

Information, Calcul et Communication

Module 2 : Information et Communication

Information, Calcul et Communication
Leçon 2.2 : Echantillonnage de signaux
(2ème partie)

O. Lévêque – Faculté Informatique et Communications

Echantillonnage de signaux : rappel

La semaine dernière :

- ▶ signaux, fréquences
- ▶ filtrage
- ▶ échantillonnage



Aujourd'hui :

- ▶ reconstruction
- ▶ théorème d'échantillonnage
- ▶ sous-échantillonnage



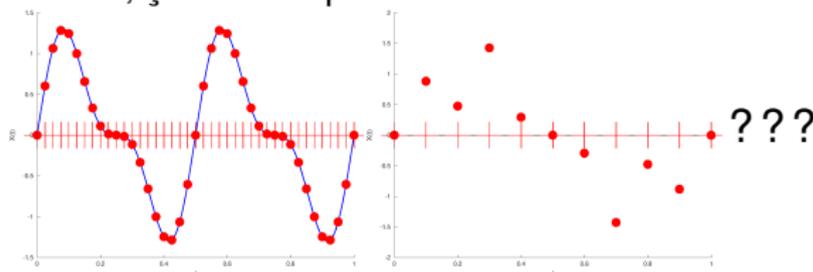
Echantillonnage de signaux : rappel

- ▶ signal $(X(t), t \in \mathbb{R})$; p. ex. : sinusoïde
- ▶ « tout signal est une somme finie de sinusoïdes »
- ▶ spectre : fréquence(s) présente(s) dans un signal, bande passante : f_{max}
- ▶ filtre passe-bas idéal
- ▶ signal échantillonné $(X(nT_e), n \in \mathbb{Z})$
(T_e : période d'échantillonnage ; $f_e = 1/T_e$: fréquence d'échantillonnage)
- ▶ condition nécessaire pour pouvoir reconstruire le signal : $f_e > 2f_{max}$
- ▶ sinon ($f_e \leq 2f_{max}$) : effet stroboscopique

Reconstruction d'un signal

Comment reconstruire un signal $(X(t), t \in \mathbb{R})$
à partir de sa version échantillonnée $(X(nT_e), n \in \mathbb{Z})$?

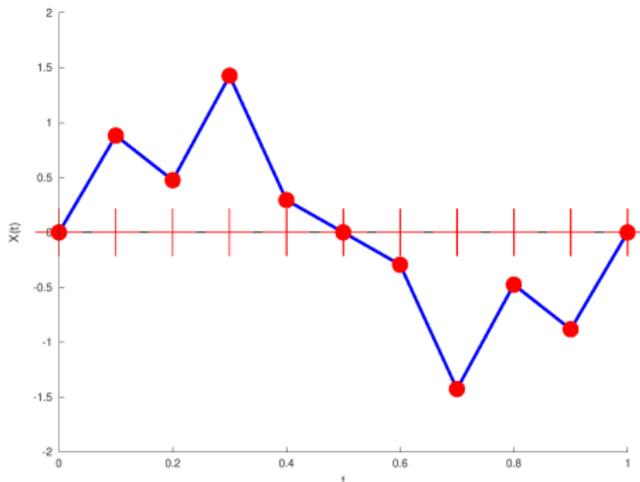
- ▶ Dans certains cas, c'est « assez clair »...
- ▶ Dans d'autres, ça l'est un peu moins !



Reconstruction d'un signal

On dispose de plusieurs techniques pour interpoler un signal :

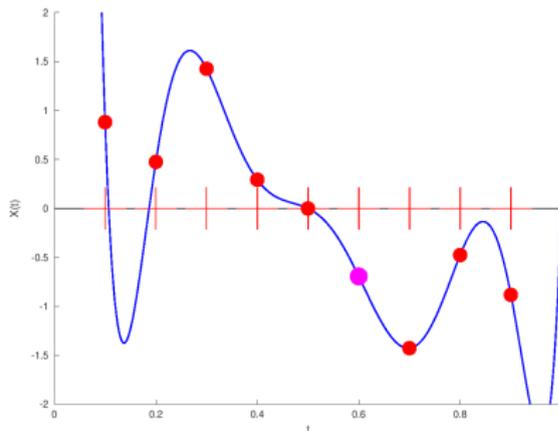
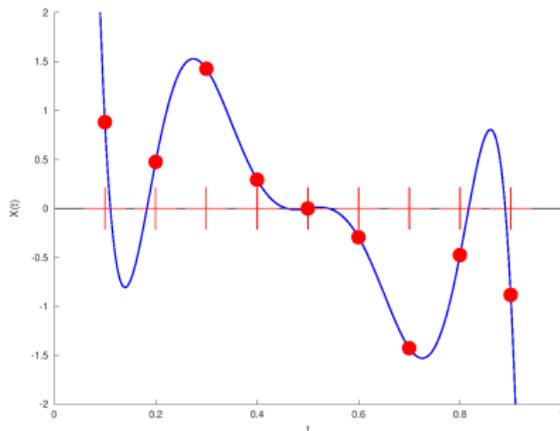
1. « Relier les points » : dans l'exemple précédent, ça donne ceci :



