ainsi démontré qu'en définissant

$$g^{\mathcal{H}^n}(A, B) = h(A, B), \quad A, B \in T_u \mathcal{H}^n, u \in \mathcal{H}^n,$$

on obtient une variété riemannienne.

Notons qu'alors tout  $\phi \in O_+(n, 1)$  est une isométrie.

**7.19 Exercice.** Soient  $p, q \in \mathcal{H}^n$ , et  $v^1, \dots, v^n \in T_p \mathcal{H}^n$  et  $w^1, \dots, w^n \in T_q \mathcal{H}^n$  deux repères orthonormés. Il existe  $\phi \in O_+(n, 1)$  tel que  $\phi(p) = q$ ,  $\phi_*(v^i) = w^i$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Avec le lemme 7.6, on conclut que  $\text{Isom}(\mathcal{H}^n) = O_+(n, 1)$  et que  $\text{Isom}(\mathcal{H}^n)$  opère  $n + 1$  fois transitivement sur  $\mathcal{H}^n$ .

**7.20 Exercice.** On considère la projection stéréographique  $\pi : \mathcal{H}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  donnée par

$$\pi(u) = \left( \frac{u_1}{1 + u_{n+1}}, \dots, \frac{u_n}{1 + u_{n+1}} \right).$$

Vérifier que

$$g_{ij}(x) = \frac{4\delta_{ij}}{(1 - \|x\|^2)^2}, \quad x \in \mathbb{D}^n,$$

où  $\mathbb{D}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 < 1\}$ .

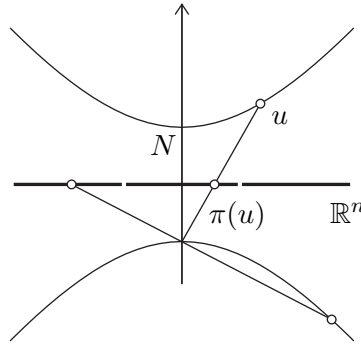


FIGURE 7.2. Projection stéréographique d'un hyperboloïde

Le disque  $\mathbb{D}^n$  muni de la métrique  $g^{\mathbb{D}^n}$  ci-dessus fournit un deuxième modèle pour la variété riemannienne  $(\mathcal{H}^n, g^{\mathcal{H}^n})$ .

**7.21 Exercice.** Calculer les symboles de Christoffel associés à ce paramétrage.

**7.22 Exercice.** Démontrer que la courbe  $c(t) = (0, \dots, 0, \sinh t, \cosh t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$  est une géodésique.

En combinant ceci avec le fait que  $c(\mathbb{R})$  est l'intersection de  $\mathcal{H}$  avec un plan passant par 0 et l'exercice 7.19, on obtient que les géodésiques sont les intersections

$$\mathcal{H}^n \cap \alpha,$$

où  $\alpha$  est un plan passant par 0 et ayant une intersection non vide avec  $\mathcal{H}^n$ .

**7.23 Exercice.** Calculer  $\exp_N((a_1, \dots, a_n, 0)_N)$ .

**7.24 Théorème.** (i) Pour tout  $p \in \mathcal{H}^n$ , l'application  $\exp_p : T_p \mathcal{H}^n \rightarrow \mathcal{H}^n$  est un difféomorphisme.

(ii) Pour tout  $p, q \in \mathcal{H}^n$ ,  $p \neq q$ , il existe une géodésique uniquement déterminée (à un changement du paramétrage près) passant par  $p$  et  $q$ .

(iii) Pour tout  $p, q \in \mathcal{H}^n$ , l'arc de géodésique allant de  $p$  à  $q$  est la plus courte courbe dans  $\mathcal{H}^n$  reliant ces points.

*Preuve.* Nous commençons avec la solution de l'exercice 7.23 : Pour tout nombre réel  $\lambda \geq 0$ , la courbe  $t \mapsto \gamma(t) = (0, \dots, 0, \sinh(\lambda t), \cosh(\lambda t))$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , est une géodésique (re-paramétriser l'exemple de l'exercice 7.22). Son vecteur tangent en  $N$  est  $\dot{\gamma}(0) = (0, \dots, 0, \lambda, 0)_N$ .

Tout autre vecteur  $v \in T_N \mathcal{H}^n$  de longueur  $\lambda$  est l'image  $R_U \dot{\gamma}(0)$  pour une rotation  $R_U$  convenable (exemple 7.13). Le théorème d'unicité des géodésiques implique que  $R_U \gamma$  coïncide avec la géodésique  $\gamma_v$ . On obtient que  $\exp_N((v_1, \dots, v_n, 0)_N) =$

$(\frac{v_1}{\|v\|} \sinh(\|v\|), \dots, \frac{v_n}{\|v\|} \sinh(\|v\|), \cosh(\|v\|))$ , où  $\|v\| = (v_1^2 + \dots + v_n^2)^{1/2}$ . Avec cette expression il n'est pas difficile de voir que  $\exp_N$  est un difféomorphisme.

En utilisant la transitivité du groupe des isométries de  $\mathcal{H}^n$ , on obtient que  $\exp_p : T_p \mathcal{H}^n \rightarrow \mathcal{H}^n$  est un difféomorphisme pour tout autre  $p \in \mathcal{H}^n$ .

Les points (ii) et (iii) sont maintenant des conséquences du théorème 4.9. □

Pour le reste de ce chapitre, on étudie l'espace hyperbolique de dimension 2

**Le disque de Poincaré**

Rappelons la projection stéréographique  $\pi : \mathcal{H}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Pour  $u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathcal{H}^2$ , l'image  $x = \pi(u)$  est donné par

$$x_1 = \frac{u_1}{1 + u_3}, \quad x_2 = \frac{u_2}{1 + u_3}.$$

L'image  $\pi(\mathcal{H}^2)$  est le disque unité

$$\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\}.$$

$\pi : \mathcal{H}^2 \rightarrow \mathbb{D}$  est bijective, et l'application inverse est donnée par

$$u_1 = \frac{2x_1}{1 - \rho}, \quad u_2 = \frac{2x_2}{1 - \rho}, \quad u_3 = \frac{1 + \rho}{1 - \rho}; \quad \rho := x_1^2 + x_2^2.$$

Selon l'exercice 7.20, le tenseur métrique de la carte  $(\mathcal{H}^2, \pi)$  est donné par

$$(7.25) \quad g_{ij}^{\mathbb{D}}(x) = \frac{4\delta_{ij}}{(1 - \|x\|^2)^2}, \quad x \in \mathbb{D}.$$

La variété riemannienne  $(\mathbb{D}, g^{\mathbb{D}})$  avec  $g^{\mathbb{D}}$  donné par (7.25) s'appelle *le disque de Poincaré*.

Par construction, l'application  $\pi : \mathcal{H}^2 \rightarrow \mathbb{D}$  est une isométrie.

**7.26 Exercice.** Montrer que toute rotation euclidienne de centre 0 de  $\mathbb{R}^2$ , restreinte à  $\mathbb{D}$ , est une isométrie de  $(\mathbb{D}, g^{\mathbb{D}})$ .

**7.27 Exercice.** De façon analogue à celle dans l'exercice 7.22, la courbe  $r \mapsto \tilde{\gamma}_0(r) = (\sinh(r), 0, \cosh(r))$ ,  $r \in \mathbb{R}$ , est une géodésique. Son image dans  $\mathbb{D}$  est la courbe

$$\gamma_0(r) = \left( \frac{\sinh(r)}{1 + \cosh(r)}, 0 \right), \quad r \in \mathbb{R}.$$

Utiliser les symboles de Christoffel de  $g^{\mathbb{D}}$  afin de donner une vérification directe que  $\gamma_0$  est une géodésique dans  $\mathbb{D}$ . Noter qu'il s'agit d'un segment d'une droite qui coupe le cercle  $\partial\mathbb{D}$  orthogonalement.

Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on a la matrice

$$(7.28) \quad M_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh(t) & \sinh(t) \\ 0 & \sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix} \in O(2, 1).$$

Elle opère sur  $\mathcal{H}^2$  par isométries, et les images  $\tilde{\gamma}_t = M_t \tilde{\gamma}_0$  sont des géodésiques de  $\mathcal{H}^2$ . Par conséquent, les courbes

$$\gamma_t(r) = \pi(\tilde{\gamma}_t(r)) = \left( \frac{\sinh(r)}{1 + \cosh(r) \cosh(t)}, \frac{\cosh(r) \sinh(t)}{1 + \cosh(r) \cosh(t)} \right), \quad r \in \mathbb{R},$$

sont des géodésiques dans  $\mathbb{D}$ .

**7.29 Exercice.** Trouver les composantes du tenseur métrique pour la carte  $(\mathbb{D}, f^{-1})$  de  $\mathbb{D}$ , où

$$f(r, t) = \left( \frac{\sinh(r)}{1 + \cosh(r) \cosh(t)}, \frac{\cosh(r) \sinh(t)}{1 + \cosh(r) \cosh(t)} \right), \quad r, t \in \mathbb{R}.$$

Les coordonnées  $r, t$  relativement à la carte précédente s'appellent des *coordonnées de Fermi* (basées sur la géodésique  $t \mapsto f(0, t)$ ).

**7.30 Exercice.** (i) Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $t \neq 0$ , la géodésique  $r \mapsto \gamma_t(r) = f(r, t)$  est un arc de cercle dans  $\mathbb{D}$  qui est orthogonal au bord  $\partial\mathbb{D}$ . Le centre de  $\gamma_t$  est le point  $(0, \coth(t))$ .

