Semaine 7 : Série d'exercices sur les signaux [Solutions]

1 Bande passante

a)

1. La bande passante étant la plus grande des fréquences, elle ne change pas (on a ici changé que l'amplitude).
2. La bande passante ne change pas.
3. La bande passante est multipliée par 3, car toutes les fréquences du signal sont multipliées par 3.
4. La bande passante devient $\max(B, f)$.

   En effet, comme $f \neq f_1, f_2, \ldots, f_n$, on est sûr ici qu'on ajoute une sinusoïde de fréquence f au signal qui ne peut pas s'annuler avec une sinusoïde déjà présente dans le signal d'origine X. S'il se trouve que $f > B$, c'est donc que f est la plus grande fréquence du nouveau signal ; sinon, la bande passante reste la même.
5. $X'(t) = \sum_{i=1}^{n} 2\pi f_i a_i \cos(2\pi f_i t + \delta_i) = \sum_{i=1}^{n} 2\pi f_i a_i \sin(2\pi f_i t + \delta_i + \frac{\pi}{2})$, donc la bande passante ne change pas non plus ici.

b) On suppose donc ici que

$$X(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i \sin(2\pi f_i t) \quad \text{et} \quad Y(t) = \sum_{j=1}^{m} b_j \sin(2\pi g_j t)$$

avec les bandes passantes respectives $B_X = \max(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ et $B_Y = \max(g_1, g_2, \ldots, g_m)$.

1. La bande passante de $X(t) + Y(t)$ est en général égale à $\max(f_1, f_2, \ldots, f_n, g_1, g_2, \ldots, g_n) = \max(B_X, B_y)$, *sauf* dans le cas où $B_X = B_Y = B$.

   Dans ce cas, notons i et j respectivement deux indices où la bande passante B est atteinte dans respectivement X et Y, c.-à-d. $B = f_i = g_j$. S'il se trouve que $a_i = -b_j$, alors ces deux sinusoïdes de plus haute fréquence s'annulent dans le signal $X(t) + Y(t)$, d'où il en ressort que la bande passante de $X(t) + Y(t)$ est *plus petite ou égale* à $\max(B_x, B_Y) = B$. Elle peut même être strictement plus petite si toutes les composantes les plus hautes s'annulent toutes.

   Tandis que dans le cas où $B_X \neq B_Y$, la sinusoïde ayant la plus grande fréquence parmi toutes ne peut s'annuler avec une autre.
2. Soit de nouveau f_i la plus haute fréquence du signal X et g_j la plus haute fréquence du signal Y. Donc $f_i = B_X$ et $g_j = B_Y$. Le signal $X(t) \cdot Y(t)$ comprend donc une composante de la forme

   $$a_i\, b_j\, \sin(2\pi f_i t)\, \sin(2\pi g_j t)$$

   qui, en utilisant le rappel de trigonométrie de l'énoncé, se réécrit de la manière suivante :

   $$\frac{1}{2}\, a_i\, b_j\, (\cos(2\pi(f_i - g_j)t) - \cos(2\pi(f_i + g_j)t))$$

On peut vérifier que la composante de fréquence $f_i + g_j$ ci-dessus est la composante de plus haute fréquence dans le signal $X(t) \cdot Y(t)$, et que c'est aussi la seule : toutes les autres composantes ont des fréquences plus faibles. On obtient donc que la bande passante de $X(t) \cdot Y(t)$ est toujours *égale* à $f_i + g_j = B_X + B_Y$.

2 Signaux périodiques et apériodiques

a) Oui, dans ce cas, $X_1(t) + X_2(t)$ est périodique de même période T. En effet :

$$X_1(t+T) + X_2(t+T) = X_1(t) + X_2(t) \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Notez que cela inclut le cas particulier $X_2 = -X_1$ puisque tout signal constant est périodique (avec une infinité de périodes : tout T positif non nul est alors une période possible).

b) Dans ce cas, la réponse n'est pas forcément oui : ça dépend si le rapport T_1/T_2 est rationnel (auquel cas le signal est périodique) ou non (auquel cas le signal est apériodique). Avec les deux exemples donnés dans l'énoncé, on voit bien graphiquement que le premier signal est périodique, tandis que le second ne l'est pas.

Pour aller plus loin (si vous aimez les maths) : la question de la périodicité de la somme de deux fonctions réélles périodiques est une question « difficile » dans le cas général.

Si par « signal » on entend « fonction réelle continue et bornée », alors on a le théorème suivant :

> La somme de deux signaux périodiques non constants est périodique si et seulement si le rapport de leurs périodes est rationnel.