Un défaut principal : la « courbe » obtenue n'est **pas régulière** (non dérivable en plusieurs points)

Reconstruction d'un signal

2. Trouver un polynôme qui passe par tous les points.



Trois défauts principaux :

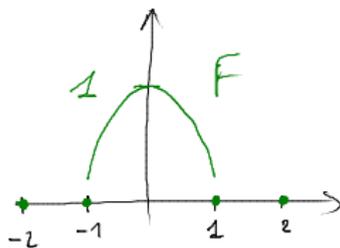
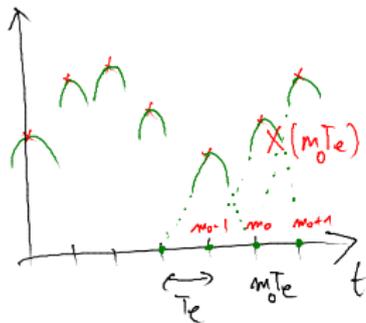
- ▶ Avec N points, il faut trouver un polynôme de degré $N - 1$: la procédure est **complexe** !
- ▶ Elle est également **instable** : si on déplace légèrement ou on ajoute un point, le polynôme peut changer du tout au tout.
- ▶ N'est pas borné.

Reconstruction d'un signal

3. De manière générale, une formule d'interpolation pour $X(t)$ s'écrit :

$$X_I(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} X(mT_e) F\left(\frac{t - mT_e}{T_e}\right)$$

(pour prendre vos propres notes)



$$F(0) = 1$$

$$F(k) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}^*$$

$$\sum_m X(m T_e) F\left(\frac{t - m T_e}{T_e}\right)$$

Note: $F\left(\frac{t - m T_e}{T_e}\right) = F\left(\frac{t}{T_e} - m\right)$

$$m_0: \dots + X((m_0 - 1) T_e) F\left(\frac{t - (m_0 - 1) T_e}{T_e}\right) + X(m_0 T_e) F\left(\frac{t - m_0 T_e}{T_e}\right) + X((m_0 + 1) T_e) F\left(\frac{t - (m_0 + 1) T_e}{T_e}\right) + \dots$$

$$\begin{array}{c}
 \underbrace{\hspace{10em}} \\
 \downarrow \\
 X_I(m_0 T_e): \dots + 0 + \underbrace{X(m_0 T_e) F\left(\frac{t - m_0 T_e}{T_e}\right)}_{\substack{\downarrow t = m_0 T_e \\ F(0)}} + 0 + \dots \\
 \rightarrow X_I(m_0 T_e) = X(m_0 T_e)
 \end{array}$$

Reconstruction d'un signal

3. De manière générale, une formule d'interpolation pour $X(t)$ s'écrit :

$$X_I(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} X(mT_e) F\left(\frac{t - mT_e}{T_e}\right)$$

où $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction telle que

$$F(0) = 1 \quad \text{et} \quad F(k) = 0 \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{Z}^*$$

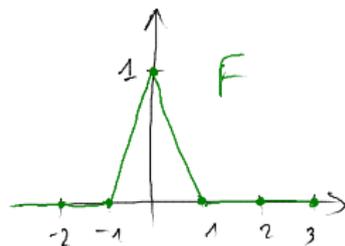
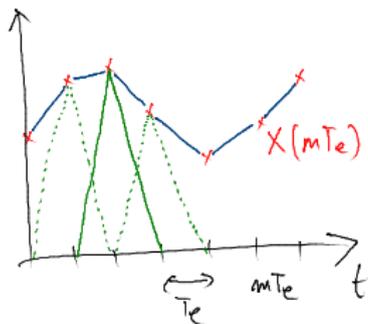
Cette condition implique en particulier que

$$X_I(nT_e) = X(nT_e) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{Z} :$$

$$X_I(nT_e) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} X(mT_e) F\left(\frac{nT_e - mT_e}{T_e}\right) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} X(mT_e) F(n - m) = X(nT_e)$$

Quelle fonction F choisir ?