(ii) Pour tout  $r \in \mathbb{R}$ ,  $r \neq 0$ , la courbe  $t \mapsto p_r(t) = f(r, t)$ , est un arc de cercle d'extrémités  $(0, -1)$ ,  $(0, 1)$ . Ce cercle est orthogonal à tous les  $\gamma_t$ .

En combinant ce dernier résultat avec l'exercice 7.26, on voit que les géodésiques de  $\mathbb{D}$  sont les arcs de cercles qui vont de  $\partial\mathbb{D}$  à  $\partial\mathbb{D}$  et qui sont orthogonaux à  $\partial\mathbb{D}$  (où on inclut les segments de droite passant par 0 comme cas limites de tels arcs). Notons que les extrémités des arcs au bord  $\partial\mathbb{D}$  n'appartiennent pas aux géodésiques.

**7.31 Exercice.** Montrer directement que les applications suivantes sont des isométries de  $(\mathbb{D}, g^{\mathbb{D}})$ , où  $\ell \in \mathbb{R}$  :

$$m_\ell(f(r, t)) = f(r, t + \ell), \quad \sigma(f(r, t)) = f(-r, t); \quad r, t \in \mathbb{R}.$$

La figure 7.3 montre l'effet d'une isométrie  $m_\ell$ . La droite verticale est une géodésique invariante. On l'appelle *l'axe* de  $m_\ell$ . Les cercles "horizontaux" sont des géodésiques orthogonales à l'axe. Les cercles pointillés sont des ensembles de points équidistants à

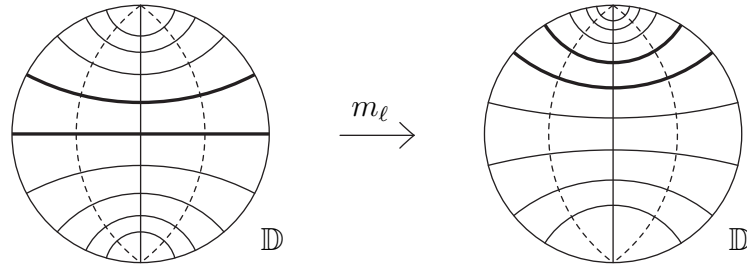


FIGURE 7.3. Une isométrie hyperbolique

l'axe. Puisque les distances sont préservées, ces cercles sont invariants. Les isométries de ce type s'appellent des isométries *hyperboliques*.

### Le demi-plan de Poincaré

Voici un autre modèle de la géométrie hyperbolique, obtenu à travers la projection suivante que nous présentons sans en donner une interprétation géométrique.

Nous notons  $\psi : \mathcal{H}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  cette projection. Pour  $u \in \mathcal{H}^2$  l'image  $y = \psi(u)$  est définie par

$$(7.32) \quad y_1 = \frac{u_1}{u_3 - u_2}, \quad y_2 = \frac{1}{u_3 - u_2}$$

L'image  $\mathbb{H} = \psi(\mathcal{H}^2)$  est le demi-plan

$$(7.33) \quad \mathbb{H} = \{y \in \mathbb{R}^2 \mid y_2 > 0\}.$$

L'application  $\psi : \mathcal{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}$  est bijective, l'inverse étant donnée par

$$(7.34) \quad u_1 = \frac{y_1}{y_2}, \quad u_2 = \frac{y_1^2 + y_2^2 - 1}{2y_2}, \quad u_3 = \frac{y_1^2 + y_2^2 + 1}{2y_2}$$

**7.35 Exercice.** Démontrer que les composantes du tenseur métrique relativement au paramétrage  $\psi^{-1} : \mathbb{H} \rightarrow \mathcal{H}^2$  sont les suivantes

$$g_{ij}^{\mathbb{H}}(y) = \frac{1}{y_2^2} \delta_{ij}, \quad y = (y_1, y_2) \in \mathbb{H}.$$

La variété riemannienne  $(\mathbb{H}, g^{\mathbb{H}})$ , où  $g^{\mathbb{H}}$  est défini par les équations précédentes, est appelée le *demi-plan de Poincaré*.

**7.36 Exercice.** On considère un demi-cercle dans  $\mathbb{H}$  ayant son centre sur le bord  $\partial\mathbb{H} = \{y \in \mathbb{R}^2 \mid y_2 = 0\}$  et ayant pour extrémités les points  $(a, 0)$ ,  $(b, 0)$ , avec  $a < b$ .



(Les extrémités elles-mêmes ne sont pas considérées comme faisant partie du demi-cercle.)

(i) Montrer que si cet arc est paramétré sous la forme

$$\gamma(s) = \left(\frac{a+b}{2}, 0\right) + \frac{b-a}{2} \left(\tanh(s), \frac{1}{\cosh(s)}\right), s \in \mathbb{R},$$

alors sa vitesse relativement à la métrique  $g^{\mathbb{H}}$  est constante égale à 1.

(ii) A présent, on considère la courbe correspondante sur  $\mathcal{H}^2$ ,  $c = \psi^{-1} \circ \gamma$ . Montrer que tout  $c(s)$  est combinaison linéaire de  $\begin{pmatrix} 2a \\ a^2-1 \\ a^2+1 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 2b \\ b^2-1 \\ b^2+1 \end{pmatrix}$ .

L'exercice précédent implique que la courbe  $c$  est à l'intersection de  $\mathcal{H}^2$  et d'un plan de  $\mathbb{R}^3$  passant par l'origine. Il s'agit donc d'une géodésique. Puisque  $\psi : \mathcal{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}$  est, par construction, une isométrie,  $\gamma$  est une géodésique.

Un cas limite, obtenu lorsque  $b \rightarrow \infty$ , est celui d'une demi-droite dans  $\mathbb{H}$  orthogonale à  $\partial\mathbb{H}$ . Son paramétrage est

$$\gamma(s) = (a, e^s), \quad s \in \mathbb{R}.$$

En combinant ceci avec le théorème d'unicité d'une géodésique passant par un point donné et ayant un vecteur tangent prescrit en ce point, on arrive au résultat suivant :

*Les géodésiques dans  $\mathbb{H}$  sont les demi-cercles et demi-droites orthogonaux à  $\partial\mathbb{H}$ .*

**7.37 Exercice.** Donner une autre démonstration du résultat précédent, en vérifiant que les courbes en question satisfont les équations différentielles d'une géodésique.

**7.38 Exercice.** Montrer, par un argument élémentaire, que pour tout couple de points  $p, q \in \mathbb{H}$ , il existe une géodésique uniquement déterminée passant par  $p$  et  $q$ .

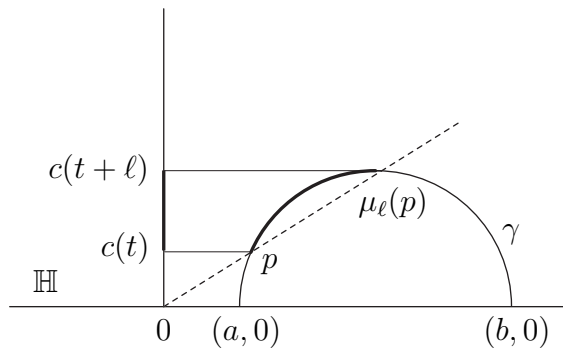


FIGURE 7.4. Géodésiques dans  $\mathbb{H}$  et longueur de déplacement.

La figure ci-contre montre deux géodésiques dans  $\mathbb{H}$ . La droite pointillée est un ensemble de points équidistants à la géodésique  $c$  représentée par la demi-droite verticale. Pour démontrer l'équidistance, on peut procéder de deux façons. La première est de constater qu'en prenant un arc de cercle dans  $\mathbb{D}$  reliant les points  $(0, -1)$ ,  $(0, 1)$ , comme dans la

figure 7.3, et en passant à  $\mathbb{H}$  via l'application  $\psi \circ \pi^{-1}$ , on obtient une demie-droite (non verticale) d'extrémité 0.

La seconde façon, qui nous amène à l'exercice suivant, est de considérer des isométries hyperboliques d'axe  $c$  et de constater qu'elles laissent les droites passant par 0 invariantes.

**7.39 Exercice.** Soit  $c$  la géodésique dans  $\mathbb{H}$ ,  $t \mapsto c(t) = (0, e^t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Pour tout  $\ell \in \mathbb{R}$ , on a une application  $\mu_\ell : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$  définie par

$$\mu_\ell(x) = e^\ell x, \quad x \in \mathbb{H}.$$

- (i) Vérifier, par un calcul direct, que  $\mu_\ell$  est une isométrie de  $(\mathbb{H}, g^{\mathbb{H}})$ .
- (ii) Montrer que  $\mu_\ell(x) = \psi(M_\ell \psi^{-1}(x))$ , où  $M_\ell$  est défini dans (7.28).
- (iii) Les points sur  $c$  sont déplacés par  $\ell : \mu_\ell(c(t)) = c(t + \ell)$ .
- (iv) Pour tout  $p \in \mathbb{H} \setminus c$ , l'arc de géodésique allant de  $p$  à  $\mu_\ell(p)$  est strictement plus long que  $\ell$ .

### Écriture en nombres complexes

Les isométries dans les modèles  $\mathbb{D}$  et  $\mathbb{H}$  et le passage d'un modèle à l'autre ont une écriture élégante si on se sert des nombres complexes.