L'aspect suffisant du ratio rationnel est trivial : si $T_1/T_2 \in \mathbb{Q}$ alors il existe p et q entiers naturels non nuls tels que $p\,T_1 = q\,T_2$; notons T ce nombre ($T = p\,T_1 = q\,T_2$) ; alors $X_1(t+T) + X_2(t+T) = X_1(t + p\,T_1) + X_2(t + q\,T_2) = X_1(t) + X_2(t)$.

L'aspect nécessaire par contre est plus difficile :

- la démonstration du cas continu borné utilise des notions avancées telles que sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$ et densité (au sens topologique) ;
- si on laisse tomber la continuité (ou même l'aspect borné, je crois), on peut construire des sommes de signaux périodiques de périodes ayant un ratio irrationnel qui soient périodiques.

Note : pour des signaux constants, la contition n'est évidemment pas vérifiée puisque tout nombre réél strictement positif est une période.

---

c) Dans le cas où T_1 et T_2 sont des nombres entiers, le rapport T_1/T_2 est justement un nombre rationnel, donc le signal est périodique : tout multiple commun de T_1 et T_2 est une période. On peut le voir graphiquement, ou en vérifiant la formule suivante pour N multiple commun à T_1 et T_2 ($N = kT_1 = \ell T_2, \quad k, \ell \geq 1$) :

$$X_1(t+N) + X_2(t+N) = X_1(t + kT_1) + X_2(t + \ell T_2) = X_1(t) + X_2(t).$$

Note : trouver **la plus petite** période n'est par contre pas possible dans le cas général (même pour un signal non constant) : on peut juste affirmer qu'il est de la forme $\text{ppmc}(T_1, T_2)/n$; mais

trouver n n'a pas de forme générale. Il suffit p.ex. de considérer $X_1(t) = (2i+1)\sin(t)$ et $X_2(t) = \sin((2i+1)t) - X_1(t)$, qui sont les deux périodiques de plus petite période 2π (ré-exprimer $X_2(t)$ comme une somme de puissances de sinus), alors que leur somme ($\sin((2i+1)t)$ est périodique de plus petite période $\frac{2\pi}{2i+1}$.

d) La période de la sinusoïde fondamentale est $T_0 = 1/f_0$, et les périodes des harmoniques sont de la forme $T_n = 1/(nf_0)$. Ainsi, T_0 est le plus petit multiple commun à toutes ces périodes, et le signal est donc périodique de période T_0 (à nouveau, ceci se voit bien graphiquement).

3 Interlude musical

Un échantillon est produit 44'000 fois par secondes car la fréquence représente l'inverse de la période entre deux échantillons. Chaque échantillon est représenté sur 32 bits et il y a 3'600 secondes dans une heure. On trouve donc que la taille du fichier est de $3600 \times 44000 \times 32 \simeq 4.72$ gibibits $\simeq 604$ Mio.

4 Fréquence d'échantillonnage

Rappelons que $f_1 > f_2 > 0$.

a) $X_1(t) = \sin(2\pi f_1 t) + \sin(2\pi f_2 t)$: la condition ici est que $f_e > 2f_1$ (f_1 étant la plus grande fréquence présente dans le signal, c.-à-d. la bande passante).

b) $X_2(t) = 2\cos(2\pi f_1 t) - \sin(2\pi f_2 t + \pi/4)$: idem : la condition ici est que $f_e > 2f_1$ (les amplitudes et déphasages ne jouent aucun rôle).

c) $X_3(t) = \sin(4\pi f_1 t) + \sin(2\pi(f_1 + f_2)\, t)$: les deux fréquences des sinusoïdes sont respectivement : $2f_1$ et $f_1 + f_2$. Vu que $f_1 > f_2$; il faut donc échantillonner le signal à une fréquence $f_e > 4f_1$.

d) $X_4(t) = \sin(2\pi f_1 t) \cdot \sin(2\pi f_2 t)$: ici, un petit calcul s'impose (cf. résumé de trigonométrie) :

$$\sin(2\pi f_1 t) \cdot \sin(2\pi f_2 t) = \frac{1}{2}\left(\cos(2\pi(f_1 - f_2)t) - \cos(2\pi(f_1 + f_2)t)\right),$$

donc la plus grande fréquence présente dans le signal est $f_1 + f_2$: il faut échantillonner le signal à une fréquence $f_e > 2(f_1 + f_2)$.