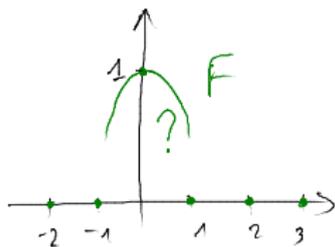
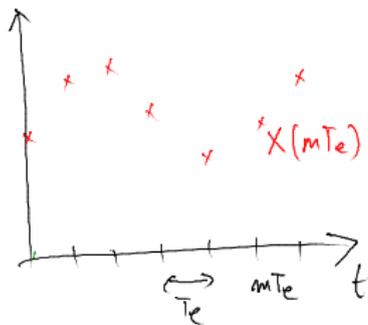
(pour prendre vos propres notes)



$$F(0) = 1$$

$$F(k) = 0, k \in \mathbb{Z}^*$$

$$X_I(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} X(mT_e) \cdot F\left(\frac{t - mT_e}{T_e}\right)$$



$$F(0) = 1$$

$$F(k) = 0, k \in \mathbb{Z}^*$$

$$X_I(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} X(mT_e) \cdot \underbrace{F\left(\frac{t - mT_e}{T_e}\right)}_{\substack{1 - |t| \\ (t+1)(t-1) \\ (t+2)(t+1)(t-1)(t-2) \\ (t+3)(t+2)(t+1)(t-1)(t-2)(t-3) \\ \vdots}}$$

degré

1

2

4

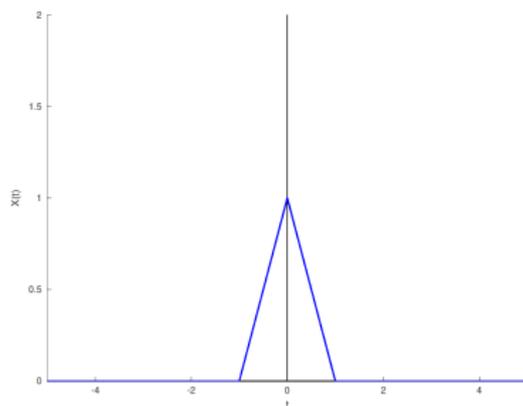
6

;

Reconstruction d'un signal

La fonction F qui permet de « relier les points » est donnée par

$$F(t) = \begin{cases} 1 - |t| & \text{si } |t| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |t| \geq 1 \end{cases}$$



On peut faire mieux en choisissant

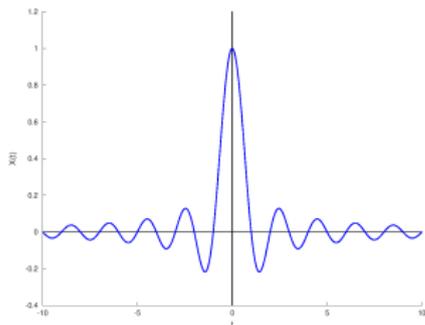
$$F(t) = (1 - t) (1 + t) (1 - \frac{t}{2}) (1 + \frac{t}{2}) (1 - \frac{t}{3}) (1 + \frac{t}{3}) \dots$$

Cette fonction est régulière, et on vérifie que $F(0) = 1$ et $F(k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}^*$.

Reconstruction d'un signal : interpolation

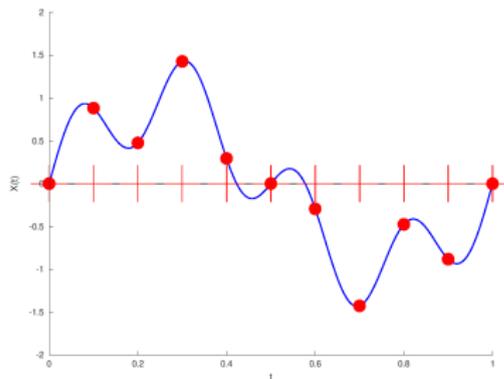
Il se trouve que la fonction F du bas de la page précédente est égale à

$$F(t) = \text{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}, \quad t \in \mathbb{R}$$



Ce qui donne dans notre exemple :

$$X_I(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} X(mT_e) \text{sinc}\left(\frac{t - mT_e}{T_e}\right)$$



Reconstruction d'un signal : interpolation

Pour retrouver un signal à partir de sa version échantillonnée, on a donc maintenant une formule d'interpolation :

$$X_I(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} X(mT_e) \operatorname{sinc} \left(\frac{t - mT_e}{T_e} \right)$$

Il nous reste une question cruciale à résoudre :
quand est-ce que $X_I(t) = X(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$?

Le théorème d'échantillonnage

La paternité de ce théorème est attribuée à plusieurs personnes, qui l'ont successivement redécouvert / amélioré au cours des ans...