Nous introduisons la notation suivante : Pour toute matrice  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}(2, \mathbb{C})$ , on définit

$$(7.40) \quad \mathbf{m}_A(z) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{az + b}{cz + d}, \quad z \in \hat{\mathbb{C}},$$

où  $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  est le plan complexe augmenté par un élément supplémentaire noté  $\infty$  et appelé "point à l'infini". L'utilité de cette augmentation est d'inclure le cas où le dénominateur s'annule. On complète alors la définition (7.40) par les conventions suivantes :

$$cz + d = 0 \implies \mathbf{m}_A(z) = \infty, \quad c \neq 0 \implies \mathbf{m}_A(\infty) = \frac{a}{c}, \quad c = 0 \implies \mathbf{m}_A(\infty) = \infty.$$

Avec ces conventions, tout  $\mathbf{m}_A$  devient une bijection  $\hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ . Les transformations ainsi définies s'appellent des *transformations de Möbius*.

**7.41 Exercice.**

$$\mathbf{m}_A(\mathbf{m}_B(z)) = \mathbf{m}_{AB}(z), \quad z \in \hat{\mathbb{C}};$$

$$\mathbf{m}_A = \text{id}_{\hat{\mathbb{C}}} \iff A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

**7.42 Remarque.** L'identité

$$\frac{az + b}{cz + d} = \frac{1}{c} \left( a - \frac{ad - bc}{cz + d} \right)$$

montre que toute transformation de Möbius se décompose en une suite de transformation du type  $z \mapsto \lambda z$ ,  $z \mapsto z + \tau$ ,  $z \mapsto \frac{1}{z}$ .

**7.43 Exercice.** Les transformations de Möbius ci-après forment des bijections de  $\mathbb{D}$  pour tout  $\alpha, \ell \in \mathbb{R}$  :

$$r_\alpha(z) = e^{i\alpha}z,$$

$$m_\ell(z) = \frac{(\cos \frac{i\ell}{2})z + \sin \frac{i\ell}{2}}{-(\sin \frac{i\ell}{2})z + \cos \frac{i\ell}{2}}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

(Rappel :  $\cos(it) = \cosh(t)$ ,  $\sin(it) = i \sinh(t)$ .)

A présent, nous comparons ces opérations avec les transformations de  $\mathcal{H}^2$ . Soient  $R_\alpha$ ,  $M_\ell$  les matrices suivantes de  $O(2, 1)$  :

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_\ell = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh \ell & \sinh \ell \\ 0 & \sinh \ell & \cosh \ell \end{pmatrix}.$$

Par abus de notation, nous utilisons les mêmes symboles pour les applications correspondantes :  $R_\alpha(u) = R_\alpha \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ , etc.

Dans l'exercice suivant,  $\pi$  est de nouveau la projection stéréographique  $\pi : \mathcal{H}^2 \rightarrow \mathbb{D}$ .

**7.44 Exercice.** Les transformations introduites dans l'exercice 7.43 coïncident avec les isométries dans les exemples 7.26 et 7.31 :

$$r_\alpha = \pi \circ R_\alpha \circ \pi^{-1},$$

$$m_\ell = \pi \circ M_\ell \circ \pi^{-1}.$$

Dans l'exercice suivant, nous passons au demi-plan de Poincaré. Dans cet exercice,  $\psi$  est la projection  $\psi : \mathcal{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}$  définie dans (7.32).

**7.45 Exercice.** Soit  $h$  avec l'inverse  $h^{-1}$  la transformation de Möbius définie par

$$h(z) = \frac{z+i}{iz+1}, \quad h^{-1}(w) = \frac{w-i}{-iw+1}, \quad z, w \in \hat{\mathbb{C}}.$$

Montrer que  $h$  est la représentation en nombres complexes de la fonction de passage  $\psi \circ \pi^{-1} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{H}$  :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}^2 & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{H} \\ \downarrow \pi & \nearrow h & \\ \mathbb{D} & & \end{array} \quad h(z) = \psi(\pi^{-1}(z)), \quad z \in \mathbb{D}.$$

Les applications  $\pi$  et  $\psi$  sont des isométries. Il s'ensuit que  $h$ , vue comme application  $h : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{H}$ , est une isométrie entre les variétés riemanniennes  $(\mathbb{D}, g^{\mathbb{D}})$  et  $(\mathbb{H}, g^{\mathbb{H}})$ . En conjuguant les membres de l'exercice 7.43, nous obtenons donc des isométries de  $\mathbb{H}$  :

$$\begin{aligned} \rho_\alpha &\stackrel{\text{déf}}{=} h \circ r_\alpha \circ h^{-1} = \psi \circ R_\alpha \circ \psi^{-1} \\ \mu_\ell &\stackrel{\text{déf}}{=} h \circ m_\ell \circ h^{-1} = \psi \circ M_\ell \circ \psi^{-1} \end{aligned}$$

**7.46 Exercice.**

$$\begin{aligned} r_\alpha(z) &= \frac{(\cos \frac{\alpha}{2})z + \sin \frac{\alpha}{2}}{-(\sin \frac{\alpha}{2})z + \cos \frac{\alpha}{2}}, \\ m_\ell(z) &= e^\ell z, \end{aligned} \quad z \in \mathbb{H}.$$

À présent, nous nous proposons de trouver l'écriture, en nombres complexes, d'une isométrie générale de  $\mathbb{H}$ . Soit

$$(7.47) \quad \text{SL}(2, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1 \right\}.$$

La remarque 7.42 montre que pour tout  $A \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$ , la transformation  $\mathbf{m}_A$  est un produit des transformations

$$z \mapsto \lambda z, \quad z \mapsto z + \tau, \quad z \mapsto -\frac{1}{z},$$

avec  $\lambda, \tau \in \mathbb{R}$  et  $\lambda > 0$ . Ces transformations opèrent par isométries sur  $\mathbb{H}$ , et il s'ensuit que pour tout  $A \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$  on a  $\mathbf{m}_A(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$ , et  $\mathbf{m}_A : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$  est une isométrie.

Il y en a encore des isométries qui ne sont pas de ce type. Par exemple

$$\sigma : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}, \quad s(z) = -\bar{z},$$

en est une. ( $\bar{z} = \overline{x + iy} = x - iy$  est le conjugué complexe de  $z$ .)

**7.48 Exercice.** (i) Pour toute isométrie  $g : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ , il existe  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$  tel que  $g$  a l'une des deux écritures suivantes :

$$g(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad z \in \mathbb{H}; \quad g(z) = \frac{-a\bar{z} + b}{-c\bar{z} + d}, \quad z \in \mathbb{H}.$$

En plus, à une multiplication de  $A$  par un facteur  $\pm 1$  près, la matrice  $A$  est uniquement déterminée par  $g$ .

### Les courbures des espaces modèles

Gauss (1777-1855) a défini la *courbure* d'une surface  $S$  en un point  $p$  comme étant la limite

$$(7.49) \quad K_p(S) = \frac{3}{\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r^3} (2\pi r - \ell(c_p(r))),$$

où  $c_p(r)$  est la courbe formée par les points de distance  $r$  de  $p$  (voir le chapitre prochain).

**7.50 Exercice.** (i) Pourquoi les courbures de  $\mathbb{S}^2$ ,  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathcal{H}^2$ , en fonction de  $p$ , sont-elles constantes? (ii) Montrer que

$$\ell(c_p(r)) = 2\pi \begin{cases} r & \text{dans } \mathbb{R}^2 \\ \sin(r) & \text{sur } \mathbb{S}^2 \\ \sinh(r) & \text{sur } \mathcal{H}^2. \end{cases}$$

En prenant le développement limité des fonctions  $\sin(r)$  et  $\sinh(r)$  au voisinage de  $r = 0$ , on obtient

$$K_p(\mathbb{S}^2) = 1, \quad K_p(\mathbb{R}^2) = 0, \quad K_p(\mathcal{H}^2) = -1.$$

## Chapitre 8 Le tenseur de courbure

Étant donné une variation de courbes  $c_s(t) = f(s, t)$  dans une variété riemannienne  $(M^n, g)$  et un champ de vecteurs  $Y = Y(s, t)$  le long de  $f$ , on a les dérivées covariantes  $D_S Y$  et  $D_T Y$ . En général, les deux dérivations ne commutent pas, et on est amené à considérer la différence  $D_S D_T - D_T D_S$ . Le bon outil pour ceci est le tenseur de courbure qui nous donnera des informations importantes sur les propriétés géométriques de la métrique riemannienne  $g$ ; par exemple, il répond à la question de savoir si une variété riemannienne donnée est localement isométrique à  $\mathbb{R}^n$  ou non.

**8.1 Définition.** Soit un entier  $m \geq 1$ . Un *tenseur de type*  $(m, 1)$  est une application  $\mathcal{R}$  qui, à chaque  $m$ -uple de vecteurs  $A^1, \dots, A^m \in T_p M$  (où  $p \in M$ ), fait correspondre un vecteur  $\mathcal{R}(A^1, \dots, A^m) \in T_p M$ , tel que les règles suivantes sont vérifiées, pour tout  $p \in M$ .

- (i) L'application  $\mathcal{R} : T_p M \times \dots \times T_p M \rightarrow T_p M$  est  $m$ -linéaire.
- (ii) Si  $Y^1, \dots, Y^m \in \chi_p(M)$ , alors  $\mathcal{R}(Y^1, \dots, Y^m) \in \chi_p(M)$ .

Dans cette définition,  $\mathcal{R}(Y^1, \dots, Y^m)$  signifie le champ  $q \mapsto \mathcal{R}(Y^1, \dots, Y^m)(q) \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{R}(Y_q^1, \dots, Y_q^m)$ .