5 Questions-test

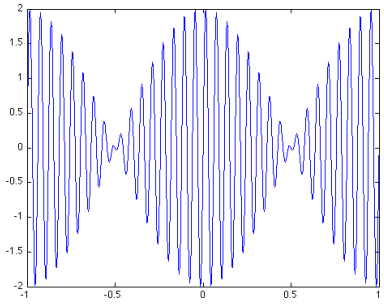
1. b) et c) 2. a), c) et d) 3. b) 4. c)

6 Accordage d'instrument à cordes et phénomène dit de « battement »

a) Lorsque $f_2 = f_1 + \varepsilon$, avec ε petit mais non nul, on trouve que (cf. encore une fois le rappel de trigonométrie)

$$\begin{aligned} X_1(t) + X_2(t) &= \sin(2\pi f_1 t) + \sin(2\pi f_2 t) = 2\cos(\pi(f_2 - f_1)t)\,\sin(\pi(f_1 + f_2)t) \\ &= 2\cos(\pi\varepsilon t)\,\sin(\pi(2f_1 + \varepsilon)t). \end{aligned}$$

Cette onde est donc faite d'une composante qui oscille lentement ($\cos(\pi\varepsilon t)$) et d'une autre qui oscille rapidement ($\sin(\pi(2f_1 + \varepsilon)t)$). Elle ressemble à ceci (pour $f_1 = 16$Hz et $f_2 = 17$Hz) :



C'est la composante qui oscille lentement que l'on entend clairement à l'oreille. Une illustration intéressante d'un phénomène de battement est disponible à l'adresse :

http ://fr.wikipedia.org/wiki/Battement_binaural

b) Lorsque $f_2 = f_1$, l'onde résultante est simplement :

$$X_1(t) + X_2(t) = \sin(2\pi f_t) + \sin(2\pi f_1 t) = 2\,\sin(2\pi f_1 t).$$

Dans ce cas, l'amplitude est doublée (remarquez qu'on avait aussi un facteur 2 dans le premier cas), mais on n'entend pas de battement.

7 Un peu de radio

a) On considère d'abord un système qui transmet directement $S(t)$. La longueur de l'antenne L est donc fixée au minimum à un quart de la longueur d'onde $\lambda = \frac{c}{f_s}$, c'est-à-dire

$$L = \frac{\lambda}{4} = \frac{c}{4f_s} = \frac{3\times 10^8}{4\times 10^3} = \frac{3}{4}\times 10^5 \text{ m} = 75 \text{ km}.$$

Une antenne de 75 km de long ne se prête pas à des applications concrètes ! Par contre, pour le signal $A(t)$ dont les fréquences sont proches de 300kHz, une longueur d'antenne de

$$L = \frac{\lambda}{4} = \frac{c}{4f_p} = \frac{3\times 10^8}{4\times 3\times 10^5} = \frac{1}{4}\times 10^3 \text{ m} = 250 \text{ m}.$$

est suffisante (dans la pratique, on se débrouille avec des antennes plus petites encore).

b) La multiplication de $A(t)$ par $P(t)$ permet d'écrire :

$$\begin{aligned} A(t)\,P(t) &= S(t)\,P(t)\,P(t) = \sin(2\pi f_s t)\sin(2\pi f_p t)\sin(2\pi f_p t) \\ &= 0.5(\sin(2\pi f_s t)\,(\cos(2\pi(f_p - f_p)t) - \cos(2\pi(f_p + f_p)t)) \\ &= 0.5(\sin(2\pi f_s t)\,(1 - \cos(4\pi f_p t)) \\ &= 0.5(\sin(2\pi f_s t) - \sin(2\pi f_s t)\cos(4\pi f_p t) \\ &= 0.5(\sin(2\pi f_s t) + \frac{1}{2}\sin(2\pi(2f_p - f_s)t) - \frac{1}{2}\sin(2\pi(2f_p + f_s)t)) \end{aligned}$$

Nous observons que nous avons maintenant la somme du signal $S(t) = \sin(2\pi f_s t)$ auquel nous sommes intéressés et de deux termes supplémentaires avec les fréquences respectives

$$2f_p - f_s = 599 \text{ kHz} \quad \text{et} \quad 2f_p + f_s = 601 \text{ kHz}.$$

Nous pouvons supprimer ces deux termes en appliquant un filtre passe-bas avec une fréquence de coupure plus basse que 599 kHz (p. ex. $f_c = f_p = 300$ kHz), et ainsi récupérer le signal $0.5\,S(t)$, qu'il suffit ensuite d'amplifier (p.ex. avec le bouton du volume).

Note : les raisons pour lesquelles on multiplie par $P(t)$ plutôt que de diviser comme on pourrait *a priori* imaginer sont principalement :

- qu'il est problématique de diviser par un signal qui passe par 0 ;
- qu'en pratique il est facile de réaliser la multiplication (par exemple avec des diodes), pas la division...