1. Edmund Taylor Whittaker (1873-1956), mathématicien anglais, qui publie en 1915 la formule d'interpolation qu'on vient de voir.



Le théorème d'échantillonnage

La paternité de ce théorème est attribuée à plusieurs personnes, qui l'ont successivement redécouvert / amélioré au cours des ans...

2. Harry Nyquist (1889-1979), ingénieur aux Laboratoires Bell, qui publie en 1928 un article sur « la théorie de la transmission par le télégraphe ».



Le théorème d'échantillonnage

La paternité de ce théorème est attribuée à plusieurs personnes, qui l'ont successivement redécouvert / amélioré au cours des ans...

3. Vladimir Aleksandrovich Kotelnikov (1908-2005), pionnier de la radio-astronomie, qui découvre ce résultat indépendamment en **1933** en Union Soviétique.



Le théorème d'échantillonnage

La paternité de ce théorème est attribuée à plusieurs personnes, qui l'ont successivement redécouvert / amélioré au cours des ans...

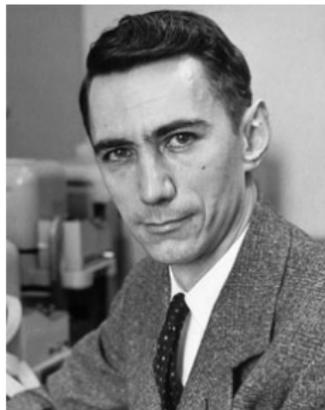
4. Herbert Raabe (1909-2004), qui publie sa thèse sur le sujet en 1939 en Allemagne...



Le théorème d'échantillonnage

La paternité de ce théorème est attribuée à plusieurs personnes, qui l'ont successivement redécouvert / amélioré au cours des ans...

5. Claude Edwood Shannon (1916-2001), également ingénieur aux Laboratoires Bell, qui publie en 1949 un article sur la « communication en présence de bruit », et que nous allons revoir la semaine prochaine...



Le théorème d'échantillonnage



Soient :

- ▶ $X(t)$ un signal de bande passante f_{\max} ;
- ▶ $X(nT_e)$, ($n \in \mathbb{Z}$) le même signal échantillonné à une fréquence d'échantillonnage f_e ;
- ▶ $X_I(t)$ donné par la formule d'interpolation :

$$X_I(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} X(mT_e) \operatorname{sinc} \left(\frac{t - mT_e}{T_e} \right)$$

Alors :

Si $f_e > 2f_{\max}$ alors $X_I(t) = X(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$

et

Si $X_I(t) = X(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ alors $f_e \geq 2f_{\max}$

(c.-à-d. Si $f_e < 2f_{\max}$ alors il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $X_I(t_0) \neq X(t_0)$)

Le théorème d'échantillonnage : illustration

Voyons graphiquement ce que donne la reconstruction d'une sinusoïde pure :

$$X(t) = \sin(2\pi f t)$$

La version échantillonnée de ce signal est : $X(nT_e) = \sin(2\pi f nT_e)$ et la formule d'interpolation devient :

$$X_I(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sin(2\pi f mT_e) \operatorname{sinc}\left(\frac{t - mT_e}{T_e}\right)$$

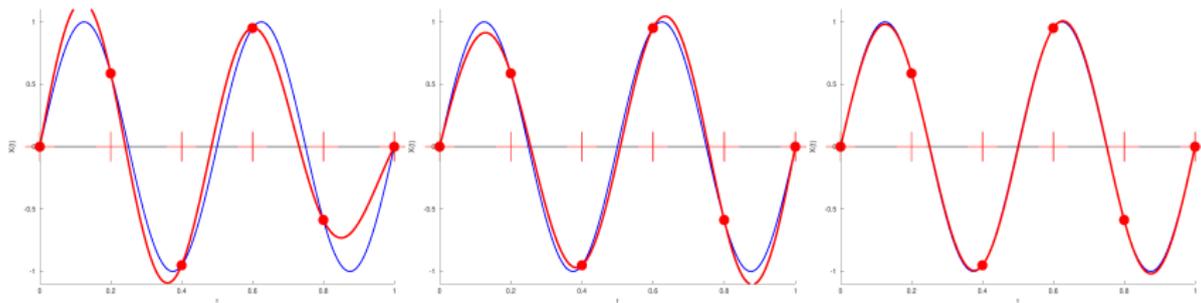
De manière pratique, on se limite à quelques termes de la somme :

$$X_I(t) \simeq \sum_{m=-N}^N \sin(2\pi f mT_e) \operatorname{sinc}\left(\frac{t - mT_e}{T_e}\right)$$