Par la suite, nous nous intéresserons uniquement au tenseur de courbure. Ce dernier est un tenseur de type  $(3, 1)$ . Pour des raisons historiques, il sera noté  $R(X, Y)Z$  au lieu de  $R(X, Y, Z)$ .

**8.2 Théorème.** Soit  $(M^n, g)$  une variété riemannienne. Alors, il existe exactement un tenseur  $R$  de type  $(3, 1)$ , tel que, pour toute variation  $(s, t) \mapsto f(s, t) \in M$  et tout champ de vecteurs différentiable  $Y$  le long de  $f$ , on a

$$(1) \quad (D_S D_T - D_T D_S)Y = R(S, T)Y.$$

*Preuve. Unicité :* Soit  $R$  un tel tenseur et considérons une carte  $(U, \varphi)$  de  $M$  avec les champs de bases associés  $X^1, \dots, X^n$ . Pour tout  $x \in \varphi(U)$  et tout choix de deux indices  $i, j$ , nous définissons une variation :

$$(s, t) \mapsto f(s, t) = \varphi^{-1}(x + se^i + te^j).$$

( $e^i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$  avec le 1 à la  $i$ ème position.) Pour une telle variation, les champs  $S, T$  sont  $S = X^i, T = X^j$ . En prenant  $Y = X^k$ , nous concluons que pour

tout  $p \in U$ ,

$$(2) \quad R(X_p^i, X_p^j)X_p^k = ((D_{X^i}D_{X^j} - D_{X^j}D_{X^i})X^k)_p, \quad i, j, k = 1, \dots, n.$$

Puisque  $R$  est trilinéaire et que les vecteurs  $X_p^1, \dots, X_p^n$  forment une base de  $T_pM$ , ceci démontre que  $R$  est uniquement déterminé.

*Existence* : Soit  $(U, \varphi)$  une carte. Avec (2) et la condition de la trilinearité, un tenseur  $R$  de type (3, 1) est défini sur  $U$ . Le calcul effectué au cours du lemme suivant montre que ce tenseur satisfait bien les conditions de la définition 8.1 sur  $U$ . L'unicité déjà établie implique alors que la définition de  $R$  ne dépend pas du choix de  $\varphi$ . L'existence de  $R$  sur tout  $M$  s'ensuit.  $\square$

**8.3 Lemme.** *Soit  $R$  le tenseur défini sur  $U$  par (8.2)(2) et soit  $f : I \times J \rightarrow U$  une variation de courbes. Alors, pour tout champ  $Y$  le long de  $f$ , on a*

$$(D_S D_T - D_T D_S)Y = R(S, T)Y.$$

*Preuve.*  $Y$  est une combinaison linéaire  $Y(s, t) = \sum_{k=1}^n b_k(s, t)X_{f(s,t)}^k$ , avec des fonctions différentiables  $b_k : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ .

Avec la représentation locale  $\varphi(f(s, t)) = (x_1(s, t), \dots, x_n(s, t))$  de  $f$ , nous avons

$$T(s, t) = \dot{c}_s(t) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_j(s, t)}{\partial t} X_{f(s,t)}^j, \quad S(s, t) = \dot{c}^t(s) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_j(s, t)}{\partial s} X_{f(s,t)}^j,$$

Pour un champ de vecteurs différentiable  $Z \in \chi(U)$ , les dérivées  $D_T Z = D_{T(s,t)} Z$  et  $D_S Z = D_{S(s,t)} Z$  deviennent

$$D_T Z = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_j}{\partial t} (D_{X^j} Z)_f, \quad D_S Z = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial s} (D_{X^i} Z)_f.$$

Ici, l'expression  $(D_{X^j} Z)_f$  signifie le vecteur du champ  $D_{X^j} Z$  au point  $f(s, t)$ . Pour  $Y$ , nous avons (voir (2.7))

$$D_T Y = \sum_{k=1}^n \frac{\partial b_k}{\partial t} X_f^k + \sum_{j,k=1}^n b_k \frac{\partial x_j}{\partial t} (D_{X^j} X^k)_f,$$

et nous calculons

$$\begin{aligned} D_S D_T Y &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 b_k}{\partial s \partial t} X_f^k + \sum_{j,k=1}^n \left\{ \frac{\partial b_k}{\partial t} \frac{\partial x_j}{\partial s} + \frac{\partial b_k}{\partial s} \frac{\partial x_j}{\partial t} + b_k \frac{\partial^2 x_j}{\partial s \partial t} \right\} (D_{X^j} X^k)_f \\ &\quad + \sum_{i,j,k=1}^n b_k \frac{\partial x_j}{\partial t} \frac{\partial x_i}{\partial s} (D_{X^i} D_{X^j} X^k)_f. \end{aligned}$$

Pour  $D_T D_S Y$ , l'expression est analogue, avec les rôles de  $s$  et  $t$  intervertis. On constate que la première ligne reste la même. Par conséquent, et après regroupement des termes,

$$\begin{aligned} (D_S D_T - D_T D_S)Y &= \sum_{i,j,k=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial s} \frac{\partial x_j}{\partial t} b_k ((D_{X^i} D_{X^j} - D_{X^j} D_{X^i}) X^k)_f \\ &= \sum_{i,j,k=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial s} \frac{\partial x_j}{\partial t} b_k R(X_f^i, X_f^j) X_f^k = R(S, T)Y. \end{aligned}$$

□

**8.4 Remarque.** Les formules 8.2(1),(2) expriment  $R$  en fonction des dérivées covariantes *dans des cas particuliers*. Dans le cas où  $X, Y, Z$  sont des champs de vecteurs différentiables quelconques définis sur un ouvert de  $M$ , on a

$$R(X, Y)Z = (D_X D_Y - D_Y D_X - D_{[X, Y]})Z.$$

La formule peut être vérifiée en coordonnées par un calcul direct.

### Variations géodésiques.

Considérons à présent une variation pour laquelle chaque  $c_s$  est une géodésique. De telles variations ont déjà été étudiées dans le chapitre 9. Elles ont la propriété suivante

$$D_T T = \frac{D}{dt} \dot{c}_s(t) = 0.$$

Sachant que  $D_T S = D_S T$  (lemme 4.4), on a aussi  $D_T D_T S = D_T D_S T$ . Par conséquent, toute variation géodésique satisfait

$$(8.5) \quad D_T D_T S = D_T D_S T - D_S D_T T = -R(S, T)T.$$

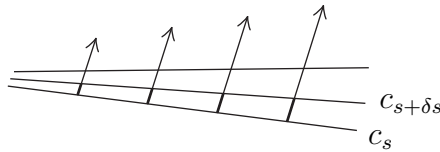


FIGURE 8.1. Champ de vecteurs associé à une variation géodésique

Plus loin, nous donnerons une interprétation géométrique de  $D_T D_T S$ , mais avant cela, nous allons considérer un cas particulier.



### La courbure et l'application $\exp$ .

Nous reprenons la situation pour laquelle le lemme de Gauss a été énoncé (théorème 4.8). Soit  $p \in M$  et soient  $v, w \in T_p M$  deux vecteurs tangents non-nuls. En plus, nous supposons que ces vecteurs soient *orthogonaux* entre eux. Pour  $s$  dans un petit intervalle  $I$  autour de zéro, nous considérons le segment de droite dans  $T_p M$ , donné sous la forme paramétrée

$$t \mapsto v_s(t) = t(v + sw), \quad t \in J,$$

où  $J$  est un intervalle qui contient zéro et qui est tel que  $v_s(t)$  est dans le domaine de définition de  $\exp_p$ , pour tout  $s \in I$  et  $t \in J$ . Notons encore  $w_{v_s(t)}$  le vecteur obtenu en déplaçant parallèlement (dans  $T_p M$ ) le vecteur  $w$  de  $0$  à  $v_s(t)$ . Sous ces conditions, la courbe

$$c_s(t) = \exp_p(v_s(t)), \quad t \in J,$$

est une géodésique, et l'application

$$f(s, t) = \exp_p(v_s(t)) = \exp_p(t(v + sw)), \quad s \in I, t \in J,$$

est une variation de géodésiques avec les vecteurs tangents

$$S = \exp_{p*}(tw_{v_s(t)}), \quad T = \dot{c}_s(t).$$

Ces vecteurs satisfont donc l'équation (8.5).

Nous allons en déduire une propriété importante de l'application  $\exp$ . Pour ceci, nous nous restreignons au cas  $s = 0$  et, pour raisons de simplicité, nous écrivons  $v(t)$  au lieu de  $v_0(t)$ , i.e.  $v(t) = tv$ . Les vecteurs  $tw_{v(t)}$  sont maintenant orthogonaux à la droite  $t \mapsto$

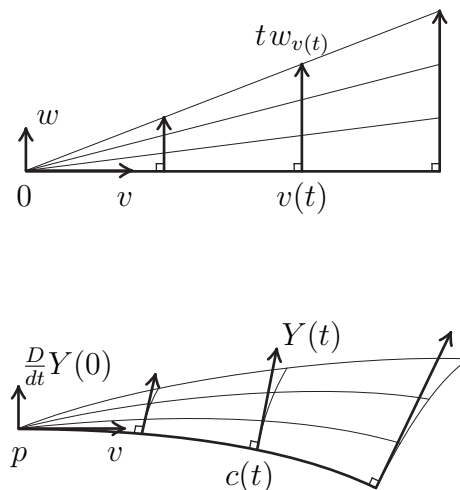


FIGURE 8.2. Un champ de vecteurs dans  $T_p M$  et son image sous  $\exp_{p*}$

$v(t)$ ,  $t \in J$ . Au vu du lemme de Gauss (théorème 4.8), les vecteurs  $S = \exp_{p^*}(tw_{v(t)})$  sont orthogonaux à la géodésique  $c(t) = \exp_p(tv)$ . (Fig. 8.2). La propriété citée de l'application  $\exp$  est alors la suivante (où nous écrivons  $Y$  au lieu de  $S$ ).

**8.6 Proposition.** *Soient  $v, w \in T_p M$  des vecteurs tangents non-nuls et orthogonaux entre eux comme ci-dessus, et  $c$  la géodésique  $c(t) = \exp_p(v(t)) = \exp_p(tv)$ ,  $t \in J$ , où  $0 \in J$ , et soit*

$$Y(t) := \exp_{p^*}(tw_{v(t)}).$$

*Alors  $Y$  est un champ de vecteurs orthogonaux le long de  $c$  satisfaisant l'équation différentielle*

$$(1) \quad \frac{D}{dt} \frac{D}{dt} Y + R(Y, \dot{c})\dot{c} = 0,$$

*avec les conditions initiales*

$$(2) \quad Y(0) = 0, \quad \frac{D}{dt} Y(0) = w.$$

*Preuve.* L'équation (1) est équivalente à (8.5). La première équation de (2) est claire, car  $\exp_{p^*}$  est une application linéaire. Pour la deuxième équation, nous écrivons

$$\begin{aligned} \frac{D}{dt} Y(t) &= \frac{D}{dt} (\exp_{p^*}(tw_{v(t)})) = \frac{D}{dt} (t \exp_{p^*}(w_{v(t)})) \\ &= \exp_{p^*}(w_{v(t)}) + t \frac{D}{dt} (\exp_{p^*}(w_{v(t)})). \end{aligned}$$

Par conséquent,  $\frac{D}{dt} Y(0) = \exp_{p^*}(w_{v(0)}) = \exp_{p^*}(w) = w$  (voir (4.7)). □

**A propos de  $\frac{D}{dt} \frac{D}{dt}$ .**

Dans le corollaire 2.18, nous avons vu que toute base orthonormée de l'espace tangent dans un point d'une courbe se prolonge parallèlement en un champ de bases orthonormées le long de toute la courbe.

Considérons maintenant une telle situation, i.e. des champs de vecteurs  $E^1, \dots, E^n$  parallèles le long d'une courbe différentiable  $c : I \rightarrow M$ , tels que pour tout  $t \in I$ , les vecteurs  $E^1(t), \dots, E^n(t)$  forment une base orthonormée de  $T_{c(t)}M$ . Le champ  $Y$  s'écrit alors sous la forme

$$Y(t) = \sum_{i=1}^n y_i(t) E^i(t),$$

avec des fonctions différentiables  $y_1(t), \dots, y_n(t)$ . Les  $E^i$  étant parallèles, on a  $\frac{D}{dt}E^i(t) = 0$ , et il s'ensuit que

$$(8.7) \quad \frac{D}{dt}Y(t) = \sum_{i=1}^n \dot{y}_i(t)E^i(t), \quad \frac{D}{dt} \frac{D}{dt}Y(t) = \sum_{i=1}^n \ddot{y}_i(t)E^i(t).$$

### Le rapport avec la courbure de Gauss d'une surface.

Soit  $r : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  un morceau de surface régulière (voir chapitre 7). Rappelons que  $(S, r^{-1})$  est une carte de  $S$  et que les champs de bases associés à cette carte sont

$$X_u^i = r^i(x) = \left( \frac{\partial u_1(x)}{\partial x_i}, \frac{\partial u_2(x)}{\partial x_i}, \frac{\partial u_3(x)}{\partial x_i} \right)_u, \quad u = r(x); \quad i = 1, 2.$$

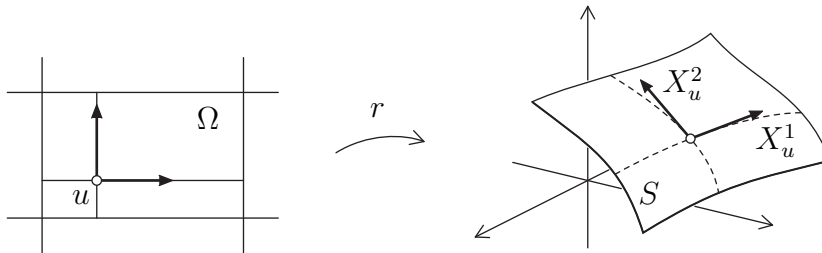


FIGURE 8.3. Un morceau de surface régulière

Pour un champ de vecteurs  $x \mapsto V(x) = (v_1(x), v_2(x), v_3(x))_u$ ,  $u = r(x)$ , le long de la surface, notons  $V^i$  le champ des dérivées partielles

$$V^i(x) = \left( \frac{\partial v_1(x)}{\partial x_i}, \frac{\partial v_2(x)}{\partial x_i}, \frac{\partial v_3(x)}{\partial x_i} \right)_u, \quad u = r(x); \quad i = 1, 2.$$

Cette notation sera appliquée au champ des vecteurs normaux

$$n(x) := \frac{r^1(x) \wedge r^2(x)}{\|r^1(x) \wedge r^2(x)\|},$$

et aux champs  $r^1, r^2$ , dont les dérivées sont notées  $r^{ij}$  et les dérivées itérées  $r^{ijk}$ . Remarquons que  $r^{ij} = r^{ji}$ ,  $r^{jki} = r^{ijk}$ , etc.

Dans le cours de géométrie de première année, nous avons étudié la *seconde forme fondamentale*  $h : T_u S \times T_u S \rightarrow \mathbb{R}$  dont les composantes  $h_{ij}$  ont été définies par

$$h_{ij}(x) := -\langle n^i(x), r^j(x) \rangle, \quad i, j = 1, 2.$$

Puisque  $\langle n(x), r^j(x) \rangle = 0 = \text{constante}$  et  $\frac{\partial}{\partial x_i} \langle n(x), r^j(x) \rangle = \langle n^i(x), r^j(x) \rangle + \langle n(x), r^{ij}(x) \rangle$ , on a

$$h_{ij}(x) = \langle n(x), r^{ij}(x) \rangle.$$

La courbure de Gauss est, par définition, la fonction

$$(8.8) \quad K(x) := \frac{\det(h_{ij})}{\det(g_{ij})},$$

où les  $g_{ij}$  sont les composantes du tenseur métrique. On avait démontré que

$$K(x) = k_1(x)k_2(x)$$

où  $k_1(x)$  et  $k_2(x)$  sont le minimum et le maximum des courbures des sections normales au point  $r(x)$  de  $S$ .

La figure 8.4 montre différentes sections en un point  $p$ . Ce sont des intersections, (au voisinage de  $p$ ) de  $S$  et des plans passant par le vecteur normal  $n$  en ce point. Dans l'exemple à gauche, la courbure est dans la direction opposée à celle de  $n$  et atteint un minimum négatif  $k_1$ . Lorsqu'on fait tourner le plan autour de  $n$ , la courbure de l'intersection change continûment et atteint un maximum positif  $k_2$  dans l'exemple de droite. La courbure de Gauss de  $S$  en  $p$  est négative.

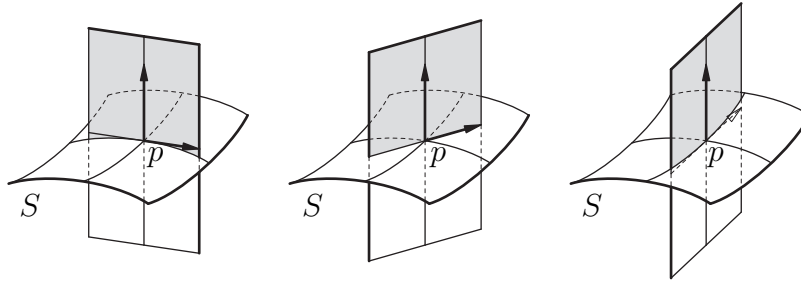


FIGURE 8.4. Courbures des sections normales

Nous allons montrer que  $K(x)$  peut être exprimée avec le tenseur de courbure. Pour ceci, nous observons que  $r : \Omega \rightarrow S$  a son domaine de définition dans  $\mathbb{R}^2$ . L'application  $r$  est alors un cas particulier d'une variation de courbes.

D'après la définition de la dérivée covariante d'une surface dans  $\mathbb{R}^3$  (voir chapitre 7), on a

$$D_{r^j} r^k = (r^{jk})^\top = r^{jk} - \langle r^{jk}, n \rangle n = r^{jk} - h_{jk} n,$$

où  $(\cdot)^\top$  signifie la projection orthogonale sur le plan tangent. Sachant que  $n^i$  est orthogonal à  $n$ , nous obtenons

$$D_{r^i} D_{r^j} r^k = (r^{jki})^\top - h_{jk} n^i.$$

Puisque  $r$  est une variation de courbes, on a  $R(r^i, r^j, r^k) = (D_{r^i} D_{r^j} - D_{r^j} D_{r^i}) r^k$ . Avec l'équation précédente et en utilisant que  $r^{jki} = r^{ijk}$ , on obtient

$$R(r^i, r^j) r^k = h_{ik} n^j - h_{jk} n^i.$$

Ceci nous permet d'exprimer le déterminant de  $(h_{ij})$  avec  $R$ . En effet :

$$\begin{aligned} \langle R(r^1, r^2) r^2, r^1 \rangle &= h_{12} \langle n^2, r^1 \rangle - h_{22} \langle n^1, r^1 \rangle \\ &= h_{11} h_{22} - (h_{12})^2. \end{aligned}$$

D'où finalement

$$(8.9) \quad K = \frac{\langle R(r^1, r^2) r^2, r^1 \rangle}{\det(g_{ij})}.$$

Or, le tenseur de courbure est entièrement déterminé par le tenseur métrique (voir aussi les formules (9.1), (9.2) au début du prochain chapitre). Grâce à (8.9), nous avons donc démontré que la courbure de Gauss est entièrement déterminée par le tenseur métrique. Ce fait étonnant a été découvert par Gauss, qui l'appelait le *theorema egregium*.