Le théorème d'échantillonnage : illustration

$$X_I(t) \simeq \sum_{m=-N}^N \sin(2\pi f m T_e) \operatorname{sinc}\left(\frac{t - m T_e}{T_e}\right)$$

Voici ce que donne cette formule d'interpolation pour $f = 2$ Hz et $f_e = 5$ Hz (donc $T_e = 0.2$ sec) :

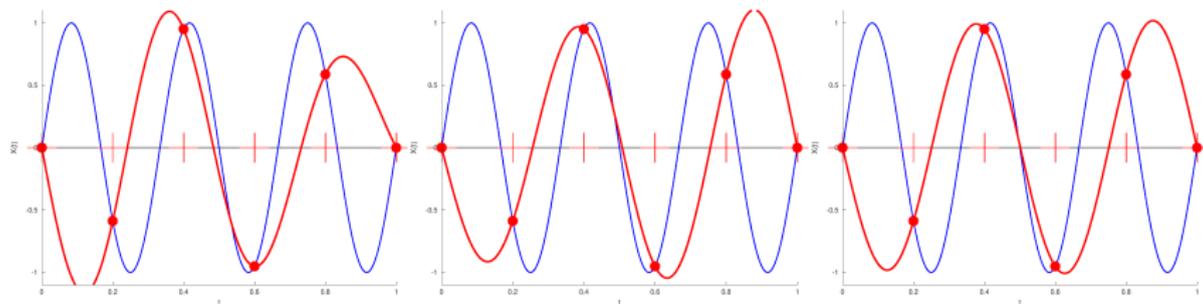


avec $N = 5, 10, 50$. Si $f_e > 2f$, la reconstruction est bonne.

Le théorème d'échantillonnage : illustration

$$X_I(t) \simeq \sum_{m=-N}^N \sin(2\pi f m T_e) \operatorname{sinc}\left(\frac{t - m T_e}{T_e}\right)$$

Voici ce que donne cette formule d'interpolation pour $f = 3$ Hz et $f_e = 5$ Hz (donc $T_e = 0.2$ sec) :

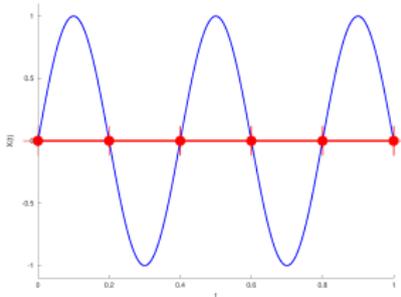


avec $N = 5, 10, 50$. Ici, par contre, $f_e < 2f$: on a un problème...
Et si $f_e = 2f$?

Le théorème d'échantillonnage : illustration

$$X_I(t) \simeq \sum_{m=-N}^N \sin(2\pi f m T_e) \operatorname{sinc}\left(\frac{t - m T_e}{T_e}\right)$$

Voici ce que donne cette formule d'interpolation pour $f = 2.5$ Hz et $f_e = 5$ Hz (donc $T_e = 0.2$ sec) :

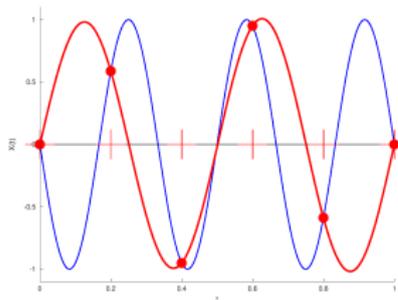
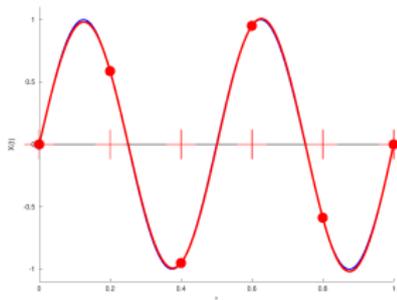


fonction nulle, pour toute valeur de N ! Ici aussi, on a un problème....

Essays de mieux comprendre cet exemple

Rappel : la fréquence d'échantillonnage $f_e = 5$ Hz.

- ▶ Quand $f = 2$ Hz, la reconstruction est bonne.
- ▶ Quand $f = 3$ Hz, la reconstruction est mauvaise.



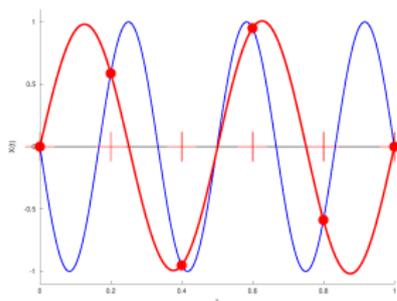
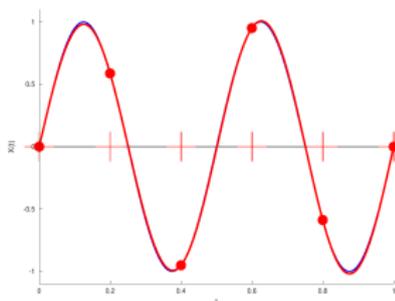
- ▶ Retournons le graphe de droite, juste pour voir...
- ▶ Les valeurs échantillonnées sont les mêmes à gauche et à droite !

$$\sin(-2\pi \cdot 3 \cdot \frac{m}{5}) = \sin(-\frac{6\pi}{5} \cdot m) = \sin(\frac{4\pi}{5} \cdot m - 2\pi m) = \sin(2\pi \cdot 2 \cdot \frac{m}{5})$$

Essays de mieux comprendre cet exemple

Rappel : la fréquence d'échantillonnage $f_e = 5$ Hz.

- ▶ Quand $f = 2$ Hz, la reconstruction est bonne.
- ▶ Quand $f = 3$ Hz, la reconstruction est mauvaise.



- ▶ Retournons le graphe de droite, juste pour voir...
- ▶ Les valeurs échantillonnées sont les mêmes à gauche et à droite !
- ▶ La courbe reconstruite avec la formule d'interpolation est donc aussi la même à gauche et à droite ! (mais pas le signal d'origine)

Exemple : conclusion

Rappel : la fréquence d'échantillonnage $f_e = 5$ Hz.

- ▶ A partir des seules valeurs échantillonnées de la sinusoïde, il n'est pas possible de dire si celle-ci a une fréquence de $f = 2$ Hz ou de $f = 3$ Hz (déphasée de π).
- ▶ Dans une telle situation, notre formule d'interpolation « choisit » la fréquence la plus basse, c.-à-d. $f = 2$ Hz.
- ▶ Donc, si on sait dès le départ que la fréquence f de la sinusoïde d'origine est plus petite que $f_e/2 = 2.5$ Hz, alors on sait aussi que la formule d'interpolation reconstruit la bonne sinusoïde.
- ▶ Si par contre la fréquence f est plus grande que $f_e/2 = 2.5$ Hz, alors la formule d'interpolation « choisit » la mauvaise fréquence : $\tilde{f} = f_e - f$, c'est l'effet stroboscopique qu'on a vu la semaine dernière.

Le théorème d'échantillonnage



Soient :

- ▶ $X(t)$ un signal de bande passante f_{\max} ;
- ▶ $X(nT_e)$, ($n \in \mathbb{Z}$) le même signal échantillonné à une fréquence d'échantillonnage f_e ;
- ▶ $X_I(t)$ donné par la formule d'interpolation :

$$X_I(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} X(mT_e) \operatorname{sinc} \left(\frac{t - mT_e}{T_e} \right)$$

Alors :

Si $f_e > 2f_{\max}$ alors $X_I(t) = X(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$

et

Si $X_I(t) = X(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ alors $f_e \geq 2f_{\max}$

(c.-à-d. Si $f_e < 2f_{\max}$ alors il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $X_I(t_0) \neq X(t_0)$)

Avant les maths : pourquoi la condition

$$f_e > 2f_{\max} ?$$

- ▶ Dans tous les exemples vus précédemment, on avait à faire à un signal $X(t)$ avec une seule fréquence f .
- ▶ On a vu dans ce cas que $f_e > 2f$ est une condition suffisante pour une bonne reconstruction du signal.
- ▶ Et si maintenant le signal $X(t)$ contient deux fréquences f_1 et f_2 ?
- ▶ Dans ce cas, il suffira que $f_e > 2f_1$ et $f_e > 2f_2$ pour que le signal soit bien reconstruit, c.-à-d. que $f_e > 2 \max\{f_1, f_2\}$.
- ▶ En généralisant à un signal quelconque, on arrive donc intuitivement à la condition $f_e > 2f_{\max}$.