## Chapitre 9 Propriétés de la courbure

### Les composantes du tenseur de courbure.

Soit une carte  $(U, \varphi)$  de  $M$  comme ci-dessus. Puisque  $R$  est tri-linéaire, il existe des coefficients  $R_{ijk}^l$  tels que

$$R(X^i, X^j)X^k = \sum_l R_{ijk}^l X^l.$$

Comme pour les composantes du tenseur métrique et les symboles de Christoffel, nous interpréterons parfois les  $R_{ijk}^l$  comme des fonctions de  $p \in U$ , mais aussi comme des fonctions de  $x = \varphi(p) \in \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ , et nous écrirons, par abus de notation,  $R_{ijk}^l(p) = R_{ijk}^l(x)$ .

On appelle les  $R_{ijk}^l$  les *composantes du tenseur de courbure* relativement à la carte  $(U, \varphi)$ . On peut les calculer avec les symboles de Christoffel. Pour le voir, dérivons  $D_{X_j} X^k = \sum_{r=1}^n \Gamma_{jk}^r X^r$  relativement à  $X^i$ , ce qui donne

$$D_{X^i} D_{X^j} X^k = \sum_{r=1}^n X^i [\Gamma_{jk}^r] X^r + \sum_{l,m} \Gamma_{jk}^m \Gamma_{im}^l X^l.$$

En regroupant les termes et en écrivant  $l$  à la place de  $r$ , nous obtenons

$$D_{X^i} D_{X^j} X^k = \sum_{l=1}^n \left( X^i [\Gamma_{jk}^l] + \sum_{m=1}^n \Gamma_{im}^l \Gamma_{jk}^m \right) X^l.$$

Les coefficients s'obtiennent en soustrayant l'expression analogue avec  $i$  et  $j$  intervertis. En interprétant maintenant les symboles comme des fonctions de  $x \in \varphi(U)$  nous écrivons  $\frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma_{jk}^l$  à la place de  $X^i [\Gamma_{jk}^l]$ . La formule cherchée devient

$$(9.1) \quad R_{ijk}^l = \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma_{jk}^l - \frac{\partial}{\partial x_j} \Gamma_{ik}^l + \sum_{m=1}^n (\Gamma_{im}^l \Gamma_{jk}^m - \Gamma_{jm}^l \Gamma_{ik}^m).$$

Pour des raisons pratiques, nous rappelons les formules pour les symboles de Christoffel (définition 2.5) :

$$(9.2) \quad \Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \left( \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jl} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{il} - \frac{\partial}{\partial x_l} g_{ij} \right) g^{lk}.$$

### Propriétés algébriques du tenseur de courbure.

**9.3 Proposition.** *Pour tout  $p \in M$  et tout  $x, y, z, w \in T_p M$ , on a*

- (1)  $R(x, y)z = -R(y, x)z$  (antisymétrie)
- (2)  $R(x, y)z + R(y, z)x + R(z, x)y = 0$  (Identité de Bianchi)
- (3)  $\langle R(x, y)z, z \rangle = 0$
- (4)  $\langle R(x, y)z, w \rangle = \langle R(z, w)x, y \rangle$

*Preuve.* Puisque dans (1) et (2), les deux côtés de l'équation sont des fonctions trilineaires, il suffit de démontrer ces formules pour les vecteurs d'une base. Soient donc  $x = X_p, y = Y_p, z = Z_p$ , où  $X, Y, Z$  appartiennent à une base  $X^1, \dots, X^n$  associée à une carte au voisinage de  $p$ . Dans ce cas,  $R$  est donné par 8.2(2). L'antisymétrie (1) est claire. L'identité (2) résulte du calcul suivant où nous utilisons que  $D$  est symétrique,

$$(D_X D_Y Z - D_Y D_X Z) + (D_Y D_Z X - D_Z D_Y X) + (D_Z D_X Y - D_X D_Z Y) = \\ D_X(D_Y Z - D_Z Y) - D_Y(D_X Z - D_Z X) + D_Z(D_X Y - D_Y X) = 0.$$

Dans (3),  $\langle R(x, y)z, z \rangle$  est bilinéaire en  $x$  et  $y$  pour tout  $z$ . Il suffit donc toujours de prendre  $X$  et  $Y$  parmi les  $X^1, \dots, X^n$ , mais  $Z$  doit être un champ de vecteurs quelconque différentiable au voisinage de  $p$ . Dans ce cas nous observons que

$$\langle D_X D_Y Z, Z \rangle = X[\langle D_Y Z, Z \rangle] - \langle D_Y Z, D_X Z \rangle \\ \langle D_Y D_X Z, Z \rangle = Y[\langle D_X Z, Z \rangle] - \langle D_X Z, D_Y Z \rangle.$$

En utilisant la règle  $\langle D_V Z, Z \rangle = \frac{1}{2}V[\langle Z, Z \rangle]$  et le fait que les champs de bases commutent, nous obtenons

$$\langle R(X, Y)Z, Z \rangle = X[\langle D_Y Z, Z \rangle] - Y[\langle D_X Z, Z \rangle] \\ = \frac{1}{2}(XY - YX)[\langle Z, Z \rangle] = 0.$$

La règle (4) est une conséquence purement algébrique des précédentes et sera démontrée au lemme suivant.  $\square$

**9.4 Lemme.** *Soit  $r : \mathcal{V}^4 \rightarrow \mathbb{R}$  une application 4-linéaire sur un espace vectoriel  $\mathcal{V}$  telle que*

- (1)  $r(x, y, z, w) = -r(y, x, z, w)$
- (2)  $r(x, y, z, w) + r(y, z, x, w) + r(z, x, y, w) = 0$
- (3)  $r(x, y, z, z) = 0$

Alors  $r$  satisfait aussi

$$(4) \quad r(x, y, z, w) = -r(x, y, w, z)$$

$$(5) \quad r(x, y, z, w) = r(z, w, x, y)$$

$$(6) \quad r(x, y, y, w) = r(w, y, y, z)$$

*Preuve.* D'après (3) on a

$$0 = r(x, y, z + w, z + w) - r(x, y, z - w, z - w) = 2r(x, y, z, w) + 2r(x, y, w, z),$$

d'où (4). La règle (5) se déduit en permutant (2) de la manière suivante

$$\begin{aligned} r(x, y, z, w) + r(y, z, x, w) + r(z, x, y, w) &= 0 \\ r(y, z, w, x) + r(z, w, y, x) + r(w, y, z, x) &= 0 \\ -r(z, w, x, y) - r(w, x, z, y) - r(x, z, w, y) &= 0 \\ -r(w, x, y, z) - r(x, y, w, z) - r(y, w, x, z) &= 0 \end{aligned}$$

et en utilisant (1) et (4). Le (6) est clair.  $\square$

Une fonction 4-linéaire satisfaisant les conditions du lemme 9.4 est appelée une *forme de type courbure*.

**9.5 Exemple.** Si  $\mathcal{V}$  est muni d'un produit scalaire, alors la fonction

$$\rho(x, y, z, w) = \begin{vmatrix} \langle x, w \rangle & \langle x, z \rangle \\ \langle y, w \rangle & \langle y, z \rangle \end{vmatrix}$$

est une forme de type courbure.

Le tenseur de courbure nous permet de généraliser la courbure de Gauss pour une variété riemannienne quelconque.

**9.6 Définition.** Soit  $(M^n, g)$  une variété riemannienne. Pour tout  $p \in M$  et pour tout couple de vecteurs linéairement indépendants  $x, y \in T_p M$  nous définissons

$$K(x, y) := \frac{\langle R(x, y)y, x \rangle}{\|x\|^2\|y\|^2 - \langle x, y \rangle^2}.$$

On appelle  $K$  la *courbure sectionnelle* de  $M$ .