Idée de la démonstration : première partie

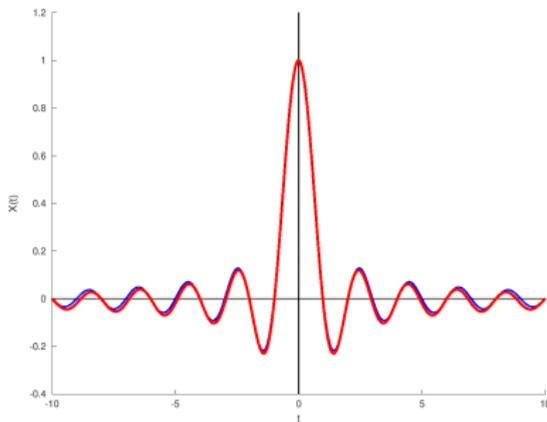
Dans ce qui suit, nous justifions de manière informelle l'affirmation :

Si $f_e > 2 f_{\max}$, alors $X_I(t) = X(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

La fonction **sinc** est le résultat du mélange de plusieurs sinusoïdes :

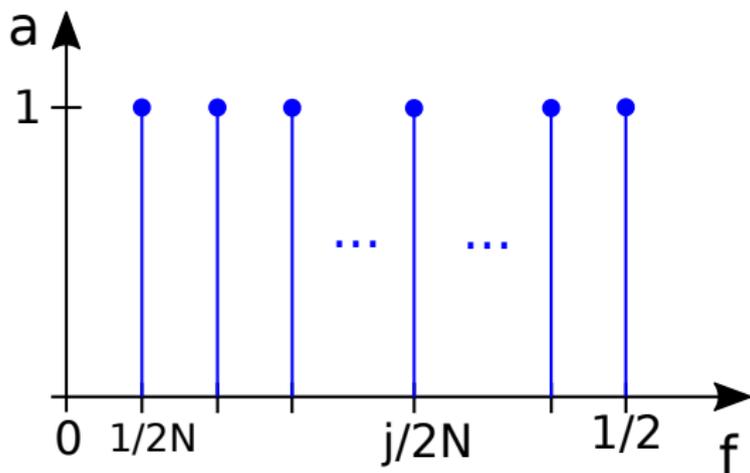
$$\text{sinc}(t) \simeq \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sin(2\pi f_j t + \pi/2) \quad \text{avec } N \text{ grand et } f_j = \frac{j}{2N}$$

On voit ci-contre (en rouge) ce que vaut cette approximation pour $N = 50$.



Idée de la démonstration : première partie (suite)

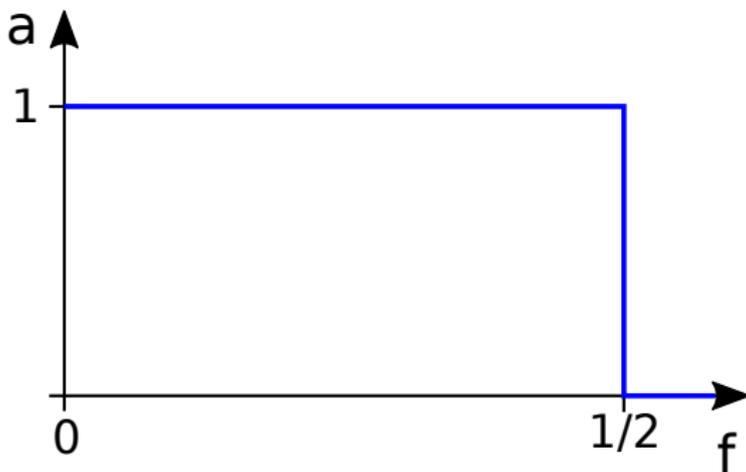
Notez que les fréquences $f_j = j/(2N)$ couvrent l'intervalle $[0, \frac{1}{2}]$.



Idée de la démonstration : première partie (suite)

Notez que les fréquences $f_j = j/(2N)$ couvrent l'intervalle $[0, \frac{1}{2}]$.

Donc toutes les fréquences comprises dans l'intervalle $[0, \frac{1}{2}]$ sont présentes dans la fonction $\text{sinc}(t)$.



Idée de la démonstration : première partie (suite)

Notez que les fréquences $f_j = j/(2N)$ couvrent l'intervalle $[0, \frac{1}{2}]$.

Donc toutes les fréquences comprises dans l'intervalle $[0, \frac{1}{2}]$ sont présentes dans la fonction $\text{sinc}(t)$.

En conséquence, la fonction $\text{sinc}(t/T_e) = \text{sinc}(f_e t)$ contient toutes les fréquences comprises dans l'intervalle $[0, \frac{f_e}{2}]$.

La bande passante du signal $\text{sinc}(f_e t)$ est donc $B = \frac{f_e}{2}$.

Or c'est justement la fonction $\text{sinc}(f_e t)$ qu'on utilise pour reconstruire le signal :

La bande passante du signal interpolé $X_I(t)$
est donc **plus petite ou égale** à $\frac{f_e}{2}$.