**9.7 Proposition.** La courbure sectionnelle  $K(x, y)$  ne dépend que du plan  $\alpha$  engendré par  $x, y \in T_p M$



*Preuve.* C'est une conséquence du lemme suivant.  $\square$

**9.8 Lemme.** Soit  $r, \rho : \mathcal{V}^4 \rightarrow \mathbb{R}$  deux formes de type courbure. Si  $x, y$ , respectivement  $x', y'$ , engendrent un plan  $\alpha$  et  $z, w$ , respectivement  $z', w'$ , engendrent un plan  $\beta$  alors

$$\frac{r(x, y, z, w)}{\rho(x, y, z, w)} = \frac{r(x', y', z', w')}{\rho(x', y', z', w')}$$

*Preuve.* Grâce à la propriété (5), il suffit de montrer que le passage de la base  $x, y$  de  $\alpha$  à la base  $x', y'$  ne change pas la valeur de  $r/\rho$ . Or, ce passage peut être décomposé en une suite de passages élémentaires du type  $\{x, y\} \mapsto \{y, x\}$ ;  $\{x, y\} \mapsto \{\lambda x, y\}$ ;  $\{x, y\} \mapsto \{x + \lambda y, y\}$ . Pour ces passages élémentaires, l'invariance de  $r/\rho$  est claire.  $\square$

Avec le tenseur de courbure, on calcule les courbures sectionnelles. Il est intéressant de noter que la réciproque est également vraie :

**9.9 Proposition.** Le tenseur de courbure est entièrement déterminé par les courbures sectionnelles.

*Preuve.* L'expression qui donne  $R$  en fonction de  $K$  est obtenue grâce au lemme suivant.  $\square$

**9.10 Lemme.** Soit  $r : \mathcal{V}^4 \rightarrow \mathbb{R}$  une forme de type courbure et soit  $s$  la forme bi-quadratique  $s(x, y) = r(x, y, y, x)$ . Alors

$$\begin{aligned} 24r(x, y, z, w) = & s(x + w, y + z) - s(x - w, y + z) \\ & - s(x + w, y - z) - s(x - w, y - z) \\ & - s(y + w, x + z) - s(y - w, x + z) \\ & + s(y + w, x - z) - s(y - w, x - z). \end{aligned}$$

*Preuve.* On trouve d'abord une relation à mi-chemin :

$$\begin{aligned} & r(x, y + z, y + z, w) - r(x, y - z, y - z, w) \\ & - r(y, x + z, x + z, w) + r(y, x - z, x - z, w) \\ & = 2r(x, y, z, w) + 2r(x, z, y, w) - 2(y, x, z, w) - 2r(y, z, x, w) \\ & = 4r(x, y, z, w) + 2r(x, z, y, w) + 2r(z, y, x, w) \\ & = 6r(x, y, z, w) + 2r(y, x, z, w) + 2r(x, z, y, w) + 2r(z, y, x, w) \\ & = 6r(x, y, z, w) \end{aligned}$$

On utilise ensuite

$$\begin{aligned} r(u+w, v, v, u+w) - r(u-w, v, v, u-w) = \\ 2r(u, v, v, w) + 2r(w, v, v, u) = 4r(u, v, v, w). \end{aligned}$$

□

On dit que la variété riemannienne  $(M, g)$  est de courbure constante  $\kappa$  si  $K(\alpha) = \kappa$  pour tout plan  $\alpha \in T_p M$  et tout  $p \in M$ .

**9.11 Proposition.**  $(M, g)$  est de courbure constante  $\kappa$  si et seulement si le tenseur de courbure satisfait

$$R(x, y)z = \kappa(\langle y, z \rangle x - \langle x, z \rangle y).$$

*Preuve.* Le fait qu'un tenseur de cette forme donne la courbure constante est laissé en exercice. Soit donc  $R$  de courbure constante  $\kappa$ . Nous posons

$$r(x, y, z, w) = \langle R(x, y)z, w \rangle - \kappa(\langle y, z \rangle \langle x, w \rangle - \langle x, z \rangle \langle y, w \rangle).$$

On constate que  $r$  est une forme de type courbure (voir l'exemple 9.5). Pour cette forme, on a  $r(x, y, y, x) = \text{constante} = 0$ . Avec le lemme 9.10, on conclut que  $r(x, y, z, w) = \text{constante} = 0$ . □

### Une caractérisation de la métrique euclidienne par la courbure.

Le tenseur métrique standard de  $\mathbb{R}^n$  est donné par les composantes  $g_{ij} = \delta_{ij}$ . Cette métrique s'appelle aussi la métrique euclidienne. Vu que les dérivées des  $g_{ij}$  s'annulent, tous les symboles de Christoffel et toutes les composantes  $R_{ijk}^l$  du tenseur de courbure s'annulent aussi. L'espace euclidien est donc une variété riemannienne de courbure sectionnelle constante égale à zéro.

Nous démontrons que localement, la réciproque est également vraie.

**9.12 Théorème.** Une variété riemannienne est localement isométrique à l'espace euclidien si et seulement si elle est de courbure constante nulle.

*Preuve.* Nous remarquons d'abord que d'après la proposition 9.9, respectivement la formule dans le lemme 9.10, une variété riemannienne  $(M^n, g)$  est de courbure sectionnelle constante égale à zéro si et seulement si le tenseur de courbure  $R$  est identiquement nul.

Clairement, si  $M$  est localement isométrique à  $\mathbb{R}^n$ , alors  $R \equiv 0$ . Faisons maintenant inversement l'hypothèse que  $R \equiv 0$ , et considérons un point quelconque  $p \in M$ . Il

existe  $\varepsilon > 0$  tel que l'application

$$h := \exp_p : T_p^\varepsilon M \rightarrow B_p^\varepsilon(M)$$

est un difféomorphisme. Le tenseur métrique  $g$  induit une structure d'espace euclidien sur  $T_p M$ , et nous montrons que  $h$  est effectivement une isométrie par rapport à cette structure.

Soit donc  $u \in T_p^\varepsilon M$ . Nous posons  $v = \frac{1}{\|u\|}u$  et choisissons une base orthonormée  $w^1, \dots, w^n$  de  $T_p M$  telle que  $w^n = v$ .

En déplaçant parallèlement ces vecteurs de 0 à  $u$ , nous obtenons une base orthonormée  $w_u^1, \dots, w_u^n$  de vecteurs tangents en  $u$ . Il suffit de démontrer que les images  $h_*(w_u^1), \dots, h_*(w_u^n)$  forment une base orthonormée de  $T_{h(u)}M$ .

Pour ceci, considérons le segment de droite  $v(t) = tv$  dans  $T_p M$  et son image

$$c(t) = \exp(tv), \quad t \in [0, t_1], \quad t_1 = \|u\|.$$

La courbe  $c$  est une géodésique dans  $M$  satisfaisant  $\dot{c}(0) = v$ . Le long du segment  $t \mapsto v(t)$  nous avons les champs de vecteurs parallèles (au sens euclidien de  $T_p M$ )  $w_{v(t)}^1, \dots, w_{v(t)}^n$ . Le long de la géodésique  $c$  nous *introduisons* les champs de vecteurs parallèles  $E^1, \dots, E^n$  satisfaisant  $E^i(0) = w^i = w_{v(0)}^i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Pour tout  $t \in [0, t_1]$ , les vecteurs  $E^1(t), \dots, E^n(t)$  forment une base orthonormée, et comme  $\dot{c}(t)$  est un champ parallèle, on a  $E^n(t) = \dot{c}(t)$ . Nous allons démontrer que

$$h_*(w_{v(t)}^i) = E^i(t) \quad i = 1, \dots, n.$$

Pour  $i = n$ , ceci est clair car  $E^n(t) = \dot{c}(t) = h_*(w_{v(t)}^n)$ . Supposons maintenant que  $i < n$ . Le champ  $Y(t) = h_*(tw_{v(t)}^i) = \exp_{p*}(tw_{v(t)}^i)$  satisfait la proposition 8.6 avec  $w = w^i$ . En écrivant  $Y(t) = \sum_{j=1}^n y_j(t)E^j(t)$ , nous obtenons pour  $j = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} \ddot{y}_j(t) &= 0, \\ y_j(0) &= 0, \quad \dot{y}_j(0) = \delta_{ij}. \end{aligned}$$

D'où  $Y(t) = tE^i(t)$ . Puisque  $Y(t) = th_*(w_{v(t)}^i)$ , ceci prouve que  $h_*(w_{v(t)}^i) = E^i(t)$ . Le théorème 9.12 est ainsi démontré.  $\square$

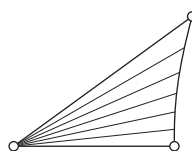
## Chapitre 10 Le théorème de Gauss-Bonnet

### Le théorème de Gauss-Bonnet

Une propriété remarquable de la courbure de Gauss  $K$ , d'une variété riemannienne  $M$  de dimension deux est son rapport avec la somme des angles intérieurs d'un triangle géodésique.

**10.1 Théorème.** *Pour tout triangle géodésique  $\mathcal{T}$  d'angles intérieurs  $\alpha, \beta, \gamma$  on a*

$$\iint_{\mathcal{T}} K = \alpha + \beta + \gamma - \pi.$$



Nous allons démontrer ce théorème dans le cas particulier où  $\mathcal{T}$  se trouve dans une boule normale autour d'une de ses sommets, par exemple le sommet  $p$ . Pour une démonstration du cas général, nous renvoyons à la littérature. Notons également que nous n'avons pas défini la notion d'intégrale sur une variété. Mais comme nous allons nous restreindre ici au domaine d'une carte, nous pouvons définir une intégrale locale; il n'est pas difficile ensuite de vérifier que la définition ne dépend pas d'un changement de coordonnées.

Nous supposons que la situation est la suivante.  $U = B_p^\varepsilon(M)$  est une boule normale,  $a : [0, 1] \rightarrow U$  est un arc de géodésique reliant les points  $a(0) = q$  et  $a(1) = r$ . Pour tout  $s \in [0, 1]$  on a l'arc géodésique  $c_s : [0, 1] \rightarrow U$  uniquement déterminé allant de  $c_s(0) = p$  à  $c_s(1) = a(s)$ . Le triangle  $\mathcal{T}$  est l'ensemble des points

$$\mathcal{T} = \{c_s(t) \mid 0 \leq s, t \leq 1\}.$$

Un tel domaine s'appelle un *triangle géodésique*.

Nous démontrons d'abord une version infinitésimale du théorème 10.1 (voir (10.3)). La preuve est basée sur le fait que l'application  $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow U$  donnée par  $f(s, t) = c_s(t)$  est une variation géodésique. Les champs de vecteurs  $T = T(s, t)$  et  $S = S(s, t)$  sont définis comme ci-dessus. Nous introduisons encore le vecteur  $T^\wedge(s, t)$

orthogonal à  $T(s, t)$  ayant la même longueur que  $T(s, t)$  est situé du même côté de  $T(s, t)$  que  $S$  (voir la figure).

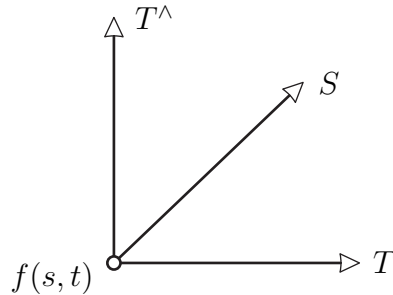


FIGURE 10.1. Le vecteur orthogonal

Pour ce vecteur on a

$$g(S, T^\wedge) = (g(S, S)g(T, T) - g^2(S, T))^{1/2}.$$

Si nous déplaçons parallèlement le vecteur  $T^\wedge(s, 0)$  le long de  $c_s$  nous obtenons un champ différentiable  $t \mapsto T'(s, t)$  avec chaque  $T'(s, t)$  orthogonal à  $T(s, t)$  et ayant la même longueur. Puisque  $M$  est de dimension 2, ceci est seulement possible si  $T'(s, t) = T^\wedge$ . Donc, non seulement  $T$  mais aussi  $T^\wedge$  est parallèle le long de  $c_s$  :

$$D_T T^\wedge = 0.$$

Afin de formuler la version infinitésimale du théorème 10.1 nous introduisons une fonction  $s \mapsto \omega_t(s)$  qui mesure le taux de rotation de  $T$  le long de la courbe  $s \mapsto c^t(s)$ . Pour ceci nous prenons deux champs parallèles auxiliaires  $s \mapsto E^1(s), E^2(s)$ , formant en chaque point  $c^t(s)$  une base orthonormée ayant la même orientation que la base  $T(s, t), T^\wedge(s, t)$ . Relativement à ce champ de bases le long de  $c^t$ ,  $T$  s'écrit sous la forme

$$T(s, t) = \rho(s) (\cos \varphi_t(s) E^1(s) + \sin \varphi_t(s) E^2(s))$$

Ici  $\rho(s) = \|T(s, t)\|$  est la longueur de  $T(s, t)$  qui ne dépend que de  $s$  (car  $D_T T(s, t) = 0$ ), et  $\varphi_t(s)$  est l'angle entre  $E^1(s)$  et  $T(s, t)$ . Le taux de rotation, par définition, est la variation de cet angle :

$$(10.2) \quad \omega_t(s) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{d}{ds} \varphi_t(s).$$

Notons que  $\omega_t(s)$  ne dépend pas du choix de la direction de  $E^1(0)$ . La dérivée suivant  $S$  devient

$$D_S T = \frac{\rho'}{\rho} T + \omega_t(s) \rho(s) (-\sin \varphi_t(s) E^1(s) + \cos \varphi_t(s) E^2(s)),$$

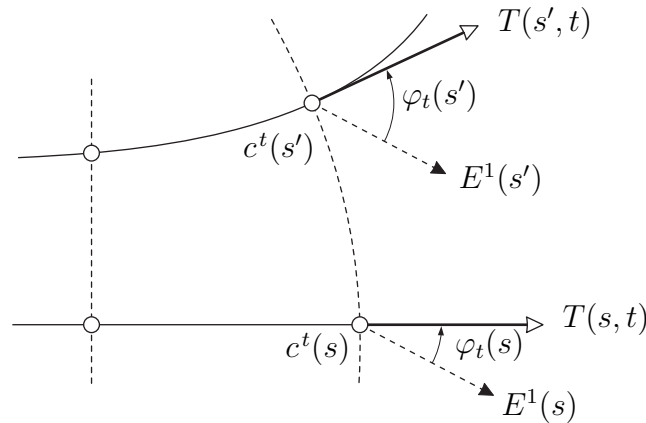


FIGURE 10.2. Taux de rotation de  $T$

où  $\rho' = \frac{d\rho}{ds}$ . Par conséquent,

$$D_S T = \frac{\rho'}{\rho} T + \omega_t(s) T^\wedge.$$

En utilisant que  $D_T T = 0$ ,  $D_T T^\wedge = 0$  et que  $\rho$  ne dépend pas de  $t$ , nous trouvons (voir (8.5)),

$$-R(S, T)T = D_T D_S T = \frac{\partial}{\partial t} \omega_t(s) T^\wedge.$$

Sachant que  $g(R(S, T)T, S) = K(g(S, S)g(T, T) - g^2(S, T)) = Kg^2(S, T^\wedge)$  nous obtenons la version infinitésimale du théorème 10.1 que nous cherchions :

$$(10.3) \quad -Kg(S, T^\wedge) = \frac{\partial}{\partial t} \omega_t(s).$$

En intégrant sur  $t$ , nous obtenons

$$-\int_0^1 Kg(S, T^\wedge) dt = \omega_1(s) - \omega_0(s),$$

et en intégrant sur  $s$ , selon la définition de  $\omega_t(s)$ ,

$$-\int_0^1 \int_0^1 Kg(S, T^\wedge) ds dt = \varphi_1(1) - \varphi_1(0) - \varphi_0(1) + \varphi_0(0).$$

Il ne reste qu'à interpréter les termes. La courbe  $c^1$  coïncide avec le côté  $a$  du triangle, opposé au sommet  $p$  d'angle  $\alpha$ . En prenant le champ de vecteurs auxiliaire  $E^1$  le long de  $a$  tel que  $E^1$  et  $-S$  ont la même direction, on obtient  $\varphi_1(1) = \pi - \gamma$  et  $\varphi_1(0) = \beta$ .

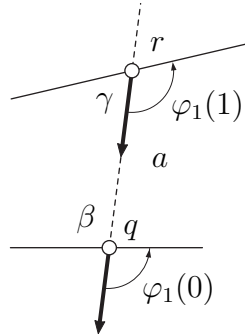


FIGURE 10.3.

Pour  $t = 0$  nous avons la courbe constante  $c^1(s) = p$ . Ici le champ  $E^1$  est constant et  $\varphi_0(1) - \varphi_0(0) = \alpha$ .

Quant à l'intégrale, l'application  $s, t \mapsto f(s, t)$  avec  $0 < s, t < 1$  est un paramétrage régulière de l'intérieur du triangle  $\mathcal{T}$ . Les composantes du tenseur métrique  $g$  pour ce paramétrage sont

$$g_{11} = g(S, S), \quad g_{12} = g(S, T), \quad g_{22} = g(T, T),$$

et on a  $(\det(g_{ij}))^{1/2} = g(S, T^\wedge)$ . Donc, d'après la définition de l'intégrale d'une fonction sur une surface,

$$\int_0^1 \int_0^1 K g(S, T^\wedge) ds dt = \iint_{\mathcal{T}} K.$$

Le théorème 10.1 est maintenant démontré dans le cas où  $\mathcal{T}$  est contenu dans une boule normale □

### Forme globale du théorème de Gauss-Bonnet

Nous donnons encore une application du théorème précédant à la topologie d'une surface.

Soit  $M$  une variété riemannienne compacte (sans bord) de dimension 2. Il n'est pas difficile de voir que  $M$  admet des triangulations tel que chaque triangle est un triangle géodésique. On parle alors d'une *triangulation géodésique*.

Pour une telle triangulation, nous notons  $n_0, n_1, n_2$  le nombre de sommets, d'arêtes et de triangles. La caractéristique  $\chi$  de la triangulation est, par définition le nombre

$$\chi = n_0 - n_1 + n_2.$$

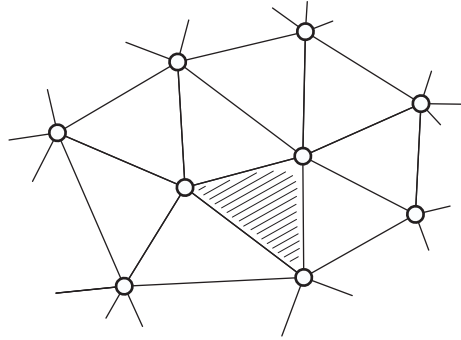


FIGURE 10.4. Triangulation géodésique

Un théorème de topologie dit que toutes les triangulations de  $M$  ont la même caractéristique. Cette caractéristique commune est notée par  $\chi(M)$ . Elle est liée à la courbure de Gauss de  $M$  via le théorème suivant.

#### 10.4 Théorème (Gauss-Bonnet).

$$\iint_M K = 2\pi\chi(M).$$

*Preuve.* Soit une triangulation géodésique de  $M$  et soient  $N_0, N_1, N_2$  les ensembles de sommets, arêtes et triangles. Chaque triangle  $\tau \in N_2$  a trois angles intérieurs  $\alpha_\tau, \beta_\tau, \gamma_\tau$  et l'intégrale de  $K$  sur la surface de  $\tau$  est égale à  $\alpha_\tau + \beta_\tau + \gamma_\tau - \pi$ .

En prenant la somme sur tous les triangles nous obtenons

$$\begin{aligned} \iint_M K &= \sum_{\tau \in N_2} (\alpha_\tau + \beta_\tau + \gamma_\tau - \pi) \\ &= 2\pi n_0 - \pi n_2, \end{aligned}$$

car la somme des angles se trouvant en un même sommet est toujours égale à  $2\pi$ . Or pour une triangulation, on a  $2n_2 = 2n_1$  et  $\chi = n_0 - \frac{3}{2}n_2 + n_2 = n_0 - \frac{1}{2}n_2$ , d'où le théorème.  $\square$