Idée de la démonstration : première partie (suite)

Etant donné l'hypothèse effectuée ($2f_{\max} < f_e$), la bande passante du signal d'origine $X(t)$ est aussi plus petite ou égale à $\frac{f_e}{2}$.

Nous avons vu de plus que $X_I(t)$ et $X(t)$ prennent les mêmes valeurs aux points d'interpolation nT_e , $n \in \mathbb{Z}$.

Or on peut montrer le résultat suivant :

Deux signaux dont la bande passante est plus petite ou égale à $B = \frac{f_e}{2}$ et qui coïncident aux points nT_e , $n \in \mathbb{Z}$, coïncident en fait partout !

En conclusion :

Sous l'hypothèse que $f_e > 2f_{\max}$, on a bien $X_I(t) = X(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Idée de la démonstration : seconde partie

Vérifions maintenant l'affirmation « *réciroque* » :

Si $X_I(t) = X(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ alors $f_e \geq 2 f_{\max}$.

- ▶ Si $X_I(t) = X(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, alors...
- ▶ ...ils ont même bande passante.
(forcément : ce sont les mêmes signaux).
- ▶ Or on a vu que la bande passante de $X_I(t)$ est inférieure ou égale à $f_e/2$.
- ▶ Donc f_{\max} (de X) est inférieure ou égale à $f_e/2$.

QED.

Sous-échantillonnage d'un signal

Lorsqu'on échantillonne un signal à une fréquence $f_e < 2f_{\max}$ apparaît l'effet stroboscopique dont nous avons parlé la semaine dernière.

En général, on essaie à tout prix d'éviter cet effet stroboscopique !

Une solution simple, mais coûteuse : augmenter la fréquence d'échantillonnage jusqu'à satisfaire la condition $f_e > 2f_{\max}$.

Effet stroboscopique : une autre solution

Cependant, certains signaux contiennent, en théorie, des fréquences qui vont jusqu'à l'infini (en pratique : des fréquences très élevées).

Pour ces signaux, $f_{\max} = +\infty$: des tels signaux sont donc *toujours* sous-échantillonnés, quelle que soit la fréquence d'échantillonnage f_e .

Comment éviter l'effet stroboscopique dans ce cas ?

Effet stroboscopique : une autre solution



Une solution qui minimise les dégâts consiste à :

filtrer le signal *avant* de l'échantillonner !

- ▶ on filtre le signal avec un filtre passe-bas idéal dont la fréquence de coupure f_c est juste un peu plus petite que $\frac{f_e}{2}$.
- ▶ puis on échantillonne le signal à la fréquence f_e ;
- ▶ et pour reconstruire le signal, on utilise la formule d'interpolation.

On perd ainsi quelques hautes fréquences du signal, mais après ça, la reconstruction est parfaite ; on n'a donc pas d'effet stroboscopique.

Echantillonnage de signaux : conclusion



- ▶ De façon surprenante, un signal à temps continu ($X(t), t \in \mathbb{R}$) peut sous certaines conditions être **reconstruit parfaitement** à partir de sa version échantillonnée ($X(nT_e), n \in \mathbb{Z}$).
- ▶ Le théorème d'échantillonnage nous donne le **seuil** ($2f_{\max}$) au dessus duquel la fréquence d'échantillonnage f_e est suffisante pour permettre une reconstruction parfaite du signal.
- ▶ En dessous de ce seuil, l'**effet stroboscopique** apparaît.
- ▶ On peut éviter l'apparition d'un tel phénomène en **filtrant** le signal **avant** de l'**échantillonner**.

Echantillonnage de signaux : 2^e conclusion

L' échantillonnage et la reconstruction de signaux ont permis une transformation profonde des télécommunications :

des signaux analogiques, on est passé aux signaux numériques, qui permettent un transfert bien plus efficace de l'information.

Annexe : justification de la formule d'approximation du sinc

Pourquoi

$$\text{sinc}(t) \simeq \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sin(2\pi f_j t + \pi/2) \quad \text{avec } f_j = \frac{j}{2N} \quad ?$$

Somme de Riemann (de pas $\frac{1}{2N}$) :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N} \sum_{j=1}^N \sin(2\pi t \cdot \frac{j}{2N} + \pi/2) = \int_0^{\frac{1}{2}} \sin(2\pi t f + \pi/2) df$$

Trigonométrie :

$$\sin(2\pi f t + \pi/2) = \cos(2\pi f t)$$

Primitive du cosinus :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \cos(2\pi t f) df = \frac{\sin(2\pi t \frac{1}{2}) - 0}{2\pi t} = \frac{1}{2} \text{sinc}(t)$$